Kommentaare 2024. aasta matemaatikaolümpiaadi lõppvooru 12. klassi ülesannetele

Jan Willemson

18. aprill 2024. a.

2024. aasta 12. klassi matemaatikaolümpiaadi lõppvoor läheb ajalukku rekordiliselt madalate tulemustega. Keskmiseks ja mediaantulemuseks kujunes vastavalt 6,3 ja 4 punkti 35-st võimalikust. I, II ja III auhinna andis vastavalt 3, 2 ja 1 ülesande äralahendamine 5-st. 5 õpilast 24-st lõppvoorus osalenust said lausa 0 punkti. Komplekt oli seega enneolematult karm. Kuidas niisugune asi juhtuda sai? Miks ülearu rasked komplektid head ei ole? Kas ja kuidas saaks sarnaseid probleeme tulevikus vältida? Nendele küsimustele otsimegi siinses artiklis vastuseid.

Ühest küljest võib muidugi öelda, et tegemist on puhta statistikaga ning et aastast aastasse keskmine tulemus kõigubki. 2021. aastal oli 12. klassi keskmine tulemus näiteks 20,0, 2022. ja 2023. aastal aga 11,5 punkt. Need tulemused moodustavad mingi jaotuse ning ekstreemsed väärtused on eeldatavasti küll haruldased, aga siiski mitte võimatud, ja 2024 juhtuski lihtsalt olema haruldaselt halb aasta.

Seda selgitust võiks pidada rahuldavaks, kui olümpiaaditulemused oleks stiihilise loodusliku protsessi tagajärg. Reaalsuses määrab tulemuse aga õpilaste taseme ning žürii poolt valitud ülesannete raskuse vahekord. Loomulikult kõigub ka õpilaste tase aasta-aastalt mõnevõrra, kuid kindlasti mitte nii palju, et selgitada keskmise tulemuse enam kui kolmekordset langust kolme aasta jooksul. Enamus sellest langusest tuleb paratamatult kirjutada žürii valitud ülesannete arvele, mis õpilaste tasemega piisavalt ei arvesta.

Tõele au andes tuleb muidugi tunnistada, et ülesannete valimine on ise väga keeruline ning paljude kitsendustega ülesanne. Peale raskusastme tuleb jälgida veel, et kõik klassid saaksid igast klassikalisest teemast (kombinatoorika, algebra, arvuteooria, geomeetria) vähemalt ühe ülesande, et komplektid ei kordaks liigselt eelmiste aastate omi ning et ülesanded ise oleksid matemaatiliselt huvitavad. Enne olümpiaadi pakub iga žüriiliige teatud hulga kas enda välja mõeldud või teiste riikide olümpiaadidelt võetud/kohandatud ülesandeid ning žürii paneb neist ühise arutelu käigus komplektid kokku. 9.-12. klassi lõppvooru jaoks on vaja $4 \cdot 5 = 20$ ülesannet ja seda on tegelikult väga palju. Hea komplekti valimiseks võiks pakkumisi olla kaks korda rohkem, aga mitte alati pole 40-t ülesandekandidaati võtta.

Teisest küljest tahab žürii pakkuda lahendajatele huvitavat peamurdmist ja kahjuks kipuvad huvitavamad ülesanded sageli ka keerukamad olema. Loomulikult saavad 9. klassi õpilased kõige lihtsamad ülesanded endale, 10. ja 11. klassile jäävad juba keerukamad ning 12. klassile kõige keerulisemad pakkumised. Niisiis on 12. klassi tasemesse ebaproportsionaalselt kõrge raskusaste mõnes mõttes ette sisse programmeeritud. Paraku otsustas žürii 2024. aastal sellele raskusastmele veel "vinti peale keerata" (näiteks 1. ülesandes, mida allpool täpsemalt käsitleme).

Ülimadala keskmise tulemuse kohta võib ka öelda, et iseenesest ei juhtunud ju midagi hullu, õpilased said reastatud ning rahvusvahelise matemaatikaolümpiaadi (IMO) kandidaadid välja valitud. Kes saavutas parema tulemuse raskete ülesannetega, oleks suure tõenäosusega tulnud etteotsa ka kergematega, ja auhinnasaajate seltskond polekski märkimisväärselt teistsugune saanud. Viimase väitega olen isegi nõus, aga siinkohal tuleb tähele panna, et IMO võistkonna kandidaatide valimine pole kaugeltki olümpiaadi ainus eesmärk. Eesti Matemaatika Seltsi olümpiaadimatemaatika ühenduse statuut[1] seab muuhulgas sihiks

- *populariseerida Eesti õpilaste seas matemaatikat ja innustada neid end matemaatikas arendama rohkem kui kooliprogramm ette näeb* ja

- *kanda hoolt Eesti üleriigilise matemaatikaolümpiaadi korraldajate järelkasvu säilimise eest.*

Võtan endale vabaduse viimast punkti laiendada ning väita, et matemaatikaolümpiaadide ülesanne üldiselt on tagada Eesti matemaatikute järelkasv. Olukorras, kus ametlikku kooliprogrammi on viimaste aastakümnete jooksul järjepidevalt koomale tõmmatud, on võistlused sisuliselt ainus koht, kus õpilased puutuvad kokku tõestamise ning keerukamate ülesannetega. Olümpiaadi lõppvooru jõuavad vastavate aastakäikude kõige andekamad noored, kes on selleks võistluseks aastaid valmistunud.

Püüdkem endale nüüd korraks ette kujutada, mis toimub noore inimese peas, kui ta kogu ettevalmistusele vaatamata saab lõppvoorus 35st võimalikust 4 punkti või vähem (nagu 2024. aastal juhtus rohkem kui pooltega 12. klassi lõppvooru jõudnutest). Ma pole viinud läbi küsitlust kõigi osalenute seas, aga minu meelest on kõige loomulikum reaktsioon "Ma ei saa matemaatikaga hakkama!". Emotsionaalset noort inimest ei aita lohutus, et žürii pingutas ülesannete raskusastmega seekord üle rohkem kui tavaliselt, sest punktiskoor kõneleb vastuvaidlematut keelt.

Eriti kahetsusväärsed on sellised tunded 12. klassi kevadel, st ajal, mil koolilõpetaja valib edasist elukutset. Ma ei tea, kui palju oli 2024. aasta lõppvoorus "põrunute" seas neid, kes kaalusid matemaatikaõpinguid ühe võimalusena ning loobusid sellest mõttest pärast oodatust märgatavalt halvemat olümpiaaditulemust. Aga Eesti ühiskond on väga väike ja isegi kui me kaotasime tänu žürii

[1] `https://matemaatika.eu/omu/omu-statuut/`

tegevusele ainult mõne noore, kellest oleks võinud saada näiteks suurepärane matemaatikaõpetaja, on seda liiga palju.

Teisiti sõnastades – peale ratsionaalse suhtumise tulemusse ("Ma sain 4 punkti, aga see andis mulle kõigi Eesti 12. klassi õpilaste seas 11. koha!") on olemas ka emotsionaalne suhtumine ("Ma sain 4 punkti, mis on napilt üle 10% maksimumist. Ma olen matemaatikas täiesti lootusetu!"). Lahendajatele üle jõu käivaid komplekte koostades ignoreerib žürii emotsionaalset aspekti, mis samas määrab palju noore inimese käitumises, eriti just eriala valikul. Kokkuvõttes ei täida olümpiaadimatemaatika ühendus enda eesmärki ega taga Eesti matemaatikute järelkasvu.

Selleks, et paremini mõista, mis 2024. aasta 12. klassi lõppvoorus juhtus, analüüsime seal antud ülesandeid lähemalt.

1. ülesanne

oli kahtlemata kõige vastuolulisem. Kui sageli valitakse komplekti 1. ülesanne lihtsamate killast (nii on see näiteks traditsiooniliselt IMO puhul), siis seekord pingutas žürii eriliselt kõvasti, et niigi raskest probleemist peaaegu lootusetu teha.

Ülesandes tuleb tõestada, et Fibonacci jada ($F_1 = F_2 = 1$, $F_{i+2} = F_{i+1} + F_i$ $(i \geqslant 1)$) liikmed number $2018, 2019, \ldots, 2024$ on kordarvud. Lahendus kasutab lemmat, mille põhjal $F_m \vdots F_n$, kui $m \vdots n$; niisiis piisab veenduda, et arvud $2018, 2019, \ldots, 2024$ on ise kordarvud.

Siin peitub ülesande esimene konks. Ühest küljest on $m \vdots n \Rightarrow F_m \vdots F_n$ näol tegu hästi tuntud tulemusega (vt nt [3, IV peatükk, 19. ülesanne], [2, jaotis 6.6]), millele õpilane võib lahenduses lihtsalt viidata. Selle peale seisaks žürii raske valiku ees – kas trahvida lahendajat selle eest, et ta klassikalise lemma tõestust kirja ei pannud, või leppida olukorraga, et konkreetse õpilase jaoks muutus ülesanne triviaalseks. Juba niisuguse valiku oht peaks selle ülesande komplektist diskvalifitseerima.

Samuti palun tõsta käsi neil žüriiliikmetel, kes seda lemmat teadsid. Hästi, ja nüüd nende seast, kes ei teadnud – palun tõstke käsi, kes selle abitulemuse tunni aja jooksul iseseisvalt välja mõtlesid ja tõestasid.

Ma tahan öelda, et kui lahendaja vajalikku lemmat ei tea, pole piiratud ajaga selle peale tulemine sugugi lihtne. Palju loomulikum on vaadelda konkreetseid algarve ning uurida jada (F_i) elementide jääke nende algarvude suhtes. Vastavates jääkide jadades tekivad jaguvusseaduspärasused, mida pole keerukas tõestada. Nii näiteks jagub iga kolmas Fibonacci arv 2-ga, iga neljas 3-ga, iga viies 5-ga, iga seitsmes 13-ga jne. Nende tähelepanekute abil õnnestub näidata, et $F_{2019}, F_{2020}, F_{2022}, F_{2023}, F_{2024}$ on kordarvud. F_{2018} ja F_{2021} kordarvulisuse tõestamiseks tuleks niisuguse võttega aga leida, et iga 1009-s jada liige jagub 2017-ga ning iga 43-s liige jagub 433494437-ga.

Hindamisskeemis on mainitud, et paljud õpilased tulid selle idee peale, kuid teenisid 0 punkti, sest ülesannet parandanud žüriiliikme hinnangul oli tegu praktikas teostamatu lähenemisega.

Niisugune hindamisskeemi kujundamise põhimõte tekitab protesti mitmest seisukohast. Esiteks välistab selline "kõik või mitte midagi" kontseptsioon sisuliselt osaliste punktide andmise võimaluse ja see on halva hindamisskeemi tunnus. Kui õpilane on suutnud meelega segaseks aetud tekstist (sellest pikemalt allpool) õigesti aru saada ning tõestada vajaliku väite 5 arvu jaoks 7-st, ei saa kuidagi öelda, et ta pole midagi sisulist ära teinud. Seda eriti olukorras, kus tõestus pole ka nende 5 arvu korral triviaalne.

Lisaks on vaieldav argument ülejäänud tõestuse praktilisest teostamatusest. Tõepoolest, käsitsi pole tegurini 433494437 võistluseks eraldatud 5 tunni jooksul võimalik jõuda, aga mõnerealine arvutiprogramm teeks selle töö ära täiesti mõistliku ajaga[2]. Mingis mõttes on arvuti kasutamise keeld olümpiaadil üsna kunstlik, sest praktikas kasutavad matemaatikud arvuteid oma töös igapäevaselt. Äkki oleks aeg matemaatikavõistlustel see kunstlik piirang kaotada? Jah, see tähendaks muuhulgas vajadust võistluste formaati ja ülesandetüüpe muuta ning kokkuvõttes oleks tegemist üsna teistsuguse üritusega, aga võib-olla oleks ka niisugustel võitstlustel oma koht ja sihtrühm?

Tulles tagas kõnealuse ülesande juurde väidan ma, et idee uurida Fibonacci jada liikmete jääke teatud algarvude järgi pole sugugi rumal ning viib väiksema või suurema tööga lõpuks ka sihile. Niisuguste lahenduste eest 0 punkti andmine on lihtsalt ülekohtune.

Siit jõuame olümpiaadikorralduse ühe laiema probleemini. Hindamisskeemi kujundamine on ainult ühe inimese vastutusalas ning tema otsused skeemi osas on sisuliselt vaidlustamatud. Ma saan väga hästi aru, miks õpilased ei saa hindamisskeemi apelleerida – siis taanduks enamus apelleerimist skeemi üle arutlemiseks. See aga ei tähenda, et ülejäänud žüriil ei võiks hindamisskeemi osas kaasarääkimise õigust olla. Ma olen üsna kindel, et kui teised žüriiliikmed oleksid antud ülesandesse ja tema hindamisse rohkem süvenenud, oleksid ka nemad parandaja poolt pakutud skeemi küsitavaks pidanud.

Kartes, et ülesanne "Tõesta, et $F_{2018}, \ldots, F_{2024}$ on kordarvud" jääb liiga lihtsaks, otsustas žürii sõnastada küsimuse hoopis kujul "Kui mitu arvudest $F_{2018}, \ldots, F_{2024}$ on algarvud?" Suurte täisarvude algarvulisuse testimine on üldjuhul keerukas ülesanne ning kindlasti mitte ei ole see tehtav tunni aja jooksul paberi ja pliiatsiga. Õpilane peaks nüüd ära aimama, et ainus vastus, mida tal oleks vähegi lootust tõestada, on 0. Aga veelkord, selle aimduse tekkimiseks peaks ta omama ettekujutust algarvulisuse testimisest, mis jääb kooliprogrammist kaugele välja.

Kuigi ülesanne oli juba oma matemaatilise sisu poolest väga raske, otsustas žürii lisada täiendavat keerukust tekstilise "soustiga". Meil on seitse järjestikust arvu, niisiis toogem sisse seitse pöialpoissi! Kuidas teha nii, et nad saaksid vastavalt arvud $F_{2018}, \ldots, F_{2024}$? Las korjavad rannas teokarpe (ja mis sellest, et $F_{2024} \approx 4{,}38 \cdot 10^{422}$, me oleme juba nagunii otsaga muinasjutumaal). Selleks, et Fibonacci arvud jooksma saada, laseme teokarpe korjata mööda tsüklit. Kokkuvõttes oli tulemuseks järgmine tekst:

[2] Minu 3,9GHz protsessoril jooksis optimeerimata Python-programm ühes lõimes 3 minutit ja 42 sekundit.

Seitse pöialpoissi korjab rannas teokarpe. Algul korjab esimene pöialpoiss ühe teokarbi, seejärel teine pöialpoiss samuti ühe teokarbi. Igal järgmisel sammul korjab järgmine pöialpoiss samapalju teokarpe, kui on kahel eelmisel pöialpoisil kokku. Kui kõik pöialpoisid on korra teokarpe korjanud, alustatakse uut ringi samas järjestuses. Igal uuel ringil korjab iga pöialpoiss niipalju teokarpe juurde, et tal oleks neid samapalju kui kahel eelmisena korjanud pöialpoisil kokku. Pöialpoisid lõpetavad, kui kokku on tehtud 2024 *korjamist. Mitmel pöialpoisil on lõpus teokarpide arv algarv?*

Jah, muidugi on funktsionaalne lugemisoskus matemaatikavõistlustel edukaks esinemiseks vajalik eeltingimus, aga õpilaste ülearu segadusse ajamine pole ka põhjendatud. Näiteks lauset "Igal uuel ringil korjab iga pöialpoiss niipalju teokarpe juurde, et tal oleks neid samapalju kui kahel eelmisena korjanud pöialpoisil kokku." on üsna lihtne mõista nii, et pöialpoiss korjab oma korral niipalju teokarpe juurde kui kaks eelmist oma korral kokku korjasid. Vestlesin pärast võistlust ühe osavõtjaga ning tema väitel saadi sellest ülesandest aru vähemalt viiel erineval moel. Ma pole ise võistlustöödega tutvunud ega suuda seda väidet sõltumatult kinnitada, aga ma olen nõus, et sel korral lisas "soust" niigi raskele ülesandele tarbetut keerukust.

Kokkuvõtteks hindas žürii 1. ülesande raskusastet valesti ning tundub olevat eraldi pingutanud, et lahendajate elu võimalikult kibedaks muuta.

2. ülesanne

küsis, kas leidub selline funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et

$$\forall x, y \in \mathbb{R} :\ f(x) + f(f(y)) + f(f(f(x))) = x + y\,.$$

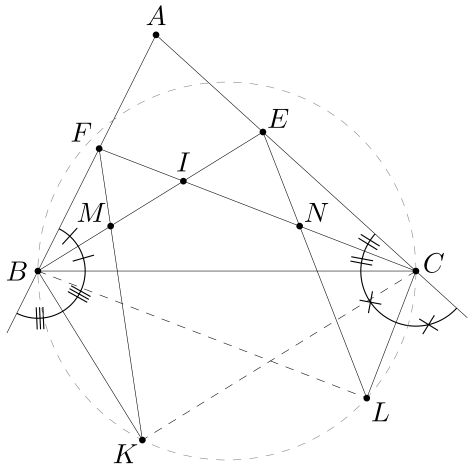
Funktsionaalvõrrandite klassis pole iseenesest tegemist raske ülesandega. Lahenduse kõige keerukam samm on tulla alguses asenduse $y = f(x)$ peale (standardsemad võtted $x = 0$, $y = 0$, $x = y$ jmt ei vii vähemasti esimese hooga eriti kuhugi). Samas on funktsionaalvõrrandid üldiselt õpilastele väga rasked, sest nad nõuavad sisulist arusaamist funktsiooni abstraktsest kontseptsioonist ja see arusaamine ei kipu meie koolitundides väga tekkima. Maakeelsetest õppematerjalidest on olemas Willemsoni ja Zolki 20 aasta tagune brošüür [7]; funktsionaalvõrrandite peatüki leiab ka autori õpikust "Võistlusmatemaatika põhivara" [6]. Kardetavasti ei kuulu see teema aga prioriteetsete sekka isegi neis koolides, kus eraldi olümpiaadiettevalmistust tehakse (sest olgem ausad, teemasid, mida tuleb läbi käia, on palju). Niisiis liigitub 2. ülesanne raskete kilda juba ainuüksi oma valdkonna tõttu.

3. ülesanne

oli kõrvuti 1. ülesandega komplekti üks karmimaid ja muuhulgas ainus, millele ei antud ühtegi täislahendusele ligilähedastki lahendust.

Kolmnurga ABC tippude B ja C juures olevate sisenurkade poolitajad lõikuvad omavahel punktis I ning külgedega CA ja AB vastavalt punktides E ja F. Olgu M ja N vastavalt lõikude BI ja CI keskpunktid. Sirge FM lõikab kolmnurga ABC tipu B juures oleva välisnurga poolitajat punktis K ja sirge EN lõikab kolmnurga ABC tipu C juures oleva välisnurga poolitajat punktis L. Tõesta, et punktid K, B, C, L asuvad ühel ringjoonel.

Tekst defineerib 10 punkti ja 9 sirget/lõiku, mida ei ole geomeetriaülesande kohta iseenesest enneolematult palju. Muidugi tuleneb ülesande reaalne raskusaste antud geomeetriliste objektide omavahelistest seostest. Minu meelest on kõige trikilisemad punktid M ja N, sest kolmnurga tipu ja siseringjoone keskpunkti vahelise lõigu keskpunktil pole mingeid hästi teada olevaid või ilmseid geomeetrilisi seoseid teiste punktide või sirgetega.



Esimene vahetu raskus, millega lahendaja kokku puutub, on aru saada, millist ringjoont otsida. Kui õnnestub teha korralik joonis, võib püstitada hüpoteesi, et jutt käib ringjoonest diameetriga BC. Seejärel on juba lihtne mõista, et tegelikult tuleb ülesandes tõestada võrdused $\angle BKC = \angle BLC = 90°$.

Jah, muidugi on korrektsete jooniste tegemine geomeetriaülesannete lahendamiseks vajalik eeltingimus, aga siiski peitub siin kari, mida žüriil on lihtsam vältida kui lahendajal. Usun, et žürii kasutab geomeetriaülesannte koostamiseks, lahendamiseks ja vormistamiseks arvutiprogramme, mis hoolitsevad jooniste korrektsuse eest (näiteks GeoGebra või LaTeXi pakett tkz-euclide). Nende abil jooniseid tehes paistab õige hüpotees kohe silma, sellal kui sirkli ja joonlauaga toimetades võib väike kõrvalekalle mõne nurgapoolitaja joonestamisel ringjoone keskpunkti lõigust BC lõpuks üsna kaugele viia. Veelkord, see pole kehvade jooniste õigustus, vaid tähelepanek, mis võib osaliselt selgitada, miks žürii seda ülesannet lihtsamaks pidas kui ta reaalsuses oli.

Teine asjaolu, millest žürii ennast kindlasti eksiteele laskis viia, oli ülesande autori lahendus. Selles kasutatakse kavalat lisakonstruktsiooni, pärast mida on kogu ülejäänud lahenduskäik väga elegantne. Žürii materjalides on isegi lahenduse joonis tehtud niisuguse nurga all, mis ülesande teksti järgi tundub ebaloomulik, kuid pärast lisakonstruktsiooni läheb kõik justkui võluväel paika.

Aga tõstke palun käed, kui paljud žüriiliikmed püüdsid seda ülesannet lahendada ilma ametlikku lahendust piilumata ning suutsid tema lisakonstruktsiooni tunni aja jooksul välja mõelda? Arvan, et vaid mõned üksikud, kui üldse keegi. Mina näiteks ei suutnud, kuigi ma kulutasin sellele ülesandele mitu päeva. Parim lahendus, mille peale mina tulin, kasutab barütsentrilisi koordinaate (vt lisa A). See aga on juba IMO-taseme tehnika, mida Eesti gümnaasiumiõpilastelt muidugi eeldada ei saa.

4. ülesanne

on komplektis esimene, mis pakub matemaatiliselt huvitava püstituse:

> *Kui palju leidub selliseid n-kohalisi naturaalarve, millele numbrite järjekorra vastupidiseks pööramisel saadava arvu liitmisel on tulemuseks palindroom?*

(Silmas peetakse ilmselt kümnendsüsteemi arve, kuigi seda pole ilmutatult välja öeldud.)

Kahjuks ei käi ilusa ülesandega kaasas eriti ilus vastus ($36 \cdot 55^{\frac{n-2}{2}} + 8 \cdot 9^{\frac{n-2}{2}}$, kui n on paaris, ja $36 \cdot 55^{\frac{n-3}{2}} + 8 \cdot 9^{\frac{n-3}{2}}$, kui n on paaritu).

Lahenduse esimeseks raskuseks on aru saada, kas me pääseme liitmise juures ülekannete uurimisest või ei, ning üsna kiiresti saab selgeks, et ei pääse (näiteks $56 + 65 = 121$ on palindroom). Edasi tuleb välja mõelda, mis tingimustel ülekanded täpselt tekkida võivad ja kui kaugele nad propageeruvad. Erinevaid näiteid läbi proovides pole õigete hüpoteesideni jõudmine väga raske, kuid nende hüpoteeside tõestuste korralik kirjapanek läheb omajagu tehniliseks "indeksijahiks". Täispunktide peale keegi võistlusel sellega hakkama ei saanudki, aga vähemasti võimaldas hindamisskeem osalisi punkte jagada.

Kõnealuse komplekti kontekstis oli tegemist keskmise raskusega, kuid absoluutskaalal minu meelest siiski pigem raske ülesandega.

5. ülesanne

> *Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille korral on võimalik kõik positiivsed täisarvud 1 kuni n kirjutada mingis järjestuses ringjoonele, igaüks täpselt ühe korra, nii et iga arv on temast ülejärgmise arvuga ühistegurita.*

Oli selge, millest lahendamisel pihta hakata – läbi tasub proovida väikeseid n väärtusi, kuni muster selgeks saab. Osutub, et näiteks $n = 1, 2, \ldots, 8$ seas on "halvad" $n = 2$ ja $n = 6$. Kui $n = 2$ võib veel olla eraldiseisev üksikjuht, siis $n = 6$ puhul selgub üsna kiiresti, et iga paigutuse korral satub ringjoonele kuhugi üle ühe kaks paarisarvu. See tähelepanek üldistub suvalise $n \equiv 2 \bmod 4$ jaoks ning sellega ongi ülesande raskem osa tehtud. Jääb veel anda konstruktsioonid 4-ga jaguvate ja paaritute n väärtuste jaoks.

Kokkuvõttes oli see ülesanne ainus, mis minu jaoks rahuldas kõiki hea olümpiaadiülesande kriteeriume:

- matemaatiliselt huvitav sõnastus,
- mitte ülearu keeruline vastus,
- lahenduse jagunemine loomulikeks osadeks, mille eest saab eraldi punkte anda,
- tehtavus paraja jõupingutusega.

Kokkuvõte

Aeg-ajalt esineb olümpiaadidel karme komplekte, kuid on mitmeid asju, mida žürii üleliigse raskusastme ennetamiseks teha saab.

- Pärast esialgsete komplektide kokkupanekut peaks keegi nad ilma autorite lahendusi vaatamata läbi lahendama. 2024. aasta 12. klassi ülesannete seas oli mitu sellist, mis pärast idee teadasaamist petlikult lihtsad tundusid (näiteks 1. ja 3.). Sõltumatu läbilahendamine oleks andnud parema ettekujutuse nende ülesannete reaalsest raskusastmest.
- Hindamisskeemi kujundamine ei tohiks jääda ainult ühe isiku meelevalda. Žüriiliikmed peaksid kolleegide koostatud skeeme sisuliselt hindama ning vajadusel muutma, et minimeerida tarbetult karmide 0/7 skeemide esinemist.
- Palju saab ära teha sõnastuse valikuga. 1. ülesandes oleks võinud kogu "sousti" ära jätta ning öelda otse välja, et uuritavad arvud on kõik kordarvud. 3. ülesanne oleks muutunud natuke lihtsamaks, kui tekstis oleks ette öeldud, et otsitava ringjoone diameeter on BC.
- Eelistada tuleks ülesandeid, millel on huvitav matemaatiline ülesandepüstitus. 2024. aasta 12. klassi komplektist jäävad selles kontekstis positiivsetena meelde 4. ja 5. ülesanne.

Lisaks teen ettepaneku algatada uut tüüpi matemaatikavõistlus, kus arvuti kasutamine poleks mitte ainult lubatud, vaid lausa vajalik. Muidugi tähendaks see hoopis teistsuguste ülesannete valimist, aga niisugune võistlus oleks "päris" matemaatiku tööle palju lähemal ning võimaldaks samas ka hoopis uute ülesandetüüpide sissetoomist (näiteks andmeanalüüs või generatiivse tehisintellekti kasutamine). Selline olümpiaadivorm ei asendaks IMO stiilis paberi ja pliiatsiga nuputamist, aga oleks kindlasti koolinoortele huvitavaks väljakutseks.

Viited

[1] Harold Scott MacDonald Coxeter. *Introduction to Geometry, 2nd Edition.* Wiley, 1991.

[2] R.L. Graham, D.E. Knuth, and O. Patashnik. *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science.* Pearson Education, 1994.

[3] Reimo Palm. *Diskreetse matemaatika elemendid.* Tartu Ülikooli Kirjastus, 2003. https://dspace.ut.ee/handle/10062/14543.

[4] Viktor Prasolov. *Problems in Plane and Solid Geometry. v.1 Plane Geometry.* https://archive.org/details/planegeo/.

[5] Max Schindler and Evan Chen. *Barycentric Coordinates in Olympiad Geometry.* 2012. https://web.evanchen.cc/handouts/bary/bary-full.pdf.

[6] Jan Willemson. *Võistlusmatemaatika põhivara.* 2024. https://varamu.eu.

[7] Jan Willemson and Indrek Zolk. *Funktsioonid.* 2004. https://math.olympiaadid.ut.ee/arhiiv/oppemat/indrek/fneq.pdf.

A 3. ülesande lisalahendus

Kui kõik muud ideed geomeetriaülesande lahendamise juures läbi saavad proovitud, on alati võimalik koordinaatidega katsetada. Tavalised ristkoordinaadid tõotavad selles ülesandes aga palju vaeva. Juba siseringjoone keskpunkti jaoks näevad vastavad avaldised päris koledad välja, nende rehkendamine nõuab aega ning on veaohtlik.

Õnneks on olemas ka teistsuguseid koordinaatide süsteeme; selles ülesandes saab kasutada näiteks barütsentrilisi koordinaate. Ma ei hakka siinkohal kogu vajalikku teooriat tõestustega varustama, huvitatud lugeja leiab täiendavat materjali näiteks allikatest [1, 4, 5].

Definitsioon 1 *Olgu tasandil antud kolmnurk ABC ning olgu tema tippudesse rakendatud vastavalt punktmassid m_A, m_B, m_C, mis võivad olla ka mittepositiivsed, kuid rahuldavad seost $m_A + m_B + m_C \neq 0$. Olgu selle punktisüsteemi massikese P. Punkti P* barütsentrilisteks koordinaatideks *(antud kolmnurga suhtes) nimetame kolmikut $(m_A : m_B : m_C)$.*

Osutub, et tasandi iga punkti jaoks on olemas mingid barütsentrilised koordinaadid, aga nad pole üheselt määratud. Lihtne on mõista, et kui $(m_A : m_B : m_C)$ on punkti P barütsentrilised koordinaadid, siis iga $t \neq 0$ korral sobivad sama punkti barütsentrilisteks koordinaatideks ka $(tm_A : tm_B : tm_C)$. Kehtib ka vastupidine väide: punkti P barütsentriliste koordinaatide $(m_A : m_B : m_C)$ ja $(n_A : n_B : n_C)$ jaoks leidub niisugune reaalarv $t \neq 0$, et $n_A = tm_A$, $n_B = tm_B$ ja $n_C = tm_C$. See tähendab omakorda, et tasandi iga punkti jaoks on olemas täpselt üks komplekt barütsentrilisi koordinaate $(m_A : m_B : m_C)$, mille korral $m_A + m_B + m_C = 1$; niisuguseid koordinaate nimetame normaalujulisteks (normaliseerituteks).

Lihtne on mõista, et kolmnurga tippude barütsentrilisteks koordinaatideks (tema enda suhtes) sobivad $A(1 : 0 : 0)$, $B(0 : 1 : 0)$ ja $C(0 : 0 : 1)$.

Olgu kolmnurga ABC tippude A, B, C vastas asuvate külgede pikkused vastavalt a, b, c. Saab näidata, et selle kolmnurga siseringjoone keskpunkti I barütsentrilised koordinaadid (selle kolmnurga enda suhtes) on $(a : b : c)$ ning külge BC puutuva külgringjoone keskpunkti I_A koordinaadid on $(-a : b : c)$. Nurgapoolitaja omaduse põhjal teame, et $\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{c}{a}$. Kui rakendada tippudesse A ja C vastavalt punktmassid a ja c, jääb kang AC toetuspunktiga E kangi reegli põhjal tasakaalu, sest

$$a \cdot |AE| = c \cdot |EC| \,.$$

Niisiis sobivad punkti E barütsentrilisteks koordinaatideks $(a : 0 : c)$; analoogiliselt saame ka $F(a : b : 0)$. Selles lõigus toodud esituste lihtsus on peamine põhjus, miks barütsentrilised koordinaadid antud ülesande lahendamiseks sobivad.

Lisaks läheb meil veel vaja teadmist, et läbi punktide $P(m_A : m_B : m_C)$ ja $Q(n_A : n_B : n_C)$ tõmmatud sirge võrrand barütsentrilistes koordinaatides on

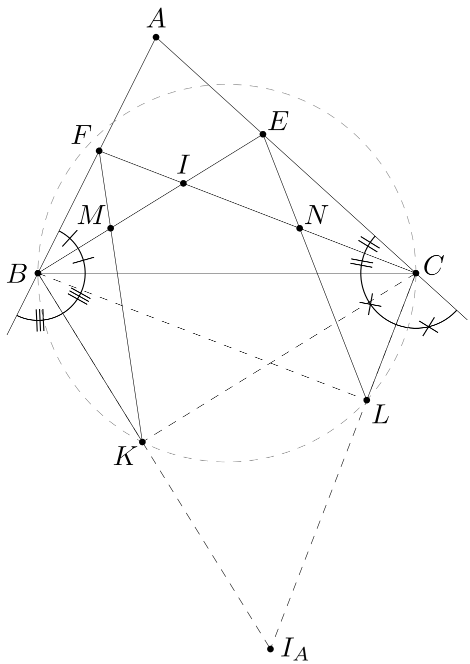
$$\begin{vmatrix} m_A & m_B & m_C \\ n_A & n_B & n_C \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

ning et lõigu PQ keskpunkti barütsentrilised koordinaadid on

$$\left(\frac{m_A + n_A}{2} : \frac{m_B + n_B}{2} : \frac{m_C + n_C}{2} \right)$$

(viimane väide kehtib eeldusel, et P ja Q koordinaadid on normaliseeritud) [1, 5].

Nüüd oleme valmis ülesande lahendamise juurde asuma. Järgnevas tõestame, et $\angle BKC = 90°$; võrduse $\angle BLC = 90°$ tõestus on analoogiline.



Kolmnurga sama tipu juurest tõmmatud sise- ja välisnurga poolitajad on risti, seega $BE \perp BK$, mistõttu piisab näidata, et $BE \parallel KC$. Leiame kõigepealt sirge BE barütsentrilise võrrandi:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$cx - az = 0\,.$$

Järgmiseks leiame lõigu BI keskpunkti M koordinaadid. Punkti $B(0:1:0)$ koordinaadid on juba normaalkujul, aga punkti I koordinaate peame teisendama:

$$(a:b:c) = \left(\frac{a}{a+b+c} : \frac{b}{a+b+c} : \frac{c}{a+b+c}\right)\,.$$

Nüüd saame punkti M koordinaadid avaldada kujul

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\left(0+\frac{a}{a+b+c}\right) : \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{b}{a+b+c}\right) : \frac{1}{2}\cdot\left(0+\frac{c}{a+b+c}\right)\right) =$$
$$= \left(\frac{a}{2(a+b+c)} : \frac{a+2b+c}{2(a+b+c)} : \frac{c}{2(a+b+c)}\right) = (a : a+2b+c : c)\,.$$

Sirge FM barütsentriline võrrand on seega

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & a+2b+c & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$a(a+2b+c)z + bcx - abz - acy = 0\,,$$

$$bcx - acy + a(a+b+c)z = 0\,.$$

Nurga ABC välisnurga poolitaja on sirge BI_A barütsentrilise võrrandiga

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$cx + az = 0\,.$$

K on sirgete FM ja BI_A lõikepunkt, seega tema koordinaatide leidmiseks peame lahendama võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} bcx - acy + a(a+b+c)z = 0 \\ cx + az = 0 \end{cases}.$$

Süsteemi teise võrrandi lahendid saab esitada parameetrilisel kujul $x = ta$, $z = t(-c)$. Nende väärtuste esimesse võrrandisse asendamine annab

$$bcta - acy + a(a+b+c)t(-c) = 0\,,$$

$$tb - y - t(a+b+c) = 0\,,$$

$$y = t(-a-c)\,.$$

Niisiis sobivad punkti K barütsentrilisteks koordinaatideks

$$(ta : t(-a-c) : t(-c)) = (-a : a+c : c)$$

ja sirge KC võrrand on järelikult

$$\begin{vmatrix} -a & a+c & c \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$(a+c)x + ay = 0\,.$$

Uurime sirgete BE ja KC lõikumist. Selleks lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} cx - az = 0 \\ (a+c)x + ay = 0 \end{cases}.$$

Süsteemi esimese võrrandi lahend parameetrilisel kujul on $x = ta$, $z = tc$. Asendades $x = ta$ teise võrrandisse, saame

$$(a+c)ta + ay = 0\,,$$

$$y = t(-a-c)\,.$$

Niisiis on otsitava lõikepunkti barütsentrilised koordinaadid

$$(ta : t(-a-c) : tc) = (a : -a-c : c)\,.$$

Kuivõrd $a + (-a-c) + c = 0$, ei vasta aga neile koordinaatidele ühtki tasandi punkti, mistõttu sirged BE ja KC peavad olema paralleelsed.

Kuigi põhjalikult lahti kirjutatuna on see lahendus mõnevõrra pikem kui žürii oma, ei sõltu ta kavalast lisakonstruktsioonist ning on seetõttu lihtsamini leitav. Kõikide lahenduses esinevate punktide koordinaadid ja sirgete võrrandid on samuti väga lihtsad. Lahenduse raskuseks on loomulikult tuginemine barütsentrilistele koordinaatidele, mis jäävad kooliprogrammist kaugele välja.

