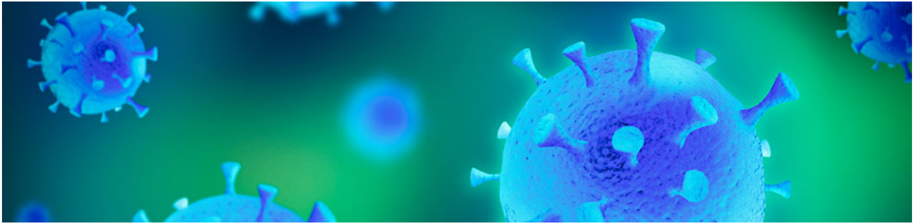


Epideemia leviku matemaatilisest modelleerimisest

Urve Kangro

Tartu Ülikool

17. Eesti matemaatika päevad
Seedri puhketalu
17. august 2020

Matemaatiline modelleerimine

Mudel on mingi reaalse süsteemi või protsessi mistahes esitus või lihtsustus. Mudel on meie arusaam sellest, kuidas mingid protsessid toimuvad.

Modelleerimine on teadus mudelite koostamisest ja analüüsist.

Matemaatiline mudel on mudel, mis on koostatud kasutades matemaatilisi mõisteid, nagu funktsioonid, võrrandid, võrratused, graafid.

Matemaatiline modelleerimine

Mudel on mingi reaalse süsteemi või protsessi mistahes esitus või lihtsustus. Mudel on meie arusaam sellest, kuidas mingid protsessid toimuvad.

Modelleerimine on teadus mudelite koostamisest ja analüüsist.

Matemaatiline mudel on mudel, mis on koostatud kasutades matemaatilisi mõisteid, nagu funktsioonid, võrrandid, võrratused, graafid.

Mudeli koostamine

- Reaalsed sündmused, vaatlustulemused.
- Põhimuutujad, meid huvitavad suurused.
- Seosed põhimuutujate vahel.
- Mudeli omaduste uurimine: kas kõik muutujad on määratud, võimalikud vastuolud, mudeli käitumine parameetrite muutumisel.
- Arvutused.
- Optimiseerimine, optimaalne juhtimine.
- Mudeli kontroll ja täiustamine.
- Tulemused, kokkuvõtted, ennustused.

Epideemia leviku mudelid

Populatsioon (riigi, linna, ühe kooli , ettevõtte rahvastik) jagatakse rühmadeks (haigusele vastuvõtlikud, haigustekitajaga kokkupuutunud, haiged, haiglasolijad, tervekssaanud, immuunsed).

Kasutatakse erinevaid klassijaotusi ning uuritakse rühmade suuruse muutumist ajas.

Eesmärgid:

- Mõista, kuidas epideemia levib.
- Ennustada, kui palju on mingil ajamomendil haigeid, kui palju on vaja haiglakohti ja intensiivravi kohti.
- Epideemia leviku kontrollimine (karantiin, vaktsineerimine, avalike ürituste keelamine, koolide sulgemine, riigipiiride sulgemine jms.).

SIR mudel

Klassid:

- S — terved, haigusele vastuvõtlikud inimesed (*susceptible*)
- I — nakatunud, haiged (*infectious*)
- R — paranenud, immuunsed (*recovered*)

N – kogu populatsiooni suurus, $N = S + I + R$

SIR mudel

Klassid:

- S — terved, haigusele vastuvõtlikud inimesed (*susceptible*)
- I — nakatunud, haiged (*infectious*)
- R — paranenud, immuunsed (*recovered*)

N – kogu populatsiooni suurus, $N = S + I + R$

Ühe terve inimese nakatumise tõenäosus ajaühikus (päevas):

kontaktide arv	$\times$	tõenäosus, et kontakt oli nakatunud	$\times$	tõenäosus, et nakatunuga kohtudes nakatub
m	$\times$	$\frac{I}{N}$	$\times$	p

SIR mudel

Klassid:

- S — terved, haigusele vastuvõtlikud inimesed (*susceptible*)
- I — nakatunud, haiged (*infectious*)
- R — paranenud, immuunsed (*recovered*)

N – kogu populatsiooni suurus, $N = S + I + R$

Ühe terve inimese nakatumise tõenäosus ajaühikus (päevas):

kontaktide arv	$\times$	tõenäosus, et kontakt oli nakatunud	$\times$	tõenäosus, et nakatunuga kohtudes nakatub
m	$\times$	$\frac{I}{N}$	$\times$	p

$\beta = mp$, γ — tervekssaamise kiirus (keskmine haige oldud päevade arv $\frac{1}{\gamma}$)

$$S' = -\beta \frac{SI}{N}$$

$$I' = \beta \frac{SI}{N} - \gamma I$$

$$R' = \gamma I$$

$$\boxed{S} \xrightarrow{\beta I/N} \boxed{I} \xrightarrow{\gamma} \boxed{R}$$

SIR mudeli analüüs

$$
\begin{aligned}
S' &= -\beta \frac{SI}{N}, & S(0) &= S_0, \\
I' &= \beta \frac{SI}{N} - \gamma I, & I(0) &= I_0, \\
R' &= \gamma I, & R(0) &= R_0.
\end{aligned}
$$

Tähelepanekud:

- $S + I + R = const$; eeldame, et $S + I + R = N$.
- Kui $I_0 = 0$, siis $S(t) \equiv S_0$, $I(t) \equiv 0$, $R(t) \equiv R_0$.
- Kui $S_0 > 0$, $I_0 > 0$, $R_0 \geq 0$, siis S kahaneb, kuid jääb alati positiivseks, seega leidub piirväärtus $S_\infty = \lim_{t\to\infty} S(t)$. Samuti leidub piirväärtus $R_\infty = \lim_{t\to\infty} R(t)$.
- Kui $\frac{S}{N} > \frac{\gamma}{\beta}$, siis I kasvab; kui $\frac{S}{N} < \frac{\gamma}{\beta}$, siis I kahaneb.
- Kui $t \to \infty$, siis $I(t) \to 0$.

Nakatumiskordaja

$$
\begin{aligned}
S' &= -\beta\frac{SI}{N}, & S(0) &= S_0,\\
I' &= \beta\frac{SI}{N} - \gamma I, & I(0) &= I_0.
\end{aligned}
$$

$\beta = pm$ väljendab seda, mitut inimest üks haige ühe päeva jooksul nakatab, $\frac{1}{\gamma}$ on keskmine ühe inimese haiguspäevade arv.

Seega üks haige inimene nakatab keskmiselt $r = \frac{\beta}{\gamma}$ inimest (kui $S \approx N$).

Nakatumiskordaja

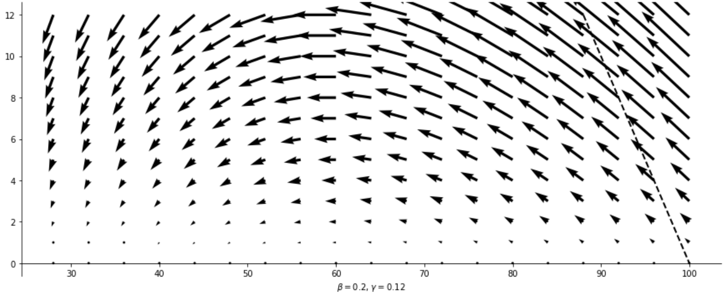
$$S' = -\beta\frac{SI}{N}, \qquad S(0) = S_0,$$
$$I' = \beta\frac{SI}{N} - \gamma I, \qquad I(0) = I_0.$$

$\beta = pm$ väljendab seda, mitut inimest üks haige ühe päeva jooksul nakatab, $\frac{1}{\gamma}$ on keskmine ühe inimese haiguspäevade arv.

Seega üks haige inimene nakatab keskmiselt $r = \frac{\beta}{\gamma}$ inimest (kui $S \approx N$).

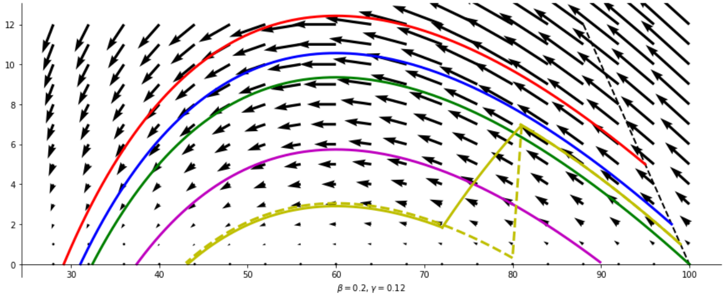
Kui $S > \frac{N}{r}$, siis I kasvab; kui $S < \frac{N}{r}$, siis I kahaneb.
Kui $S \approx N$, siis $r > 1$ korral epideemia laieneb, $r < 1$ korral epideemia hääbub.

$$S' = -\beta \frac{SI}{N}, \qquad S(0) = S_0,$$
$$I' = \beta \frac{SI}{N} - \gamma I, \qquad I(0) = I_0.$$



SIR mudeli faasiportree

$$S' = -\beta \frac{SI}{N}, \qquad S(0) = S_0,$$
$$I' = \beta \frac{SI}{N} - \gamma I, \qquad I(0) = I_0.$$



Kollane lahend vastab eriolukorrale: 30 päeva pärast eriolukord, kus $\beta' = \beta/2$ ja $\beta'' = \beta/10$; 60 päeva pärast taastub esialgne olukord. Lilla: epideemia alguses on 10% immuunsed.

Mis juhtub pika aja jooksul?

$$S' = -\beta \frac{SI}{N} \qquad \Rightarrow S(t) = S_0 e^{-\frac{\beta}{N}\int_0^t I(\tau)d\tau}$$

$$I' = \beta \frac{SI}{N} - \gamma I$$

$$R' = \gamma I \qquad \Rightarrow R(t) = R_0 + \gamma \int_0^t I(\tau)d\tau$$

Kui $R_0 = 0$, siis $S(t) = S_0 e^{-r\frac{R(t)}{N}}$.

Mis juhtub pika aja jooksul?

$$S' = -\beta \frac{SI}{N} \qquad \Rightarrow S(t) = S_0 e^{-\frac{\beta}{N}\int_0^t I(\tau)d\tau}$$

$$I' = \beta \frac{SI}{N} - \gamma I$$

$$R' = \gamma I \qquad \Rightarrow R(t) = R_0 + \gamma \int_0^t I(\tau)d\tau$$

Kui $R_0 = 0$, siis $S(t) = S_0 e^{-r\frac{R(t)}{N}}$.

Kui $t \to \infty$, siis $I(t) \to 0$ ja $S_\infty + R_\infty = N$. Seega $N - R_\infty = S_0 e^{-r\frac{R_\infty}{N}}$.

Mis juhtub pika aja jooksul?

$$S' = -\beta \frac{SI}{N} \qquad \Rightarrow S(t) = S_0 e^{-\frac{\beta}{N}\int_0^t I(\tau)d\tau}$$

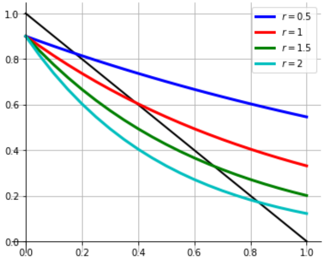
$$I' = \beta \frac{SI}{N} - \gamma I$$

$$R' = \gamma I \qquad \Rightarrow R(t) = R_0 + \gamma \int_0^t I(\tau)d\tau$$

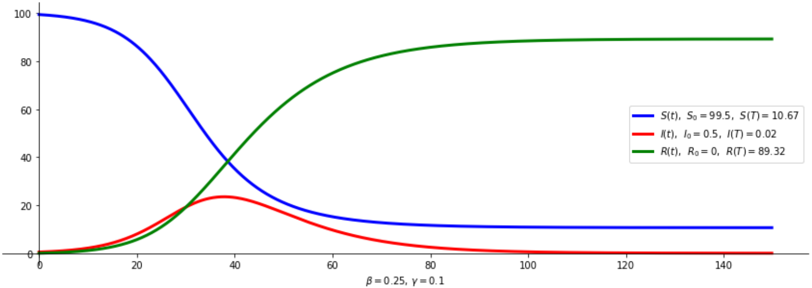
Kui $R_0 = 0$, siis $S(t) = S_0 e^{-r\frac{R(t)}{N}}$.

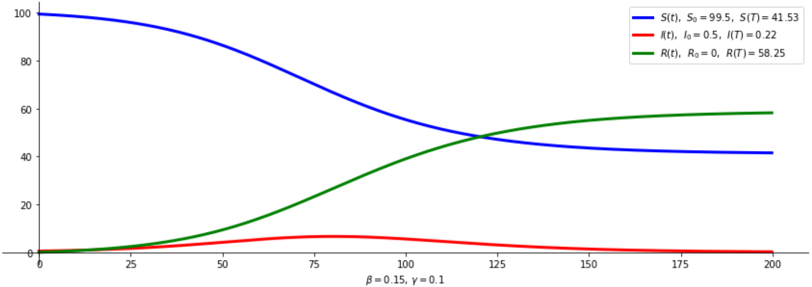
Kui $t \to \infty$, siis $I(t) \to 0$ ja $S_\infty + R_\infty = N$. Seega $N - R_\infty = S_0 e^{-r\frac{R_\infty}{N}}$.

Tähistame $x = \frac{R_\infty}{N}$ ja $s_0 = \frac{S_0}{N}$. Siis $1 - x = s_0 e^{-rx}$. Võrrandil on täpselt üks lahend $x \in (0, 1)$, see on immuunsuse saavutanute osakaalu piirväärtus, kui $t \to \infty$.

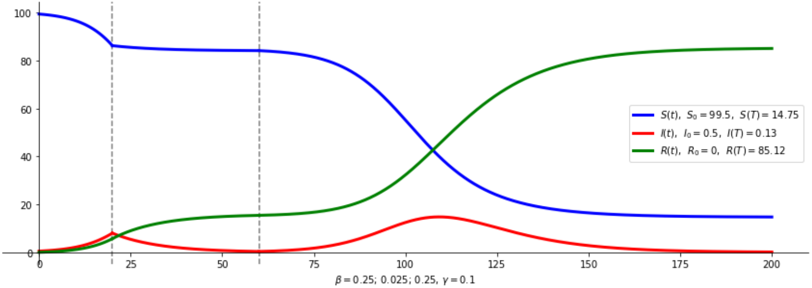


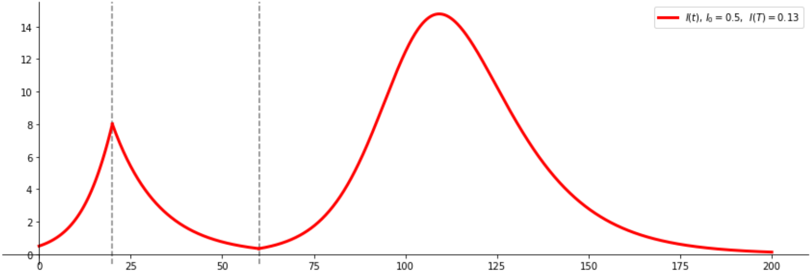
Mõned lahendid



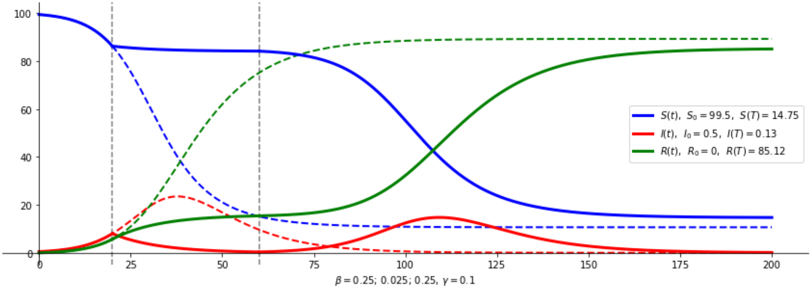


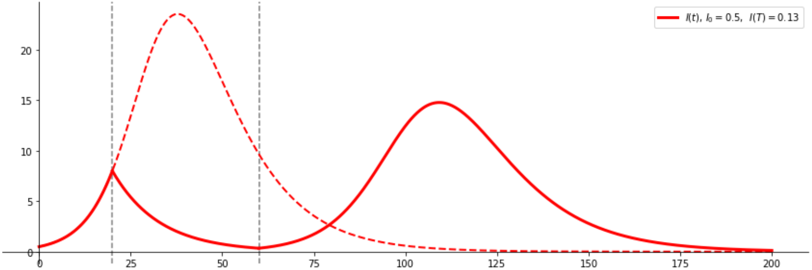
Eriolukorra mõju





Erioluorra mõju





SEIR mudel

Klassid:

- S — terved, haigusele vastuvõtlikud inimesed (*susceptible*)
- E — nakatunud, aga veel teisi ei nakata (*exposed*)
- I — nakatunud, haiged (*infectious*)
- R — paranenud, immuunsed (*recovered*)

$$S + E + I + R = N$$

SEIR mudel

Klassid:

- S — terved, haigusele vastuvõtlikud inimesed (*susceptible*)
- E — nakatunud, aga veel teisi ei nakata (*exposed*)
- I — nakatunud, haiged (*infectious*)
- R — paranenud, immuunsed (*recovered*)

$$S + E + I + R = N$$

$$S' = -\beta \frac{SI}{N}$$

$$E' = \beta \frac{SI}{N} - \mu E$$

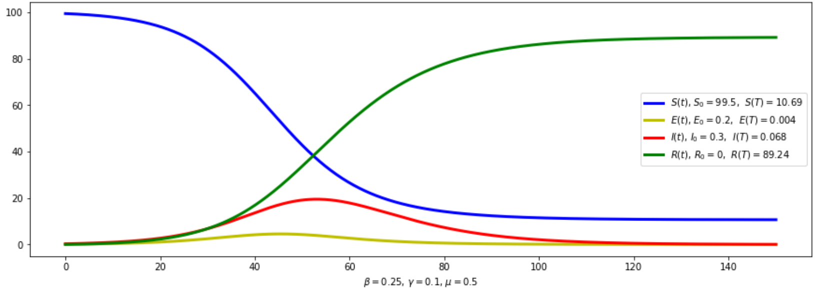
$$I' = \mu E - \gamma I$$

$$R' = \gamma I$$

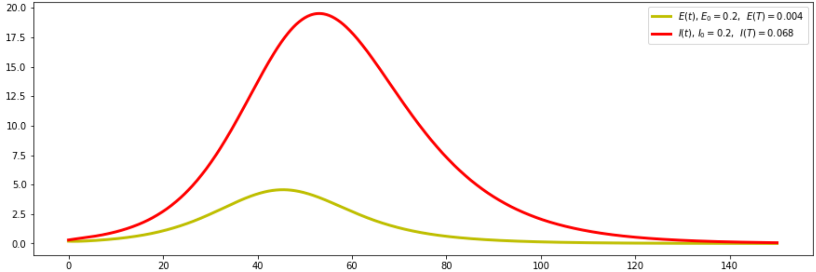
$$\boxed{S} \xrightarrow{\beta I/N} \boxed{E} \xrightarrow{\mu} \boxed{I} \xrightarrow{\gamma} \boxed{R}$$

Nakatamiskordaja $r = \dfrac{\beta}{\gamma}$ (üks haige inimene nakatab keskmiselt r inimest).

Üks lahend

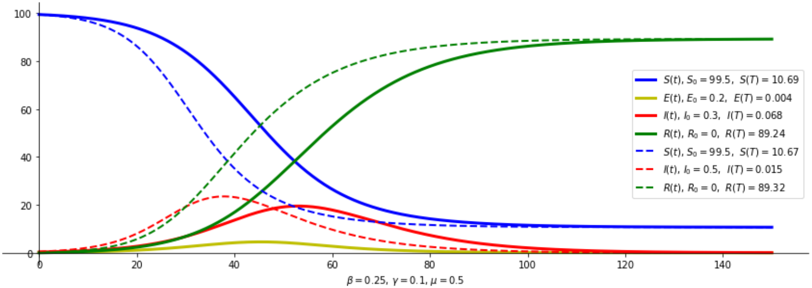


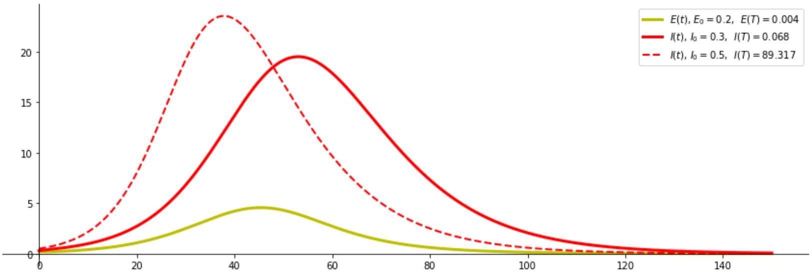
$S(t),\ S_0 = 99.5,\ \ S(T) = 10.69$
$E(t),\ E_0 = 0.2,\ \ E(T) = 0.004$
$I(t),\ I_0 = 0.3,\ \ I(T) = 0.068$
$R(t),\ R_0 = 0,\ \ R(T) = 89.24$
$\beta = 0.25,\ \gamma = 0.1,\ \mu = 0.5$



$E(t),\ E_0 = 0.2,\ \ E(T) = 0.004$
$I(t),\ I_0 = 0.2,\ \ I(T) = 0.068$

Üks lahend, võrdlus SIR mudeliga





SEAIHRD mudel

Klassid:

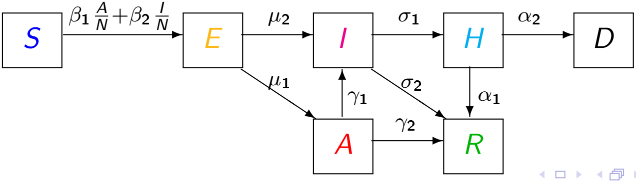
- S — terved, haigusele vastuvõtlikud inimesed (*susceptible*)
- E — nakatunud, aga veel teisi ei nakata (*exposed*)
- A — nakatunud, sümptomiteta (*asymptomatic*)
- I — nakatunud, haiged, testitud (*infectious*)
- H — haiglas (*hospitalized*)
- R — paranenud, immuunsed (*recovered*)
- D — surnud (epideemia tõttu) (*dead*)

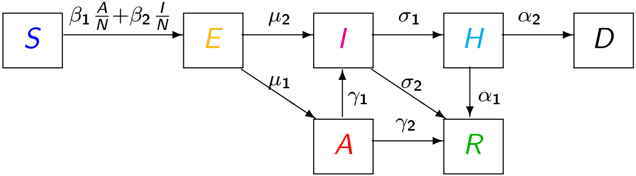
  $S + E + A + I + H + R + D = N$

Klassid:

- S — terved, haigusele vastuvõtlikud inimesed (*susceptible*)
- E — nakatunud, aga veel teisi ei nakata (*exposed*)
- A — nakatunud, sümptomiteta (*asymptomatic*)
- I — nakatunud, haiged, testitud (*infectious*)
- H — haiglas (*hospitalized*)
- R — paranenud, immuunsed (*recovered*)
- D — surnud (epideemia tõttu) (*dead*)

  $S + E + A + I + H + R + D = N$

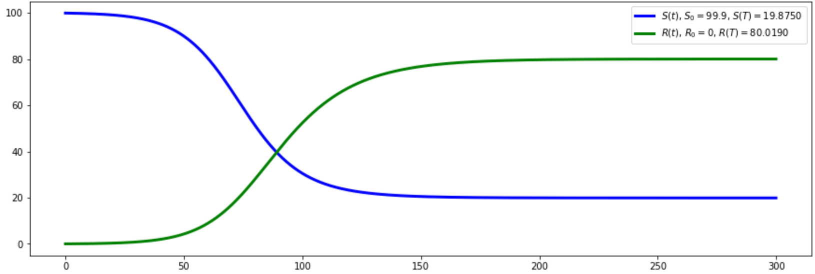


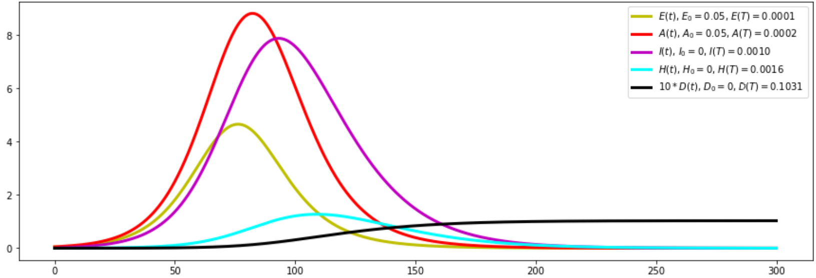


$$
\begin{aligned}
S' &= -\beta_1 \frac{SA}{N} - \beta_2 \frac{SI}{N} \\
E' &= \beta_1 \frac{SA}{N} + \beta_2 \frac{SI}{N} - (\mu_1 + \mu_2)E \\
A' &= \mu_1 E - (\gamma_1 + \gamma_2)A \\
I' &= \mu_2 E + \gamma_1 A - (\sigma_1 + \sigma_2)I \\
H' &= \sigma_1 I - (\alpha_1 + \alpha_2)H \\
R' &= \gamma_2 A + \sigma_2 I + \alpha_1 H \\
D' &= \alpha_2 H
\end{aligned}
$$

Nakatamiskordaja $r = \frac{\beta_1}{\gamma}\frac{\mu_1}{\mu} + \frac{\beta_2}{\sigma}\left(\frac{\mu_2}{\mu} + \frac{\gamma_1}{\gamma}\frac{\mu_1}{\mu}\right)$

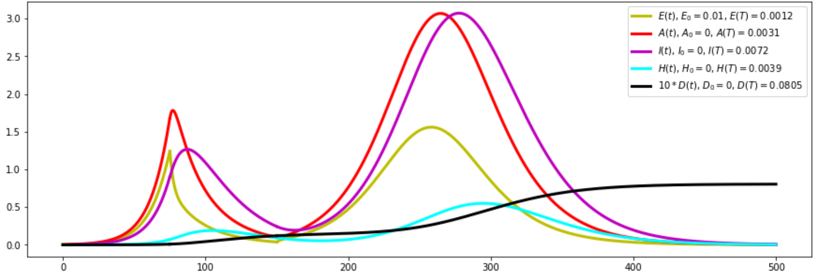
Üks lahend



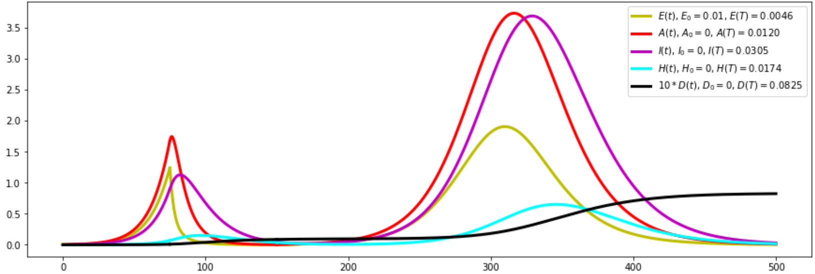


$\beta_1 = 0.3$, $\beta_2 = 0.03$, $\mu_1 = 0.3$, $\mu_2 = 0.03$, $\gamma_1 = 0.05$, $\gamma_2 = 0.1$, $\sigma_1 = 0.01$, $\sigma_2 = 0.05$, $\alpha_1 = 0.05$, $\alpha_2 = 0.001$

Eriolukorra mõju: leebem ja rangem

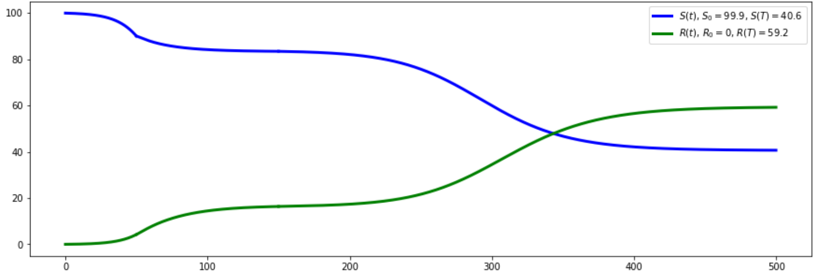


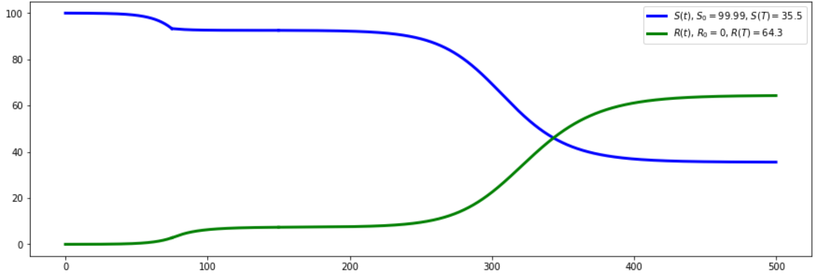
$\beta_1 = [0.3, 0.1, 0.25, \beta_2 = [0.03, 0.01, 0.025], T_1 = 75, T_2 = 150$
$\mu_1 = 0.3, \mu_2 = 0.03, \gamma_1 = 0.05, \gamma_2 = 0.1, \sigma_1 = 0.01, \sigma_2 = 0.05, \alpha_1 = 0.05, \alpha_2 = 0.001$



$\beta_1 = [0.3, 0.03, 0.25, \beta_2 = [0.03, 0.003, 0.025], T_1 = 75, T_2 = 150$
$\mu_1 = 0.3, \mu_2 = 0.03, \gamma_1 = 0.05, \gamma_2 = 0.1, \sigma_1 = 0.01, \sigma_2 = 0.05, \alpha_1 = 0.05, \alpha_2 = 0.001$

Eriolukorra mõju: leebem ja rangem





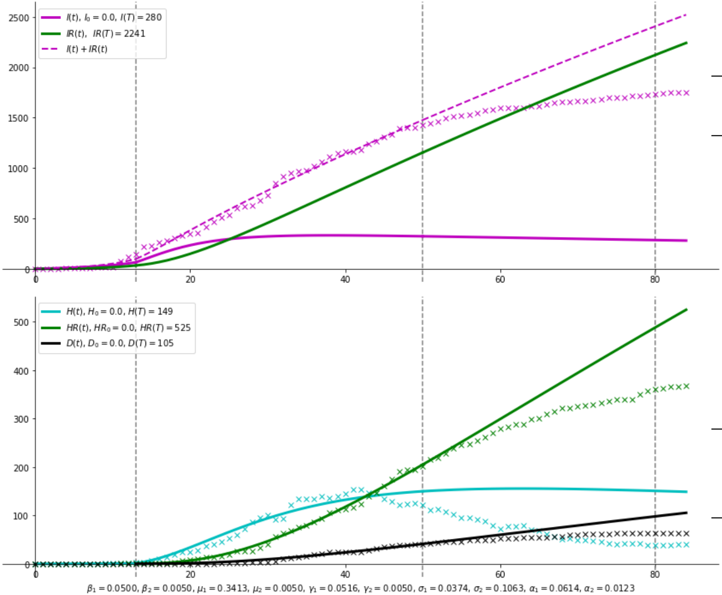
Parameetrite sobitamine Eesti andmetega

$$
\begin{aligned}
S' &= -\beta_1 \frac{SA}{N} - \beta_2 \frac{SI}{N} \\
E' &= \beta_1 \frac{SA}{N} + \beta_2 \frac{SI}{N} - (\mu_1 + \mu_2)E + e \\
A' &= \mu_1 E - (\gamma_1 + \gamma_2)A + a \\
I' &= \mu_2 E + \gamma_1 A - (\sigma_1 + \sigma_2)I + i \\
H' &= \sigma_1 I - (\alpha_1 + \alpha_2)H \\
R' &= \gamma_2 A + \sigma_2 I + \alpha_1 H \\
D' &= \alpha_2 H
\end{aligned}
$$

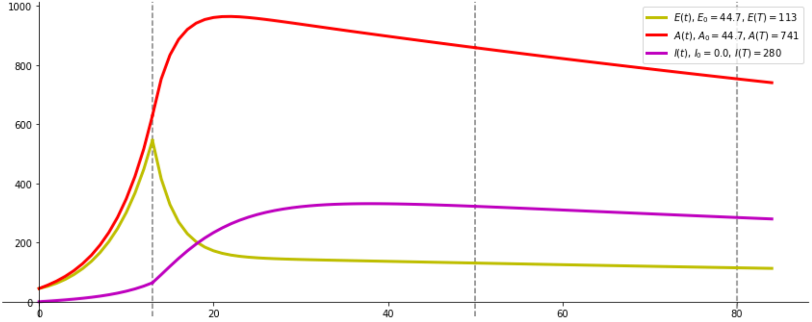
- Välismõjude arvessevõtmine.
- E ja A kohta info puudub.
- Jagame R kolmeks osaks: $R = R_A + R_I + R_H$.
- Andmed on olemas $I + R_I$, H, R_H ja D kohta.
- Parameetrid $\beta_1, \beta_2, \mu_1, \mu_2, \gamma_1, \gamma_2, \sigma_1, \sigma_2, \alpha_1, \alpha_2$, samuti e, a ja i.
- Algtingimused: ei tea E_0 ja A_0, teame I_0, eeldame, et $H_0 = R_0 = D_0 = 0$.

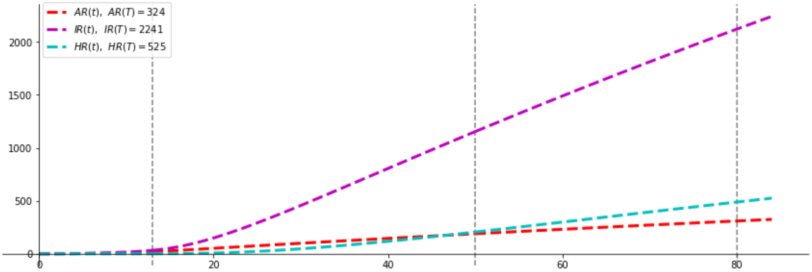
Leiame kõik vabad muutujad nii, et $(I + R_I - I_*)^2/10 + (H - H_*)^2 + (D - D_*)^2 + (R_H - R_{H*})^2$ oleks minimaalne.

Eesti andmed. Optimiseerimiseks kasutatud aeg enne eriolukorda: 0 . . . 13 ja eriolukorra ajal 14 . . . 50, edasine ennustatud.

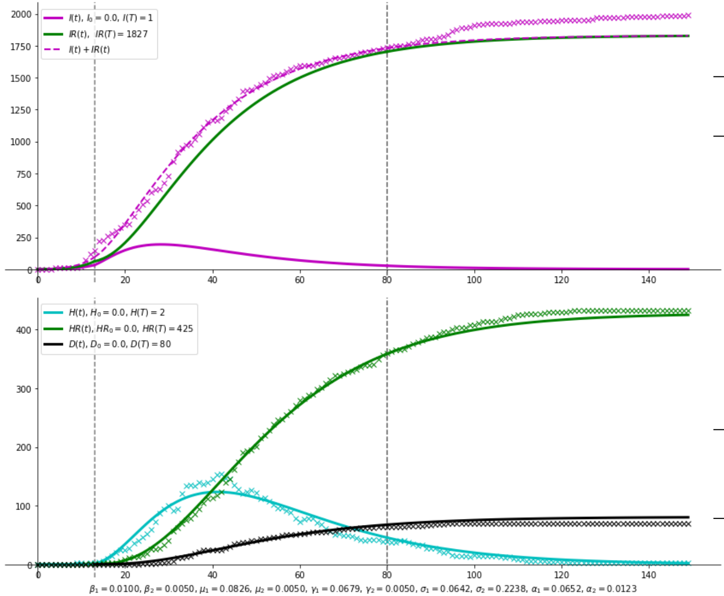


	enne	eri
E_0	44,7	
A_0	44,7	
β_1	0,401	0,05
β_2	0,042	0,005
μ_1	0,266	0,341
μ_2	0,006	0,005
γ_1	0,027	0,052
γ_2	0,007	0,005
σ_1	0,005	0,037
σ_2	0,116	0,106
α_1	0,061	sama
α_2	0,012	sama
e	0,45	0,22
a	0,45	0,22
i	0,45	0,22
r	11,8	0,896

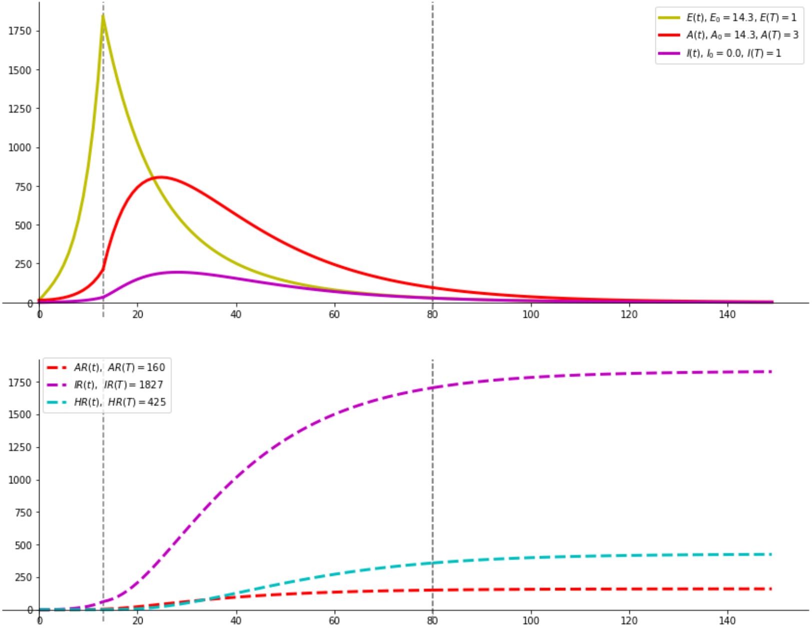

$E(t)$, $E_0 = 44.7$, $E(T) = 113$
$A(t)$, $A_0 = 44.7$, $A(T) = 741$
$I(t)$, $I_0 = 0.0$, $I(T) = 280$


$AR(t)$, $AR(T) = 324$
$IR(t)$, $IR(T) = 2241$
$HR(t)$, $HR(T) = 525$

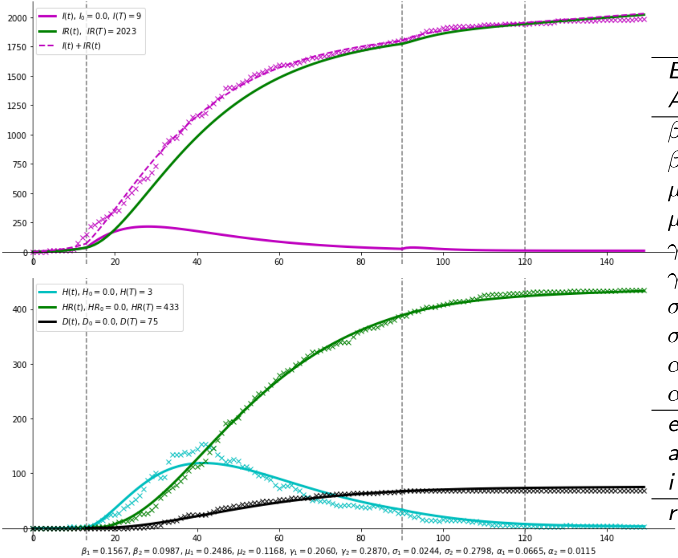
Eesti andmed. Optimiseerimiseks kasutatud aeg enne eriolukorda: $0 \ldots 13$ ja eriolukorra ajal $14 \ldots 80$, ennustatud kuni $T = 150$ (juuli lõpp).



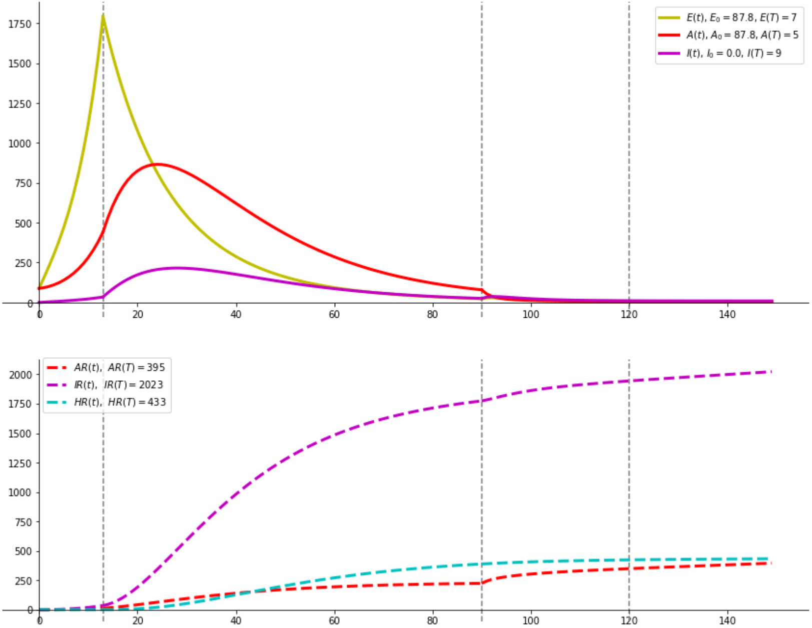
	enne	eri
E_0	14,3	
A_0	14,3	
β_1	2,5	0,01
β_2	0,115	0,005
μ_1	0,03	0,008
μ_2	0,012	0,005
γ_1	0,01	0,068
γ_2	0,005	0,005
σ_1	0,005	0,064
σ_2	0,5	0,224
α_1	0,065	sama
α_2	0,012	sama
e	0,16	0
a	0,19	0
i	0,14	0
r	119	0,1


$E(t)$, $E_0 = 14.3$, $E(T) = 1$
$A(t)$, $A_0 = 14.3$, $A(T) = 3$
$I(t)$, $I_0 = 0.0$, $I(T) = 1$
$AR(t)$, $AR(T) = 160$
$IR(t)$, $IR(T) = 1827$
$HR(t)$, $HR(T) = 425$

Eesti andmed. Optimiseerimiseks kasutatud aeg enne eriolukorda: 0 . . . 13, eriolukorra ajal 14 . . . 90 ja pärast eriolukorda 90 . . . 120, ennustatud kuni $T = 150$ (juuli lõpp).

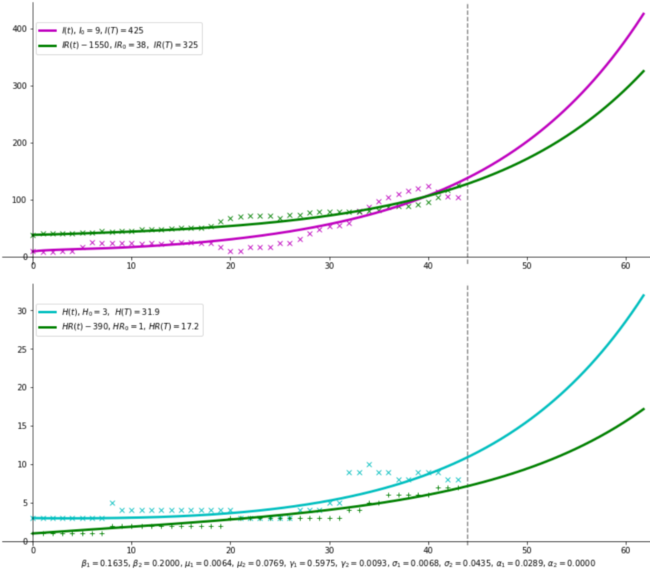


	enne	eri	pärast
E_0	88		
A_0	88		
β_1	0,807	0,005	0,157
β_2	0,04	0,005	0,099
μ_1	0,039	0,071	0,249
μ_2	0,005	0,005	0,117
γ_1	0,005	0,06	0,206
γ_2	0,005	0,006	0,287
σ_1	0,005	0,055	0,024
σ_2	0,199	0,196	0,28
α_1	0,067	sama	
α_2	0,012	sama	
e	0,88	0,33	0,88
a	0,88	0,31	0,87
i	0,84	0,46	0,88
r	71,6	0,09	0,413

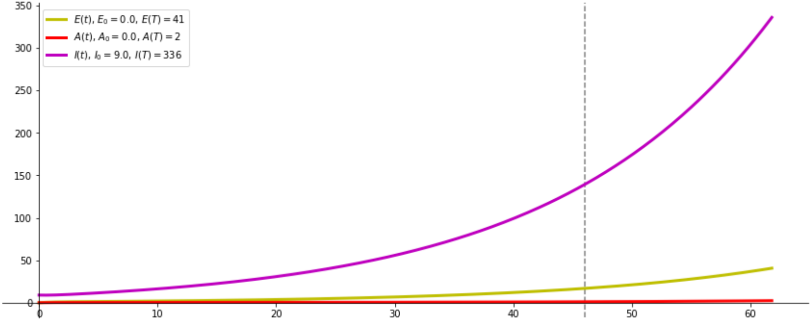


$E(t)$, $E_0 = 87.8$, $E(T) = 7$
$A(t)$, $A_0 = 87.8$, $A(T) = 5$
$I(t)$, $I_0 = 0.0$, $I(T) = 9$
$AR(t)$, $AR(T) = 395$
$IR(t)$, $IR(T) = 2023$
$HR(t)$, $HR(T) = 433$

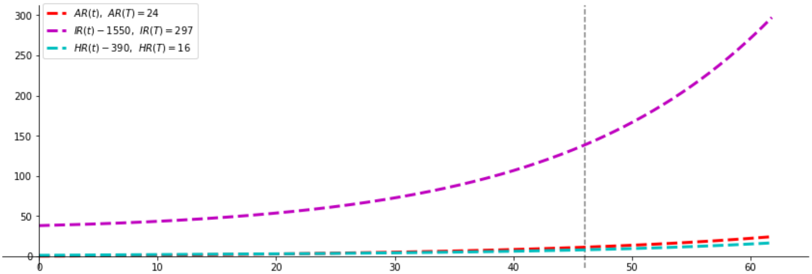
Kasutatud Postimehe blogi andmeid juuli—august, ennustatud kuni $T = 62$ (augusti lõpp).



	14.08	15.08	16.08
E_0	3,78	3,7	0
A_0	3,97	3,97	0
β_1	0,164	0,102	0,1
β_2	0,2	0,199	0,117
μ_1	0,006	0,132	0,08
μ_2	0,077	0,047	0,083
γ_1	0,598	1	0,9
γ_2	0,009	0,496	0,5
σ_1	0,007	0,007	0,007
σ_2	0,044	0,045	0,045
α_1	0,029	0,028	0,3
α_2	0	0	0
e	0	0	0
a	0	0	0,23
i	0	0	0,04
r	3,99	2,97	2,18

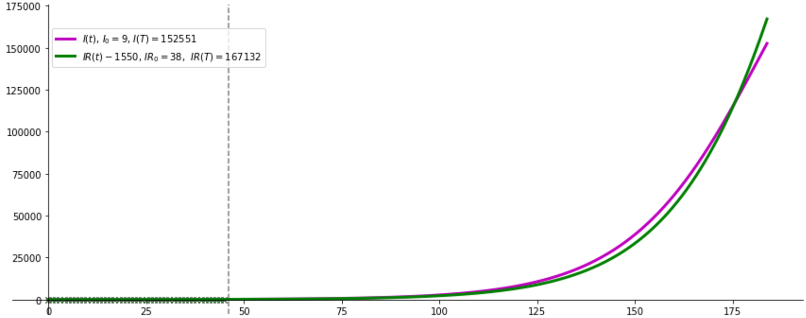


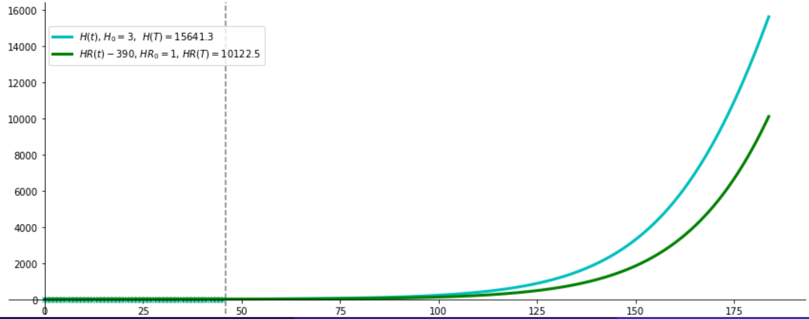
E(t), E_0 = 0.0, E(T) = 41
A(t), A_0 = 0.0, A(T) = 2
I(t), I_0 = 9.0, I(T) = 336
0
50
100
150
200
250
300
350
0
10
20
30
40
50
60

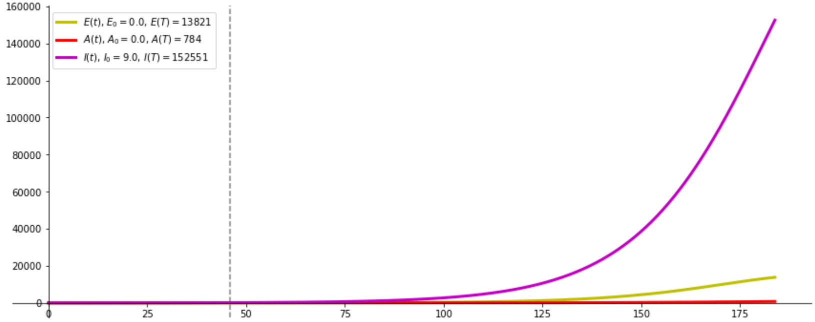


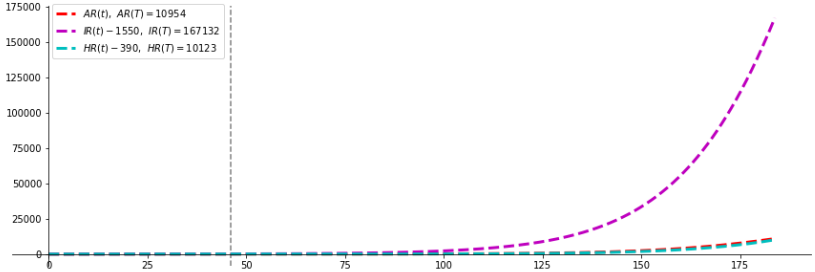
AR(t), AR(T) = 24
IR(t) − 1550, IR(T) = 297
HR(t) − 390, HR(T) = 16
0
50
100
150
200
250
300
0
10
20
30
40
50
60

Ennustus kuni $T = 184$ (aasta lõpp).

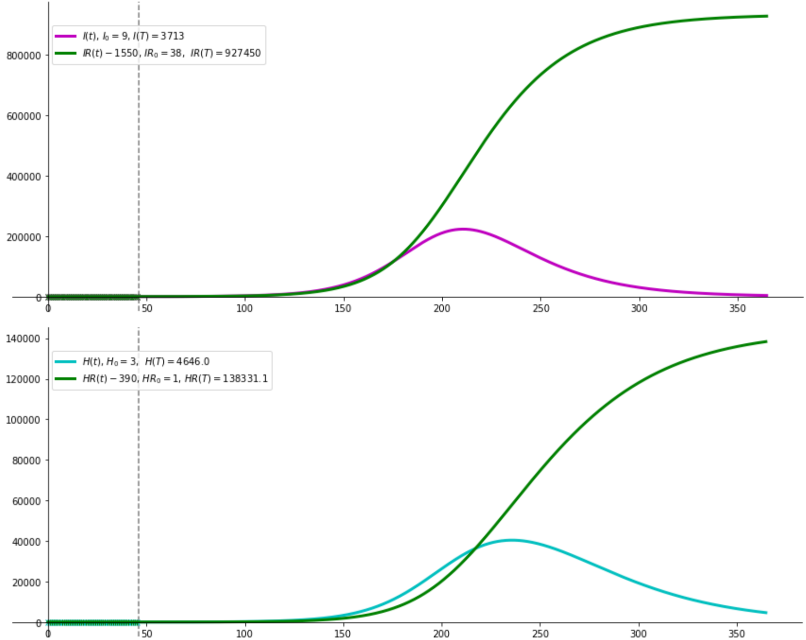


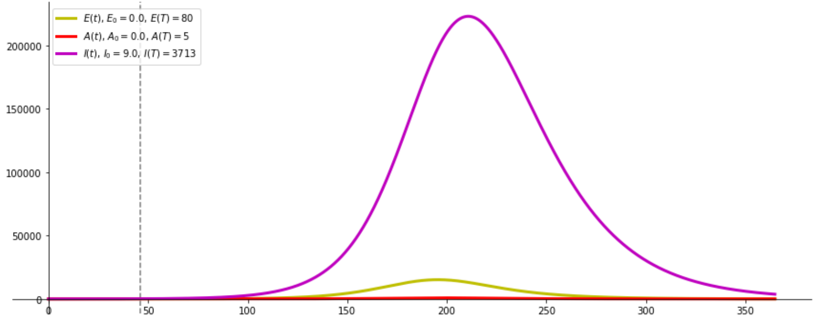


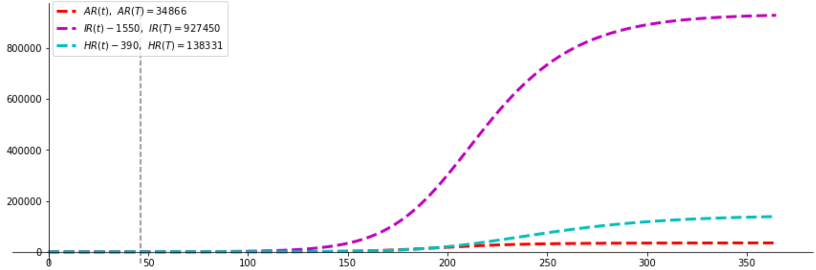

$E(t)$, $E_0 = 0.0$, $E(T) = 13821$
$A(t)$, $A_0 = 0.0$, $A(T) = 784$
$I(t)$, $I_0 = 9.0$, $I(T) = 152551$
160000
140000
120000
100000
80000
60000
40000
20000
0
0
25
50
75
100
125
150
175


$AR(t)$, $AR(T) = 10954$
$IR(t) - 1550$, $IR(T) = 167132$
$HR(t) - 390$, $HR(T) = 10123$
175000
150000
125000
100000
75000
50000
25000
0
0
25
50
75
100
125
150
175

Ennustus kuni $T = 365$ (juuni lõpp 2021).




E(t), E0 = 0.0, E(T) = 80
A(t), A0 = 0.0, A(T) = 5
I(t), I0 = 9.0, I(T) = 3713


AR(t), AR(T) = 34866
IR(t) − 1550, IR(T) = 927450
HR(t) − 390, HR(T) = 138331

SIR tüüpi mudelite puudused ja võimalikud täiendused

- Mitmed erinevad parameetrite komplektid võivad anda ligikaudu sama mõõdetava tulemuse.

SIR tüüpi mudelite puudused ja võimalikud täiendused

- Mitmed erinevad parameetrite komplektid võivad anda ligikaudu sama mõõdetava tulemuse.
- Kõik võivad kõiki nakatada võrdse tõenäosusega.
  Lahendus. Kasutada eri piirkondadele vastavaid klasse $S_1, S_2, S_3, \ldots$, $E_1, E_2, \ldots$, jne. ja lisada piirkondadevahelised seosed. Võib ka kasutada osatuletistega diferentsiaalvõrrandeid, et kirjeldada haigete ruumilist jaotust, nakkuse levik oleks siis sarnane difusiooniga.

SIR tüüpi mudelite puudused ja võimalikud täiendused

- Mitmed erinevad parameetrite komplektid võivad anda ligikaudu sama mõõdetava tulemuse.
- Kõik võivad kõiki nakatada võrdse tõenäosusega.
  Lahendus. Kasutada eri piirkondadele vastavaid klasse $S_1, S_2, S_3, \ldots$, $E_1, E_2, \ldots$, jne. ja lisada piirkondadevahelised seosed. Võib ka kasutada osatuletistega diferentsiaalvõrrandeid, et kirjeldada haigete ruumilist jaotust, nakkuse levik oleks siis sarnane difusiooniga.
- Muude mõjude puudumisel ühe klassi suurus kahaneb eksponentsiaalselt (näiteks kui keskmine haiglasoleku aeg oleks 10 päeva, siis saaks 1 päeva järel haiglast välja 9,5% haigetest; 100 päeva pärast oleks ikka veel haiglas 0,0045% haigetest).
  Lahendus 1. Kasutada nihkega diferentsiaalvõrrandeid või konvolutsiooni tüüpi integraaloperaatorit, et kirjeldada sõltuvust minevikust.
  Lahendus 2. Kasutada diferentsiaalvõrrandi asemel diferentsvõrrandeid sõltuvusega minevikust.

Diferentsvõrrandid: diskreetne SEAIHRD mudel

Ühe terve inimese nakatumise tõenäosus 1 päeva jooksul?

Olgu $A = 0$. Päevas m kontakti, tõenäosus, et ühel kontaktil kohtub nakatanuga, on I/N, tõenäosus nakatunuga kohtudes ise nakatuda olgu p.

Ühe terve inimese nakatumise tõenäosus 1 päeva jooksul?
Olgu $A = 0$. Päevas m kontakti, tõenäosus, et ühel kontaktil kohtub nakatanuga, on I/N, tõenäosus nakatunuga kohtudes ise nakatuda olgu p.

Tõenäosus mitte haigestuda ühel kontaktil on $1 - pI/N$.
Tõenäosus mitte haigestuda pärast m kontakti on $(1 - pI/N)^m$.
Tõenäosus haigestuda pärast m kontakti on $1 - (1 - pI/N)^m$.

Seega $S_{n+1} = S_n - S_n(1 - (1 - pI/N)^m) = S_n(1 - pI/N)^m$.

Seda võib lähendada $S_{n+1} \approx S_n(1 - pmI/N)$ või $S_{n+1} \approx S_n e^{-pmI/N}$.
Kui klassis I olevate inimeste kontaktide arvu vähendatakse k korda, siis I/N asemel on $I/(kN)$.

Ühe terve inimese nakatumise tõenäosus 1 päeva jooksul?

Olgu $A = 0$. Päevas m kontakti, tõenäosus, et ühel kontaktil kohtub nakatanuga, on I/N, tõenäosus nakatunuga kohtudes ise nakatuda olgu p.

Tõenäosus mitte haigestuda ühel kontaktil on $1 - pI/N$.
Tõenäosus mitte haigestuda pärast m kontakti on $(1 - pI/N)^m$.
Tõenäosus haigestuda pärast m kontakti on $1 - (1 - pI/N)^m$.

Seega $S_{n+1} = S_n - S_n(1 - (1 - pI/N)^m) = S_n(1 - pI/N)^m$.

Seda võib lähendada $S_{n+1} \approx S_n(1 - pmI/N)$ või $S_{n+1} \approx S_n e^{-pmI/N}$.
Kui klassis I olevate inimeste kontaktide arvu vähendatakse k korda, siis I/N asemel on $I/(kN)$.

Ühe terve inimese nakatumise tõenäosus 1 päeva jooksul?

Olgu $A = 0$. Päevas m kontakti, tõenäosus, et ühel kontaktil kohtub nakatanuga, on I/N, tõenäosus nakatunuga kohtudes ise nakatuda olgu p.

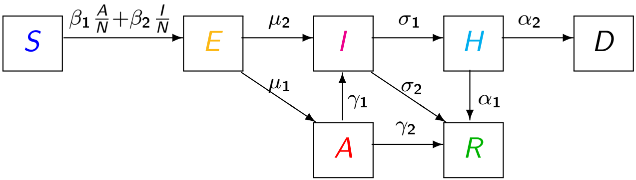
Tõenäosus mitte haigestuda ühel kontaktil on $1 - pI/N$.
Tõenäosus mitte haigestuda pärast m kontakti on $(1 - pI/N)^m$.
Tõenäosus haigestuda pärast m kontakti on $1 - (1 - pI/N)^m$.

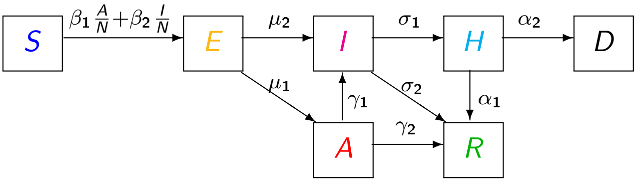
Seega $S_{n+1} = S_n - S_n(1 - (1 - pI/N)^m) = S_n(1 - pI/N)^m$.

Seda võib lähendada $S_{n+1} \approx S_n(1 - pmI/N)$ või $S_{n+1} \approx S_n e^{-pmI/N}$.
Kui klassis I olevate inimeste kontaktide arvu vähendatakse k korda, siis I/N asemel on $I/(kN)$.

Kui $A \neq 0$, siis tõenäosus ühel kontaktil nakatuda on $p_1 A/N + p_2 I/(kN)$.
Seega $S_{n+1} = S_n(1 - p_1 A/N - p_2 I/(kN))^m$.

Seda lähendame $S_{n+1} \approx S_n e^{-\beta_1 \frac{A_n}{N} - \beta_2 \frac{I_n}{N}}$, kus $\beta_1 = mp_1$ ja $\beta_2 = mp_2/k$.


S
$\beta_1 \frac{A}{N} + \beta_2 \frac{I}{N}$
E
μ_2
I
σ_1
H
α_2
D
μ_1
γ_1
σ_2
α_1
A
γ_2
R



Kuidas arvutada ühest klassist teise liikumist?
Näiteks $A \to I$: ühe päevaga liikus γ_{10} inimest, 2 päevaga γ_{11} inimest, ...

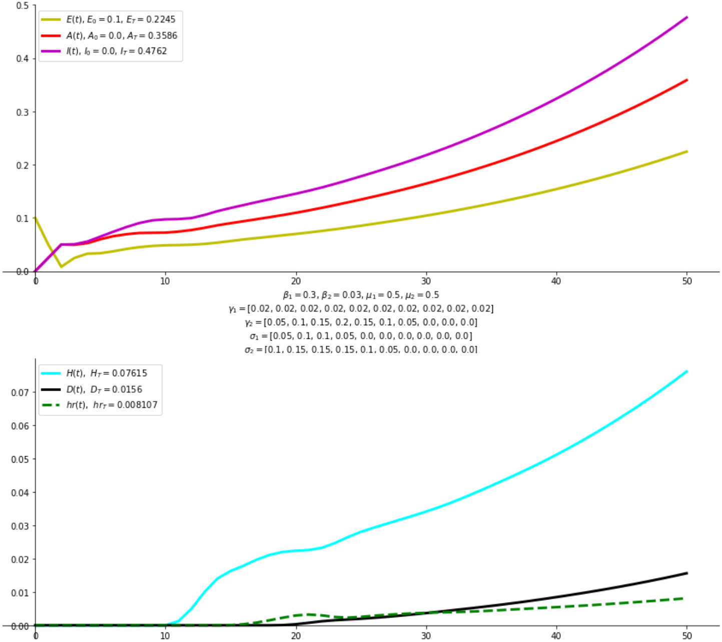
$$AI_{n+1} = \sum_{k=0}^{K} \gamma_{1k} EA_{n-k}, \quad AR_{n+1} = \sum_{k=0}^{K} \gamma_{2k} EA_{n-k},$$

kus $\sum_{k=0}^{K} (\gamma_{1k} + \gamma_{2k}) = 1.$

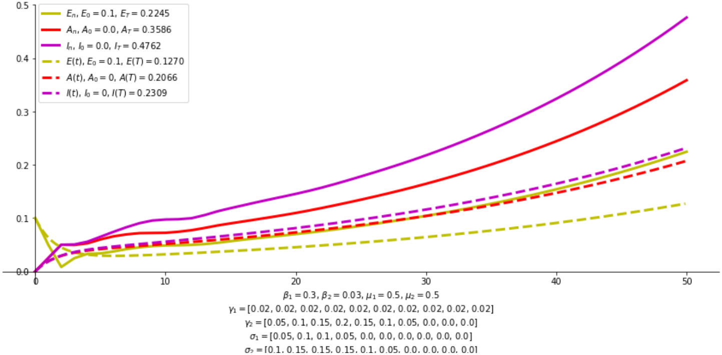
$$
\begin{aligned}
SE_{n+1} &= S_n\left(1 - e^{-\beta_1 \frac{A_n}{N} - \beta_2 \frac{I_n}{N}}\right), & S_{n+1} &= S_n - SE_{n+1},\\
EA_{n+1} &= \mu_1 SE_{n-1}, & EI_{n+1} &= \mu_2 SE_{n-1},\\
AI_{n+1} &= \sum_{k=0}^{K} \gamma_{1k} EA_{n-k}, & AR_{n+1} &= \sum_{k=0}^{K} \gamma_{2k} EA_{n-k},\\
IH_{n+1} &= \sum_{k=0}^{K} \sigma_{1k}(EI_{n-k} + AI_{n-k}), & IR_{n+1} &= \sum_{k=0}^{K} \sigma_{2k}(EI_{n-k} + AI_{n-k}),\\
HR_{n+1} &= \sum_{k=0}^{K} \alpha_{1k} IH_{n-k}, & HD_{n+1} &= \sum_{k=0}^{K} \alpha_{2k} IH_{n-k},
\end{aligned}
$$

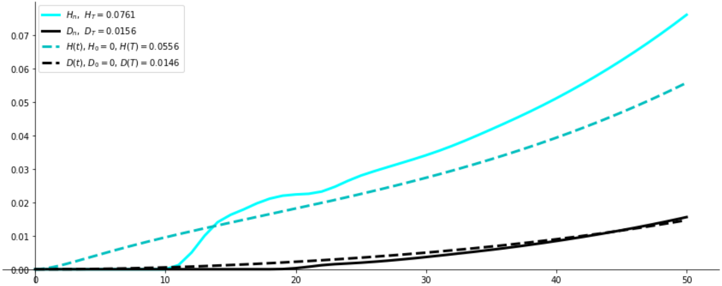
$$
\begin{aligned}
E_{n+1} &= E_n + SE_{n+1} - EA_{n+1} - EI_{n+1},\\
A_{n+1} &= A_n + EA_{n+1} - AI_{n+1} - AR_{n+1},\\
I_{n+1} &= I_n + EI_{n+1} + AI_{n+1} - IH_{n+1} - IR_{n+1},\\
H_{n+1} &= H_n + IH_{n+1} - HR_{n+1} - HD_{n+1},\\
R_{n+1} &= R_n + AR_{n+1} + IR_{n+1} + HR_{n+1},\\
D_{n+1} &= D_n + HD_{n+1}.
\end{aligned}
$$

Üks lahend

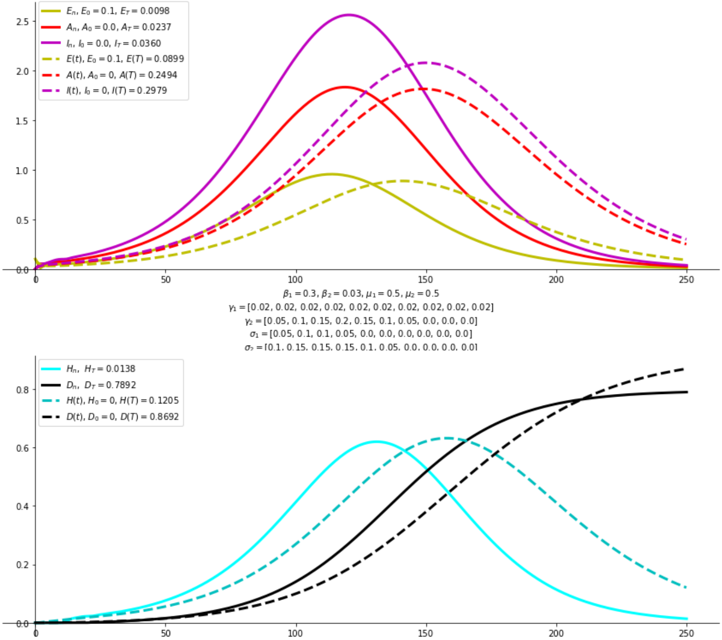

$E(t)$, $E_0 = 0.1$, $E_T = 0.2245$
$A(t)$, $A_0 = 0.0$, $A_T = 0.3586$
$I(t)$, $I_0 = 0.0$, $I_T = 0.4762$
$\beta_1 = 0.3$, $\beta_2 = 0.03$, $\mu_1 = 0.5$, $\mu_2 = 0.5$
$\gamma_1 = [0.02, 0.02, 0.02, 0.02, 0.02, 0.02, 0.02, 0.02, 0.02, 0.02]$
$\gamma_2 = [0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.15, 0.1, 0.05, 0.0, 0.0, 0.0]$
$\sigma_1 = [0.05, 0.1, 0.1, 0.05, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0]$
$\sigma_2 = [0.1, 0.15, 0.15, 0.15, 0.1, 0.05, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0]$
$H(t)$, $H_T = 0.07615$
$D(t)$, $D_T = 0.0156$
$hr(t)$, $hr_T = 0.008107$

Võrdlus vastava pideva SEAIHRD mudeliga.

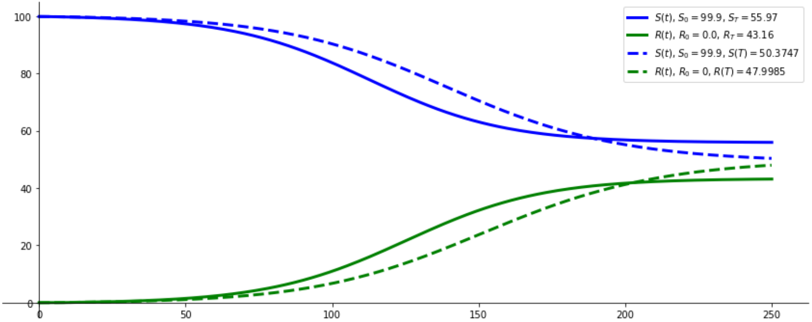




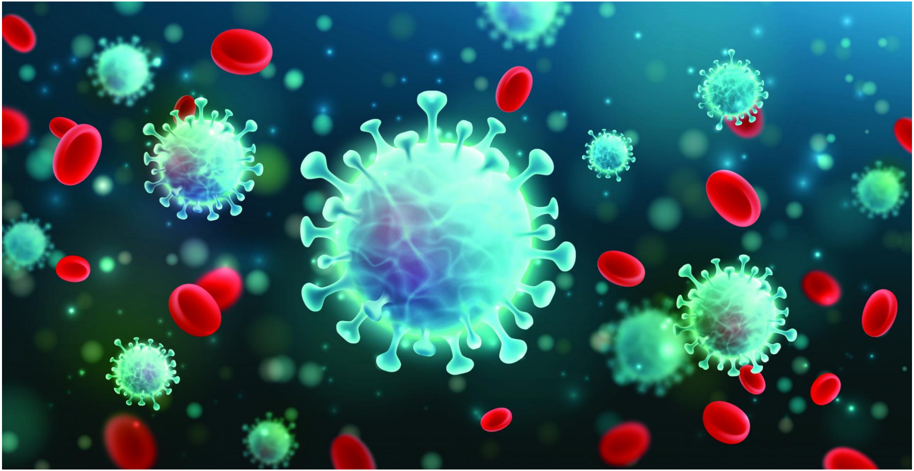
Sama, pikema ajaga ($T = 250$)



Sama, S ja R.



$S(t)$, $S_0 = 99.9$, $S_T = 55.97$
$R(t)$, $R_0 = 0.0$, $R_T = 43.16$
$S(t)$, $S_0 = 99.9$, $S(T) = 50.3747$
$R(t)$, $R_0 = 0$, $R(T) = 47.9985$
100
80
60
40
20
0
0
50
100
150
200
250



Tänan kuulamast!

Püsige terved!