

Reaalainete õppimise olulisus insenerikoolitusel

JAAK UMBORG¹, AGU EENSAAR², OKSANA LABANOVA², OLGA
OVTŠARENKO², VITALI RETŠNOI², ELENA SAFIULINA², ANNE UUKKIVI²

¹Eesti Lennuakadeemia, ²Tallinna Tehnikakõrgkool

Sissejuhatus

Käesolevas töös käsitletakse matemaatika, füüsika ja insenerigraafika õpetamist tulevastele inseneridele kõrgkoolis ja nende ainete integreerimise olulisust eriala ainetega. Kaasaja kiire tehnika ja tehnoloogia areng ning õpiaja vähendamine kõrgkoolis viimastel aastakümnetel seavad kõrgkoolile nõude, et õppeaega kasutatakse äärmiselt tõhusalt. See tingib nii uute efektiivsete didaktiliste meetodite kui ka vanemate, äraproovitud ja ennast õigustanud meetmete meelde tuletamist ja kasutamist tänapäeva tingimustes.

Eesti Vabariigis toimus kõrgkoolide üleminek 3+2 õppekavadele 2002/2003. õppeaastal, seega on õppejõududel tänaseks kogunenud küllaldaselt kogemusi ja tähelepanekuid ning teadusuuringute tulemusi, mis annavad ettekujutuse, kuidas haridusreform on ennast praktikas õigustanud ja millistele probleemidele peab enam tähelepanu pöörama. OSKA raportis [14] hariduse tuleviku üle arutledes valdkondlikud eksperdid rõhutavad loodus- ja täppisteaduste laialdase õpetamise olulisust kõigil haridustasemetel ning heal tasemel insenerihariduse kasvavat olulisust. Tuleviku hariduse olulisemateks märksõnadeks peaksid ekspertide hinnangul olema paindlikkus, loovus ja ettevõtlusoskuste arendus. Seega üliõpilaste loovust nõudvaid võimed, mis tagavad edu edaspidistes õpingutes magistri- ja doktoriõppes ning hilisemas kutsetöös, tuleb tõhusalt arendada kõrgkoolis.

Ülaltoodud probleemist lähtuvalt on antud töös püstitatud eesmärk selgitada reaalainete õpetamise ja erialaainetega integreerimise olulisust inseneride koolitamisel ning esitada soovitusi, kuidas kaasaja tingimustes tõhusamalt arendada tehniliste erialade üliõpilaste tehnilist mõtlemist, mida ühiskond ja tööandjad ootavad tulevaselt insenerilt.

Koolituse kvaliteedi määrab õppejõud

Tehnikavaldkonna suhtlemiskeelteks on kujunenud insenerigraafika ning matemaatika. Tehnilise mõtlemise protsessis on olulised kohal teoreetilised ja praktilised komponendid, mis tulenevad õppuri õppematerjali teoreetilise osa õppimisest ja sellega seotud praktilisest tegevusest. Seejuures on oluline, et praktiline tegevus peab toetama teooriaõppes läbitud õppesisu. Üliõpilastel on vaja arendada abstraktse ja kujundliku mõtlemise ühendamist. Selle saavutamisel on oluline osa matemaatikal ja selle keelel ning ruumilist ettekujutust arendataval matemaatika harul – kujutaval geomeetrial. Ruumiline ettekujutus võimaldab opereerida abstraktsete ja kujundlike mudelitega ning luua uusi konstruktsioone. Manipuleerides mõttes 3D mudelitega, saab tekitada juurde neljanda mõõtme – aja, mis võimaldab ette kujutada erinevaid protsesse muutuvast ajast [16].

Matemaatika keel sobib hästi teadusliku teabe kvantitatiivseks kirjeldamiseks ja töötlemiseks, olenemata selle sisust. Pealegi osutub matemaatiline formalism paljudel juhtudel ainsaks võimalikuks viisiks nähtuste ja protsesside füüsikaliste omaduste väljendamiseks, kuna nende loomulikud omadused ja eriti seosed pole otseselt jälgitavad. Näiteks, kuidas kirjeldada füüsikalistes terminites gravitatsiooni, elektromagnetismi mõju ja teisi sarnaseid nähtusi? Neid saab esitada vaid teatud arvuliste suhtarvudena seadustes, mis on fikseeritud kvantitatiivsete näitajatega. Skeemide ja algoritmide koostamine võimaldab andmete visualiseerimist.

Matemaatika aitab maailma kirjeldada nagu iga teinegi keel ning lubab seeläbi selle keele valdajatel omavahel suhelda ning kompaktselt suuremahulist informatsiooni vahetada. Erinevalt tavakeelest, kus sõna võib esineda kohati eri tähenduses, kirjeldab matemaatika objekte oluliselt täpsemalt ja seejuures üheselt mõistetavalt. Matemaatika aitab kirjeldada ja mõista meid ümbritsevat maailma. Füüsik Richard Feynman'i [3] sõnul on looduse kirjeldamiseks matemaatika valdamine möödapääsmatu. Matemaatiline bioloogia, matemaatiline füüsika ja teised matemaatikat otseselt kasutavad suunad pole tekkinud juhuslikult, vaid vajadusest kirjeldada meie ümber toimuvaid protsesse.

Matemaatika keel on väga sisutihe ja täpne. Näiteks, mistahes omaduse või mingi parameetri intensiivsuse väljendamiseks tavakeeles on vaja mitukümmend omadussõna. Kui aga selle väljendamiseks, võrdlemiseks või mõõtmiseks kasutatakse arve, on protseduur lihtsam. Koostades võrdluseks skaala või valides sobiva mõõtühiku, saab kõik suuruste vahelised seosed tõlkida täpsesse arvude keelde. Matemaatiliste mudelite (valemid, võrrandid, funktsioonid ja muud mõisted) abil on võimalik palju täpsemalt ja lühemalt väljendada kvantitatiivseid seoseid kõige erinevamate omaduste ja suhete vahel, mis iseloomustavad inseneerias uuritavaid protsesse.

Matemaatika keele elementideks on peamiselt märgid-sümbolid: matemaatilised terminid, arvud, matemaatiliste toimingute ja seoste märgid, märgid-kujutised (geomeetrilised kujundid, mudelid, graafikud, diagrammid, skeemid jne). Matemaatilist mõtlemist on võimatu arendada ilma matemaatilise keele ja kõne valdamiseta, seepärast on kõrgema matemaatika õpetamisel oluline osa tehnilise kõrgkooli õppekavades. Matemaatika tundmine tagab üliõpilastele paremad võimalused nii tehnilise mõtlemise arendamiseks kui kogu tunnetusprotsessi analüüsimiseks.

Insenerigraafika põhivahend on tehniline joonis, mis võimaldab informatsiooni visualiseerida – manipuleerida erikujuliste komponentidega, et anda infot objekti kohta, kasutades selleks vajalike mõõtmete ja tähistustega kujutisi. Visualiseeritud infot saab kasutada erinevate tehniliste ülesannete lahendamiseks – objekte muuta, projekteerida ja valmistada ning kogu tehnoloogilist protsessi arhiveerida. Tehniline joonis mängib olulist rolli info edastajana alates toote projekteerimisest kuni tootmiseni. Ta mitte ainult ei kirjelda objekti detailselt, vaid selgitab ka objekti valmistamise meetodeid ja nendes kasutatavaid tehnoloogiasid. Tehniline joonis on spetsialistide vahelise suhtluse kõige olulisem vahend ja dokument, seetõttu peab joonis olema koostatud vastavalt kehtivatele rahvusvahelistele standarditele (Joonis 1). Joonis on oluline didaktiline vahend tehnika õppimisel mistahes haridusastmel. Tulevane spetsialist vajab lisaks olulistele teoreetilistele teadmistele joonistele esitatavatest nõuetest ka jooniste lugemise, koostamise ja vormistamise praktilisi oskusi. Need oskused omandatakse kõrgkooli insenerigraafika



[Drawing sheet templates \(EN ISO 5457:1999\)](#)

[Title block, Lettering \(EN ISO 3098-1:2015\)](#)

[Drawing scales \(EN ISO 5455:1979\)](#)

[Graphic techniques \(EN ISO 128\)](#)

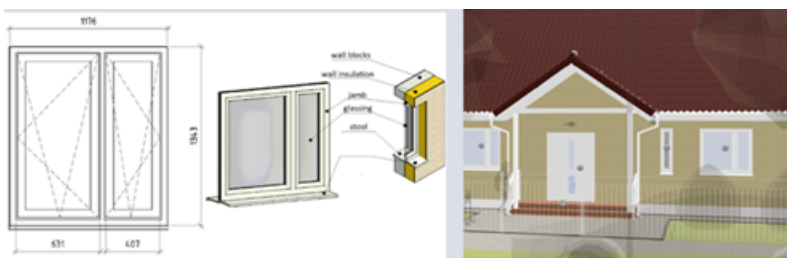
[Linetypes \(ISO 128-23\)](#)

[General information on views, sections and cuts \(ISO 128-3:2020\)](#)

[Presentation of Dimensions \(EN ISO 129-1:2018\)](#)

Joonis 1: Insenerigraafikas kasutatavad standardid [20]

aine raames läbiviidavates harjutustundides. Harjutustundides mitte ainult ei koostata jooniseid, vaid õpitakse kontrollima ka kolmemõõtmelistest objektidest tehtud jooniste korrektsust ja mõõtmete õigsust ja piisavust ning muid tähistusi ja märkmeid. Selline jooniste kvaliteedi kontrollimine viiakse läbi joonisel toodud objekti reaalse modelleerimisega. Vajadus sellise praktika järele on ilmne, tulevane spetsialist saab hindamatu kogemuse oma ideede elluviimisel ning õpib vigade olemasolul leidma lahendusi nende kõrvaldamiseks ressursse kaotamata, paindlikult rakendades saadud praktilisi kogemusi ning toetudes õppejõu abile. Järgneval joonisel (Joonis 2) on toodud maja aken ning selle joonise järgi on visualiseeritud akna paiknemine maja 3D mudelil. Kuna tootmisprotsesside areng on seotud digitaaltehnoloogia laialdase



Joonis 2: Akna joonis ja akna paiknemise visualiseerimine maja 3D mudelil

levikuga, mis kiirendab oluliselt infovahetust, siis koheselt edastatavad digitaalsed joonised ja loodud kolmemõõtmelised objektid nõuavad suurt täpsust ja disaini korrektsust. Inseneri väljaõppe taset tõstab digioskuste pidev arendamine praktiliste ülesannete lahendamise käigus.

Insenerilt oodatakse arenenud professionaalset mõtlemist

Antud uurimistöö käigus on analüüsitud Tallinna Tehnikakõrgkoolis koolitavate tulevaste inseneride ja spetsialistide kutsestandardeid, et välja selgitada, millised ootused on tööandjatel kõrgkooli lõpetajatele. Analüüsi järgnevaid Tallinna Tehnikakõrgkoolis ettevalmistatavate spetsialistide kutsestandardeid [8], [17]: ehitusinsener, tootmistehnika spetsialist, transpordi ja logistika spetsialist, elektriinsener, rõiva- ja tekstiilispetsialist.

Kutsestandardites toodud spetsialisti erialaliste teadmiste, oskuste ja hoiakute loetelude analüüs näitab, et kõikidele spetsialistidele esitavatest nõuetest on esikohal arenenud (tehnilise) mõtlemise võime. Hea tehnilise mõtlemise struktuuris on oluline koht sellistel kutsestandardites toodud nõutavatel komponentidel nagu arenenud analüüsivõime ja ruumiline kujutlusvõime. Insenerilt nõutavatest hoiakutest on esile tõstatatud täpsust, suhtlemis-, juhtimis- ja koostöövalmidust. Loovuse nõue on eraldi ära toodud ehitusinseneri ning rõiva- ja tekstiilispetsialisti kutsestandardis.

Tänapäeva insenerilt nõutakse kõrgetasemelist digitaalset kirjaoskust, teadmisi ja oskusi riist- ja tarkvarast ning sidevahendite kasutamise oskust. Samad nõudmised esitatakse ka muidugi õppejõududele, kes insenere koolitavad [2]. Siinjuures on kasulik teada, et tehniline mõtlemine digitaaltehnika puhul erineb oluliselt sellest tehnilisest mõtlemisest, mis tugineb ruumilisele ettekujutusele. Digitaaltehnika skeemide lugemisel ja koostamisel peab teadma kindlaid äraõpitud reegleid. Mõtlemine kulgeb seejuures järgneva mõttemalli järgi: „kui see on nii, siis too on naa“. Selline mõtlemine tugineb formaalse loogika tundmisele, oluline on hea mälu ning võime kiiresti sooritada vaimseid operatsioone. Need on omadused, mis iseloomustavad heade matemaatiliste võimetega inimest. Seega matemaatika õppimine toetab digitaaltehnika õppimist ja selle kasutamist [19].

Mistahes valdkonna inseneril peavad olema põhilised mehaanikaalased oskused, ta peab tundma olulisi mehaanikaalaseid mõisteid ja protsesse. Need teadmised ja oskused on vajalikud selleks, et paremini mõista oma valdkonna seadmete ja sõlmede töö põhimõtteid selgitavaid füüsikalisi ja tehnilisi mudeleid. Mehaanika objektid ja nende

sõlmede tööpõhimõte on paremini jälgitav kui elektriseadmed ja neis kulgevad protsessid, aga mehaanika- ja elektrisüsteemide töö analüüsiks kasutatakse samasid matemaatilisi meetodeid, nii et teades hästi mehaanikat võib paremini mõista elektrilisi protsesse ja vastupidi.

Inseneril on vaja tehniliste ülesannete püstitamise ja nende lahendamise oskusi, oskust leida probleemide tekitajat ning luua ja testida probleemi lahendusi. Matemaatiliste mudelite kasutamine tehnikas võimaldab rakendada modelleeritavate sõlmede ja seadmete kvantitatiivset analüüsi, mille põhjal võib projekteerida vajalike tehniliste parameetritega uusi tehnilisi lahendusi ning viia läbi tehniliste seadmete diagnostikat. Selline tegevus nõuab insenerilt häid teadmisi ja oskusi erinevates matemaatika valdkondades [15].

Kuna tehnikateadus on teadus, mis uurib, kuidas saab kasutada looduses esinevaid nähtusi inimese igapäevaelus, siis peab insener tundma hästi loodusteadusi, eelkõige füüsikat.

Matemaatika ja füüsika – tugi tehnilisele mõtlemisele

Nagu eespool märgitud, matemaatika on oluline tehnika keel, mille abil kulgeb tehnilise mõtlemise protsess. Matemaatiline mõtlemine on oluline osa tehnilise mõtlemise struktuuris, mis tagab kindla korra loogilises mõtlemises. Iga püstitatud eesmärk on saavutatav ning igas olukorras on võimalik leida ka lahendus, kui inimese tegevus allub teatud korrale tema loogilises tegevuses. Üliõpilaste tehnilise mõtlemise arendamine eeldab ka nende matemaatilise mõtlemise arendamist. Matemaatika õppimise ja õpetamise juures on peamine omandada matemaatiline mõttelaad, mis korrastab loogikat ettevõetavates tegevustes.

Tehniliste õppeainete õpetamisel kasutatakse mitmesuguseid mudeleid õpitavate tehniliste sõlmede ja süsteemide tööpõhimõtte selgitamiseks. Füüsikaliste mudelite abil saab selgitada looduses esinevat füüsikalist nähtust, millele õpitava tehnilise lahenduse tööpõhimõte rajaneb.

Tehniline mudel annab ettekujutuse, kuidas mingit füüsikalist nähtust rakendatakse konkreetse soovitud tulemuse saavutamiseks kas tehnilises seadmes või tehnoloogilises protsessis.

Matemaatilised mudelid annavad võimaluse sõlmede ja süsteemide kvantitatiivseks analüüsiks, mis võimaldab määrata tehnilise objekti olulisi parameetreid etteantud tingimuste juures. Võib öelda, et kõik valdkonnad, kus kasutatakse matemaatilisi valemeid, tegelevad matemaatilise modelleerimisega.

Matemaatiliste mudelite abstraheerimise tase on kõrgem, kui see on füüsikaliste ja tehniliste mudelitel. Seepärast kasutatakse füüsikalisi ja tehnilisi mudeleid rohkem õpetamise madalamal hariduslikul tasemel. Kõrgkoolis, eriti tehnilises kõrgkoolis tuleb rohkem kasutada matemaatilist modelleerimist, mis arendab rohkem mõtlemist. Seepärast on oluline, et tehnikakõrgkooli õppekavades on kindel koht matemaatika õppeainetel.

Sageli üliõpilased ei taju matemaatiliste valemite (mudelite) taga modelleeritava sõlme või süsteemi õiget olemust ja loovad sellest vale ettekujutuse. Kui ei nähta valemites modelleeritavat sisu, siis nende pähe õppimisest pole kasu, sest mõttetegevust see ei toeta.

Head matemaatilised võimed eeldavad head ruumilist ettekujutusvõimet, nagu hea tehniline mõtlemine seda eeldab. Seepärast üliõpilaste ruumilise ettekujutuse arendamine arendab nende tehnilist ja matemaatilist mõtlemist.

Matemaatika kõrval on tehnilise kõrgkooli õppekavades füüsikal tähtis koht. Füüsika annab aluse tehniliste seadmete tööpõhimõttest arusaamisel. Oluline on füüsika kui teaduse meetodite tundmaõppimine, mitte ainult konkreetsete tulemuste reproduktiivne meeldejätmine [13].

Kõrgkooli füüsikakursus käsitleb füüsikalisi protsesse, mis muutuvad ajas ja ruumis. Kõik need muutused on seotud tehniliste seadmete kasutamise eesmärgiga tekitada soovitud tulemust. Füüsika põhineb jäävusseadustele (energia jäävus, impulsi jäävus, impulsimomendi jäävus, laengu jäävus). Füüsika kasutab oma seaduste formuleerimisel oma keelt, mille aluseks on samuti matemaatika. Selles osas on füüsika sarnane tehnika valdkonnale. Muutuste käsitlemisel on oluline diferentsiaalarvutus, nendest üldistuste tegemisel ka integraalarvutus. Näiteks saab keskmise kiiruse $\vec{v}_k$ ehk kohavektori $\vec{r}$ muutuse ajaühikus arvutada valemiga $\vec{v}_k = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$. Hetkkiiruse ajahetkel t saadakse, kui vähendame

ajavahemikku Δt piiramatult ($\Delta t \rightarrow 0$) ehk

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'. \quad (1)$$

Seega kiirus trajektoori mingis punktis on selles punktis võetud kohavektori esimene tuletis aja järgi. Kiiruse muutumise kiiruse ehk kiirenduse saab avaldada kiiruse tuletisena:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}'. \quad (2)$$

Kuna paljud füüsikalised suurused on vektoriaalsed suurused, siis on tähtis vektoralgebra, mis võimaldab füüsika seaduspärasusi lihtsamalt kirja panna. Näiteks mehaaniline töö A arvutatakse muutumatu jõu korral valemiga (3):

$$A = F \cdot s \cdot \cos \alpha, \quad (3)$$

kus s on nihke suurus ja $F \cdot \cos \alpha$ on jõu nihkesuunaline komponent. Kasutades vektorite skalaarkorrutist võib töö arvutamist lihtsustada ja üldistada:

$$A = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{s}. \quad (4)$$

Ampere'i seadust, millega määratakse magnetväljas vooluga juhtmele mõjuvat jõudu, saab avaldada kujul $F = k_1 I B l \sin \alpha$, kus α on nurk voolu suuna ja magnetilise induktsiooni vektori vahel. Seost on lihtsam esitada vektorkorrutisena $\vec{F} = k_1 I \vec{l} \times \vec{B}$.

Peale matemaatiliste avaldiste on füüsikas ka oluline seaduspärasuste keeleliselt korrektne sõnastus. Füüsikas on kõikidel seaduspärasustel omad rakenduspiirid, mis ei tarvitse kattuda vastavaid seaduspärasusi käsitlevate valemite matemaatiliste määramispiirkondadega.

Praktilise õppetegevuse juures on üheks eesmärgiks füüsikaliste suuruste korrektsete mõõtmismeetodite tundmaõppimine ja praktiseerimine. Siin on oluline teada, et ükski mõõtmine pole täpne (va loendamine). See tähendab, et mõõtmistel ja arvutustel tuleb arvestada mõõtemääramatusega, mis sõltub mõõtmise meetodist ja mõõteaparaadi täpsusest. Näiteks millimeeterjaotusega joonlauaga mõõtmisel saab tulemus olla 0,10 m, aga mitte 0,1 m. Oluline on ka teada, et üksikute suuruste

mõõtemääramatused (praktikas tekkivad juhuslikud vead) määravad ära ka nende suuruste kasutamisel valemite abil leitud suuruste mõõtemääramatused. Praktikas tähendab see, et arvutamisel saadud tulemust tuleb ümardada vastavalt mõõtemääramatusele. Mõõtemääramatuse hindamine loob seose statistika ja tõenäosusteooriga.

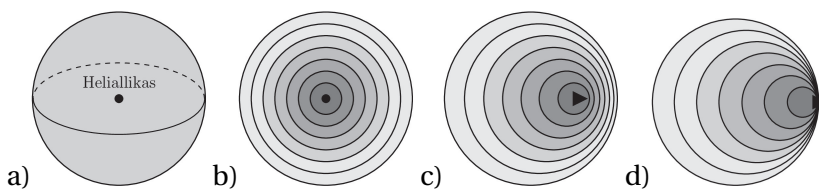
Järgnevalt on toodud kaks näidet, kuidas kasutada füüsikalisi nähtusi ja matemaatikat tehniliste probleemide selgitamisel ja lahendamisel. Esimeses näites on selgitatud koolifüüsikast tuntud Doppleri efekti abil lennunduses esinevat helibarjääri ületamisega seotud lööklaine tekkimist. Teine näide on logistika valdkonnast, kus liiklusummikute probleemi lahendamiseks kasutatakse hüdrodünaamikas esinevaid füüsikalisi nähtusi. Mõlemas näites kasutatakse protsesside matemaatilist modelleerimist.

Näidetest on näha, kuidas matemaatiline arutluskäik tekitab selguse nii mõnelegi mõistatusele, mida matemaatikata oleks raske selgitada. Protsesside mõistmine nõuab ka ruumilist ettekujutust. Elust võetud näited äratavad üliõpilastes huvi ja see tõstab nende õpimotivatsiooni.

Näide 1: helibarjäär

Helibarjäär on füüsikaline nähtus, mis seisneb selles, et kui mingi keha (lennuk, rakett, mürsk) liigub õhus kiirusega, mis on lähedane helikiirusele (20°C juures 343 m/s ehk 1235 km/h) või on sellest suurem, siis surutakse õhk kokku ja see tekitab tugeva lööklaine. Selle mõjul keha aerodünaamiline takistus suureneb järsult. Uute kiirete reaktiivlennukite katsetamisel 1940. aastatel ilmnis tõsine probleem lennuki kiiruse jõudmisel helibarjäärini, mis avaldus juhitavuse kadumises, lennuki vibreerimises ning tihti ka lennuki lagunemises. Paljud katselendurid jätsid oma elu, enne kui õpiti helist kiiremini lendama [18].

Tingimusel, kui heliallikas püsib paigal mingis punktis, on helilaine front sfäär, mis atmosfääris paisub kiirusega ca 340 m/s . Helilaine kannab endaga energiat, mille intensiivsus kiiresti hajub, sest sfääri pindala suureneb (võrdeliselt kauguse ruuduga), – mida kaugemal kuulajast, seda nõrgem on heli (Joonis 3a).



Joonis 3: Helibarjääri tekkimine, kus: a) helilaine, b) helisagedus, c) Doppleri efekt, d) helikiirus

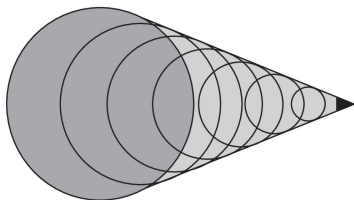
Inimese kõrv tajub sagedusi kuni 15 tuhat võnget sekundis (15 kHz). Kui kujutada ette 15 tuhat konksentrilist sfääri ühe sfääri sees, mille raadius on 340 m ning jagada 340 m 15000-ga, siis jagatiseks on kahe sfääri vaheline kaugus, milleks on ca 2 cm. See suurus on helilaine pikkus, mis vastab sagedusele 15 kHz, mida kõrv kuuleb (Joonis 3b).

Kui heliallikas, näiteks lennuk, liigub teatud suunas, siis helilaine sfäärid ei ole konksentrilised, sest iga järgmine sfäär on nihkunud liikumise suunas ettepoole. Lennuki ees on helilainete sagedus kõrgem ja lennuki taga madalam. See on nn Doppleri efekt, mis on tuttav koolifüüsikast ning seisneb selles, et heliallika lähenemisel kuulajale sagedus suureneb, eemaldumisel väheneb (Joonis 3c).

Eeldame, et lennuk on saavutanud helikiiruse 340 m/s. Kui ta on lennanud selle kiirusega ühe sekundi, siis ta on jäänud püsima iga lainefroni sfäärile, st lennuki lähedases ümbruses on konksentreerunud 15 tuhat sfääri ja energia on kasvanud, võrreldes sellega, mis oli ühe sfääriga, 15 tuhat korda (Joonis 3d).

Kui väike poleks ka energia, mida kannab üks helilaine sfäär, siis nüüd on see tohutult kordistunud ning kujutab tõsist ohtu lennuaparaatidele ja piloodile. Lennuk on saavutanud helibarjääri ning pikaajaline lend sellise kiirusega on eluohtlik.

Kui aga lennuk on ületanud helibarjääri ja lendab kiiremini kui 340 m/s, siis jäävad kõik helilaine sfäärid temast tahapoole. Lendur ei kuule mingit müra ega ei taju mingeid helilaine tekitatud vibratsioone. Lennuki sabaosas on koonusekujuline õhuruum, mille sisse jäävad kõik helilaine sfäärilised frondid – heli on koonuses, väljaspool koonust valitseb vaikus (Joonis 4). Maapinnal asuvast vaatlejast lendab lennuk üle ja ta ei kuule mootori müra, kuni koonus pole temani



Joonis 4: Helikiiruse ületamise koonus

jõudnud – siis kostab tugev kärgatus ning pärast seda on kuulda müra. Mõnikord, sõltuvalt atmosfääri tingimustest, on koonust õnnestunud näha visuaalselt (Joonis 5). Kummaline nähtus – heli muutub nähtavaks!



Joonis 5: Fotol on lennuk ületanud helibarjääri kiirendusega [12]

Matemaatikud ütlevad: koonus on sfääride mähispind, seda saab põhjendada matemaatiliselt. Ringjoonte parv on antud xy -tasandil võrrandiga (5):

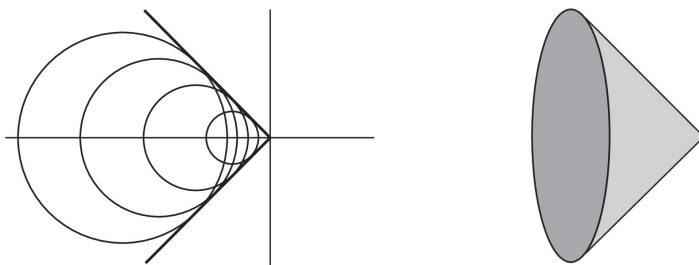
$$(x + a)^2 + y^2 = (ka)^2, \quad (5)$$

kus a on mingi numbriline parameeter. Parameetri a fikseerides eraldub üks ringjoon parvest. Ringjoone keskpunkti koordinaadid on $(-a; 0)$ ning ringjoone raadius on ka . Juhtum $k > 0$ vastab Doppleri efektile, juhtum $k = 0$ helibarjäärile ja juhtum $k < 0$ olukorrale, kui helibarjäär on ületatud. Võib moodustada võrrandisüsteemi, kus teine võrrand on saadud esimese võrrandi diferentseerimisel parameetri a järgi:

$$\begin{cases} (x + a)^2 + y^2 = (ka)^2 \\ x + a = k^2 a \end{cases}. \quad (6)$$

Süsteem (6) määrab ringjoonel karakteristikud punktid. Parameetri a elimineerides saame mähisjoontena kaks sirget, mis ruumis vastavad koonusele (Joonis 6):

$$y^2 = \frac{k^2 x^2}{(1 - k^2)} \Rightarrow y = \pm \frac{kx}{\sqrt{1 - k^2}}, \quad \text{kui } k < 1. \quad (7)$$



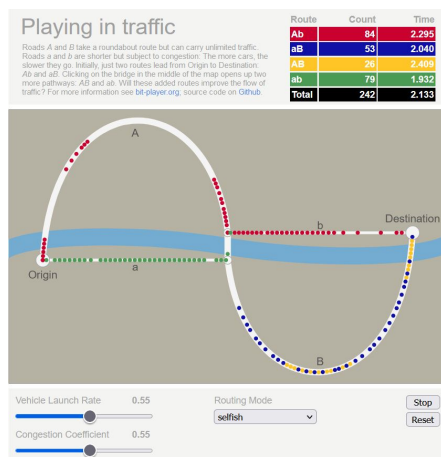
Joonis 6: Helikoonus

Näide 2: liiklusvoogude matemaatika

Liiklusummikud linnades on muutunud igapäevaseks nähtuseks, iga aastaga nende arv ja kestus pidevalt suurenevad. Transpordivõrgu ummikuid ennetada või vähemalt vähendada on võimalik ainult kaasaegsete liikluskorralduse meetodite kasutamisega ning selle probleemi lahendamiseks on vajalik matemaatikute ja füüsikute osalus. Mõte, et ummikute vähendamiseks piisab teede arvu suurendamisest, lükati eelmise sajandi lõpus ümber: uue tee kasutuselevõtt mõnikord ei paranda, vaid halvendab transpordi olukorda. Matemaatikud on tulnud välja näitega teedevõrgust (Braess'i paradoks), mille puhul peale täiendava tee kasutuselevõttu võrgu efektiivsus langes [1]. Autojuhtide loomulik soov kasutada uut teed, et valida ajaliselt optimaalne marsruut, tõi ootamatult kaasa kõigi juhtide sõiduaja pikenemise [5]. Brian Hayesi on välja töötanud interaktiivse liiklussimulaatori²⁰, mis modelleerib Braesi paradoksi [7]. Simulaator sisaldab nelja marsruuti, millest kaks (kollane ja roheline) ületavad silda üle oja. Keskmine sõiduaj ei ületa

²⁰Liiklussimulaator asub aadressil <http://bit-player.org/extras/traffic>

kunagi kahte ühikut, kui tee üle silla on suletud, ja muutub pärast silla avamist enam kui kaheks ühikuks (Joonis 7).



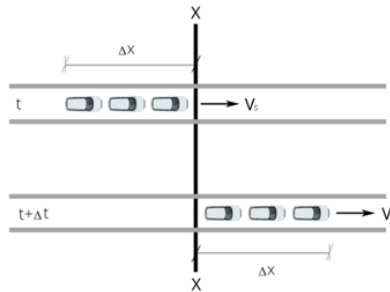
Joonis 7: Brian Hayesi simulaatori ekraanisalvestus

Lisaks on uute teede ehitamine ja olemasolevate teede rekonstrueerimine kulukas ja aeganõudev protsess. Ummikud toovad endaga kaasa majandusliku kahju nende põhjustatud pikkade viivituste tõttu, samuti avaldab see negatiivset mõju keskkonnale, suurendades mürataset ja mürgiste heitgaasidega saastet.

Liiklusvoogude modelleerimiseks, et neid optimaalselt juhtida, on välja töötatud palju huvitavaid lähenemisviise, kuid kõigi pakutud lahenduste aluseks on kaks rakendusmatemaatika haru – arvutuslik vedelike dünaamika (*Computational Fluid Dynamics*, CFD²¹) ja operatsiooni-analüüs (mänguteooria). Hüdrodünaamika uurib vedeliku ja gaasi liikumist. Selle teadusliku meetodi rakendamine transpordiprobleemides põhineb autode voo kujutamisel vedeliku läbisurumisena muutuva laiusega kanalite süsteemist, milles voo kiirus väheneb tiheduse kasvades [10]. Joonise (Joonis 8) hallil alal on $n = k \times \Delta x$ sõidukit. Ajavahemikus $\Delta t = \Delta x / v_s$ läbib hall ala (ja seega ka kõik sõidukid) X sektsiooni. Voo

²¹CFD (*Computational fluid dynamics*) – arvutuslik vedelike dünaamika on vedeliku mehaanika haru, mis kasutab arvutusanalüüsi ja andmestruktuure, et analüüsida ja lahendada vedeliku vooluga seotud probleeme.

hulk on $q = n/\Delta t = k \times \Delta x/\Delta t = k \times v_s$.



Joonis 8: Hüdrodünaamiline analoogia paigalseisva ja ühtlase liiklusvoo korral [6]

Klassikalise hüdrodünaamika saavutused läbi ajaloo on muutunud võimsaks vahendiks liiklusvoogude uurimisel. Hüdrodünaamilist lähenemist kasutatakse näiteks lühiajaliste voogude arvutamisel, et optimaalselt juhtida liiklussignaale [21]. Foorijuhtimise kasutamine on tõhusaim meetod maanteedel ummikute vältimiseks ning vastav matemaatiline mudel on mittelineaarne programmeerimisülesanne, mida saab lahendada arvutusmeetoditega.

Teine lähenemine põhineb mänguteoorial ja makrosüsteemide teooria elementidel ning seda kasutatakse pikaajaliseks planeerimiseks, et liiklusvooge optimaalselt juhtida [22]. Üks peamisi ummikutega toimetuleku mehhanisme on liiklusvoo optimaalne jagamine era- ja ühistranspordiks ning seejärel iga valitud voo optimeerimine. Optimeerimisvahendeid on palju: ühistranspordi maksumuse ja selle liikumise intensiivsuse reguleerimine, ühistranspordile sihtotstarbeliste radade kehtestamine, eratranspordi tasulise parkimise juurutamine.

Kaasaegses maailmas on transpordivõrkude uurimise probleemi-des ilmnenud uued asjaolud. Lühiajal võib saada iga auto kohta infot reaajas. Seda infot on vaja õppida töötleva sellise kiiruse ja terviklikkusega, et seda saaks kasutada igasuguste transpordi probleemide lahendamiseks: alates liikluskorralduse protsessist kuni täiustatud planeerimiseni. Näiteks „roheline laine“ arvutusvalemid liiklusvoo summaarse viivitusaja D minimeerimiseks teedevõrgu lõigul, mis sisaldab

n ristmikku, võtavad vastavalt liiklusvoo hilinemise arvesse i -ndal ristmikul, otsese $f(D_i)$ ja vastassuundade $\varphi(D'_i)$ jaoks [4]:

$$D = \sum_{i=1}^n [f(D_i) + \varphi(D'_i)] \rightarrow \min.$$

Suurte andmemassiividega töötamiseks, kasutades kaasaegseid matemaatilisi meetodeid, arendatakse välja tarkvara, mis võimaldab teha liikluse simulatsioone. Näiteks liikluse modelleerimistarkvara PTV Vision Visum²² võimaldab välja arvutada liiklusintensiivsuse ja transpordi nõudluse, hinnata ja prognoosida teedevõrgustikku, hinnata teedevõrgustiku täiustamise vajadust, optimeerida üksikisiku ja ühistranspordi tööd ning välja töötada transpordi strateegiaid (makromodelleerimine). Mikromodelleerimise versiooni PTV Vision Vissim kasutusvaldkondadeks on ristmike läbilaskevõime ja valgusfooride töö hindamine, radade kasutatavuse, põimumise ja ümberreastumise jälgimine ning detailne liikluse imiteerimine. Liikluse modelleerimise lähtematerjaliks on võimalikult täpselt koostatud liiklusuuringud. Kaasaegsetes teede juhtimissüsteemides (sh foori juhtimissüsteemides) kasutatavate andmete tüpiseerimine viitab sellele, et need süsteemid ei võta arvesse tegureid, millel on oluline mõju liiklusvoo parameetritele. Selliste vahendite täiustamiseks on vaja valida sobiv matemaatiline mudel, mis eeldab uurijalt laialdasi teadmisi kaasaegsest matemaatikast [4].

Kokkuvõte

Olukorras, kus kõrgkooli ajaline ressurss on vähenenud, tehnika ning tehnoloogia arenevad kiiresti, peab kõrghariduse esimesel tasemel tulevastel inseneridel välja arendama püsivad teadmised ja oskused kõrgemast matemaatikast ja füüsikast. Nimetatud reaalinete alused ei muutu ajas nii kiiresti kui tehnika, millega insener peab end kursis hoidma täiendõppe abil. Matemaatika ja füüsika põhialuste kindel omandamine kõrgkoolis tagab insenerile tõhusa professionaalse tegevuse ja võime elukestvaks enesetäienduseks.

²²<https://www.myptv.com>

Tehnika kiire areng pakub ka uusi tehnilisi võimalusi, mida saab kasutada didaktiliste eesmärkide tõhusamaks saavutamiseks. Õppejõud peab pidevalt arendama oma digikompetentsust. Peab leidma uusi meetodeid, et lühendatud õpiaja sees säiliks õpiväljundid ja õppimine muutuks tõhusamaks.

Õppejõud peab oma õppeaine õpetamisel rohkem tähelepanu pöörama optimaalsete sidemete loomisele teiste õppeainetega, et toetada üliõpilasel erinevate õppeainete tõhusamat omandamist. Õpetades reaalaineid, tuleb luua perspektiivsed sidemed eriala ainetega, et üliõpilased tunnetaksid, milleks neil antud ainet õppida vaja on. Samuti peab eriala õppejõud enne uue materjali edastamist aktualiseerima üliõpilastel vajalikud eelteadmised reaalainetes, mis on neil vajalikud uue õppesisu mõistmiseks.

Üliõpilaste mõtlemise arendamise huvides on otstarbekas kasutada võimalikult abstraktseid mudeleid (tehniliste ja füüsikaliste mudelite asemel matemaatilisi mudeleid). Insenerigraafika kasutamisel on otstarbekas kasutada selliseid jooniseid, kus pole toodud kõiki vaateid uuritavast objektist, vaid anda piisav arv vaateid, mille kaudu saab tuletada kõik vajalikud vaated. Matemaatiline mõtlemine ja tehniline mõtlemine toetavad üksteist. Tehniline taip areneb matemaatilise taibu arenedes, vastastikku üksteist toetades. Nende mõlema võime efektiivne arendamine tugineb heale ruumilisele ettekujutusele, mida peab kõrgkoolis arendama.

Tehniline taip on võime märgata, kus mingit füüsikalist nähtust saab tehnikas kasutada soovitud eesmärgi saavutamiseks. Matemaatiline taip on võime märgata, kus mingit matemaatilist meetodit või mudelit saab füüsikas või tehnikas kasutada, et saada soovitud tulemust.

Üliõpilaste õpimotivatsioon on alati kõrgem, kui nad teavad ja saavad aru, milleks neil õpitavaid teadmisi vaja on. Seepärast peab õppejõud alati selgitama, kus antud teoreetilisi teadmisi saab kasutada. Tuleb kasutada elulisi ja huvitavaid näiteid mitte väljamõeldut.

Reaalainete ja erialaainete õppejõud peavad regulaarselt pidama nõu, et panna paika taktikalised ja strateegilised plaanid, kuidas oma õpetatavaid aineid edastada, et nad paremini integreeruks ja toetaks üliõpilaste tõhusat omandamist. Siinjuures on oluline see, et kõrgkoolis

peavad õpetama matemaatikat matemaatikud ja füüsikat füüsikud, sest nemad on tavaliselt ülikoolis läbinud ka oma aine didaktika kursuse. Erialaõppejõud tavaliselt nii laia ning sügavat ettevalmistust reaalsust ei oma, vaid piirduvad rohkem oma eriala spetsiifilise matemaatika ja füüsika osa põhjaliku tundmisega.

Kirjandus

1. D. Braess, A. Nagurney, T. Wakolbinger. On a Paradox of Traffic Planning. *Transp. Sci.* **39** (2005), 446–450.
2. M. Deimann. *Hochschulbildung und Digitalisierung – Entwicklungslinien und Trends für die 2020er-Jahre*. Digitalisierung in Studium und Lehre gemeinsam gestalten, Springer VS, Wiesbaden, 2021.
3. R. F. Feynman. New Textbooks for the ‘New’ Mathematics. *Eng. Sci.*, XXVIII, No 6 (1965), 9–15.
4. A. V. Gasnikov. *Sissejuhatus liiklusvoogude matemaatilisesse modelleerimisse*. MTsNMO, Moskva, 2013 (vene keeles).
5. A. Gasnikov, Y. Dorn, E. Nurminsky, N. Shamray. Liiklusummikud: kui ratsionaalsus viib kollapsini. *Quantum*, nr 1 (2013), 13–18 (vene keeles).
6. M. Guerrieri, G. Parla, R. Mauro. Traffic Flow Variables Estimation: An Automated Procedure Based on Moving Observer Method. Potential Application for Autonomous Vehicles *Transp. Telecommun. J.* **20** (2019), 205–214.
7. B. Hayes, Playing in Traffic. *Am. Sci.* **103** (2015), 260–263.
8. Kutsestandardid, SA Kutsekoda, https://www.kutseregister.ee/et/standardid/standardid_top2/? (vaadatud 20. veebruar 2023)

9. U. Läänemets, K. Kalamees-Ruubel, M. Luht, T. Autio. *Ratio Studiorum: õppekavadest ehk kuidas korraldada kooliharidust*. Eesti Muusika- ja Teatriakadeemia, Avita, Tallinn, 2021.
10. R. Löhner. *Applied Computational Fluid Dynamics Techniques: An Introduction Based on Finite Element Methods*. 2nd Edition. Wiley, 2008.
11. M. Mäeots, J. Umborg. Järjepidevus inseneri õpitees. *Sõjateadlane* 4 (2017), 130–144.
12. Pinterest, <https://www.pinterest.it/pin/414331234442838437/> (vaadatud 20. veebruaril 2023)
13. G. Pospiech. Interplay of Mathematics and Physics in Physics Education. *Proc. MACAS – 2015 International Symposium of Mathematics and its Connections to the Arts and Sciences*, Schwäbisch Gmünd, Germany, 2015.
14. O. Pärna. *Töö ja oskused 2025: ülevaade olulisematest trendidest ja nende mõjust Eesti tööturule 10 aasta vaates*. SA Kutsekoda, Tallinn, 2016.
15. K. Stacey. *What is Mathematical Thinking and why is it Important?* 2006. https://www.researchgate.net/publication/254408829_WHAT_IS_MATHEMATICAL_THINKING_AND_WHY_IS_IT_IMPORTANT
16. A. Šafhalter, S. Glodež, A. Sorgo, M. Virtič. Development of spatial thinking abilities in engineering 3D modeling course aimed at lower secondary students. *Int. J. Technol. Des. Educ.* 32 (2022), 167–184.
17. Tallinna Tehnikakõrgkool, *Self-Evaluation Report for Institutional Accreditation*. TKTK, 2021.
18. N. Tillman. *Breaking the Sound Barrier | The Greatest Moments in Flight*, 2017. <https://www.space.com/16709-breaking-the-sound-barrier.html> (vaadatud 20. veebruaril 2023)

19. J. Umborg, Tehnika õppimisest ja õpetamisest üldhariduskoolis. *Reaalained ja uus õppekava. Konverentsi materjalid. Tartu 27.-28. oktoober 2000*, 176–179.
20. VIRSTEM project, VIRSTEM – Overview of standards. 2020.
<https://sites.google.com/tktk.ee/virstem/basic-engineering-graphics/5th-topic/overview-of-standards>
(vaadatud 20. veebruaril 2023)
21. A. Vlasov, N. Orlov, K. Chushkina, Valgusfooride töörežiimide arvutamise meetod küllastunud liikluse tingimustes. *Naukovedenie*, nr 2 (2014), 1–11 (vene keeles).
22. Z. Wang, K. Wang, H. Zhang, Application of Mathematical Model in Road Traffic Control at Circular Intersection. *Communications in Computer and Information Science* **106** (2021), 436–443.