

Monomorfismid püsivate moodulite kategoorias

KRISTO VÄLJAKO
Tartu Ülikool

Siinkohal tutvustan ma oma artiklit „Monomorphisms in the category of firm modules“, mis ilmus esmakordselt ajakirjas Communications in Algebra (artikkel [1]) ning leiti 2020. aastal EMSi publikatsiooniauhinna vääriline olevat. Selles artiklis andsin ma monomorfismide kirjelduse kõikide püsivate moodulite kategoorias.

Kategooriad ja monomorfismid

Kokkuvõtte alustuseks oleks kasulik mõista antud artikli pealkirja. Esiteks tutvume kategooria mõistega. Matemaatilises tekstis on ilmselt mõistlik alustada definitsioonist.

Definitsioon. Kategooria koosneb kahte tüüpi suurustest – objektidest ja morfismidest. Kui $\mathcal{A}$ on kategooria, siis tema objektid moodustavad klassi, mida tähistame $\text{Ob}(\mathcal{A})$. Mistahes järjestatud objektipaariga (A, B) on seotud hulk $\text{Mor}(A, B)$, mida nimetatakse *morfismide hulgaks objektist A objekti B*, nii et:

1. kui $(A, B) \neq (A', B')$, siis $\text{Mor}(A, B) \cap \text{Mor}(A', B') = \emptyset$;
2. kui $f \in \text{Mor}(A, B)$ ja $g \in \text{Mor}(B, C)$, siis eksisteerib nende *kompositsioon* $g \circ f \in \text{Mor}(A, C)$;
3. kui morfismide kompositsioonid $(h \circ g) \circ f$ ja $h \circ (g \circ f)$ eksisteerivad, siis nad on võrdsed;
4. mistahes objekti A korral leidub hulgas $\text{Mor}(A, A)$ selline morfism id_A , mida nimetatakse *ühikmorfismiks*, et $f \circ \text{id}_A = f$ ja $\text{id}_A \circ g = g$ iga $f \in \text{Mor}(A, B)$ ja iga $g \in \text{Mor}(C, A)$ korral.

Seega kategooria on mingi kogum, mis koosneb mingitest objektidest ning morfismidest nende objektide vahel. Lihtsaim kategooria näide, mis hästi illustreerib selle mõiste olemust, on ilmselt hulkade kategooria Set , mille objektid on kõikvõimalikud hulgad ning morfismideks on kujutused hulkade vahel. Siit näitest on ka näha

ühte võitu, mis saadakse kategooria mõiste sisse toomisest: kategooria objektid ei pea moodustama hulka, mistõttu kategooriateooria on vaba mitmetest kitsendustest, mis vaevavad hulgateooriat. Üldiselt on kategooriateooria suurim tugevus, et seal viiakse matemaatiliste objektide uurimisel raskuskese selle objekti enda uurimiselt temaga seotud morfismide ning nende omavaheliste seoste uurimisele. Selliselt saab defineerida ja seeläbi uurida suurt osa tuntud mõistetest, mis algebras ja muudes matemaatikaharudes tuntud on. Rohkem võib kategooriateooria kohta lugeda Mati Kilpi eestikeelsest raamatust [2].

Erilise tähendusega on nn *konkreetsed kategooriad*, mis on kategooriad, mille objektideks on hulgad (harilikult mingi struktuuriga), morfismid on kujutused (mis harilikult säilitavad vaadeldavat struktuuri), morfismide komponeerimine on kujutuste järjestrakendamine ja ühikmorfismid on samasusteisendused. Sellisteks kategooriateks on ka moodulite ja püsivate moodulite (üle ringi R) kategooriad, mida antud artiklis uuritakse.

Nüüd on vast paras aeg tutvuda ka monomorfismi mõistega. Taaskord alustan definitsioonist.

Definitsioon. Kategooria $\mathcal{A}$ morfismi $f \in \text{Mor}(A, B)$ nimetatakse **monomorfismiks**, kui mistahes $g, h \in \text{Mor}(C, A)$ korral

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

Seega võib öelda, et monomorfismid (kategoorias $\mathcal{A}$) on vasakult taandatavad morfismid. Monomorfismi mõiste on väga lähedalt seotud injektiivse kujutuse mõistega. Nimelt igas konkreetses kategoorias (sh hulkade kategoorias Set) on injektiivsed morfismid ka monomorfismid. Algselt arvati, et konkreetses kategooriates on monomorfismid parajasti injektiivsed morfismid, kuid nüüdseks on leitud näiteid monomorfismidest, mis pole injektiivsed. Etteruttavalt võib mainida, et ka antud artiklis [1] on esitatud üks viis, kuidas konstrueerida mitte-injektiivseid monomorfisme.

Ringid ja moodulid

Kuna tegemist on siiski ringiteoreetilise artikliga, siis oleks paslik selgitada mõne sõnaga ka, mida ma mõtlen ringi all. Jälle alustame

definiitsioonist.

Definiitsioon. Hulka R nimetatakse **ringiks**, kui temas on defineeritud kaks binaarset algebralist tehet, *liitmine* $+: R \times R \rightarrow R$ ja *korrumine* $\cdot: R \times R \rightarrow R$ nii, et kehtivad tingimused:

1. $\forall r, s, t \in R: (r + s) + t = r + (s + t),$
2. $\exists 0_R \in R \forall r \in R: 0_R + r = r + 0_R = r,$
3. $\forall r \in R \exists -r \in R: r + (-r) = -r + r = 0,$
4. $\forall r, s \in R: r + s = s + r,$
5. $\forall r, s, t \in R: (r \cdot s) \cdot t = r \cdot (s \cdot t),$
6. $\forall r, s, t \in R: (r + s) \cdot t = r \cdot t + s \cdot t \quad \& \quad r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t.$

Nagu näha, on ringi mõiste väga lähedalt seotud (algebralise) korpuse mõistega. Nimelt, kui korpuselt $(K; +, \cdot)$ nõutakse, et $(K; +)$ ja $(K \setminus \{0_K\}; \cdot)$ oleksid mõlemad Abeli rühmad ning liitmine ja korrumine on seotud distributiivsuse omadustega, siis ringis $(R; +, \cdot)$ ei nõuta paarilt $(R; \cdot)$ rohkemat kui et tegemist oleks poolrühmaga. Siiski on ringiteoorias erilisel kohal just nn *ühikelemendiga ringid*, st ringid, milles leidub element 1_R nii, et

$$1_R \cdot r = r \cdot 1_R = r$$

iga $r \in R$ korral. Paljud autorid nimetavadki ringiks just ühikelemendiga ringe, kuid artiklis [1] ilmselgelt nii tehtud ei ole.

Viimase poolesajandi jooksul on palju uuritud mitmeid tingimusi, mis on nõrgemad kui ühikelemendi omamine. Neist (vähemalt minu uurimustöös) olulisim on nn idempotentsus. Nimelt, ringi R nimetatakse *idempotentseks*, kui iga $r \in R$ korral leiduvad elemendid

$$r_1, r'_1, \dots, r_n, r'_n \in R$$

nii, et $r = r_1 r'_1 + \dots + r_n r'_n$. Siinkohal oleks ilmselt paslik ka mõned näited ringidest tuua.

Näited (ringid).

1. Iga korpus K on (ühikelemendiga) ring.
2. Täisarvude hulk $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ on (ühikelemendiga) ring.
3. Olgu X lõpmatu hulk ja $\mathcal{P}_{\text{fin}}(X)$ tema kõigi lõplike alamhulkade hulk. Siis $(\mathcal{P}_{\text{fin}}(X); \Delta, \cap)$ on ring, milles ei ole ühikelementi,

kuid mis on idempotentne, sest $A = A \cap A$ hulga X iga lõpliku alamhulga A korral.

4. Vaatleme ringi $\mathbb{Z}_n$ otseastme $\prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{Z}_n$ alamhulka R , mis koosneb jadadest $(a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$, milles on lõplik arv nullist erinevaid komponente. Siis R on ring komponenthaaval defineeritud tehete suhtes. Selles ringis ei ole ühikelementi, kuid ta on idempotentne, sest iga element esitub idempotentide summana. Näiteks

$$\begin{aligned} (\bar{0}, \bar{3}, \bar{2}, \bar{0}, \bar{0}, \dots) &= (\bar{0}, \bar{3}, \bar{0}, \bar{0}, \dots) + (\bar{0}, \bar{0}, \bar{2}, \bar{0}, \bar{0}, \dots) = \\ &= (\bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{0}, \dots) + (\bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{0}, \dots) + (\bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{0}, \dots) + \\ &\quad + (\bar{0}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{0}, \dots) + (\bar{0}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{0}, \dots). \end{aligned}$$

Teadupoolest defineeritakse algebraistide poolt tavaliselt kiiresti pärast korpuse defineerimist vektorruumid. Samamoodi teevad ka ringiteoreetikud, siinkohal nimetatakse vektorruumi analoogi mooduliks. Kuna aga ringis on aksioome vähem kui korpuses, on ka mooduli definitsioonis vähem tingimusi.

Definitsioon. Olgu R ring. Hulka M nimetatakse **parempoolseks R -mooduliks**, kui temas on defineeritud liitmine $+$: $M \times M \rightarrow M$ ja kujutus $\star$: $M \times R \rightarrow M$, mis rahuldavad tingimusi:

1. paar $(M; +)$ on Abeli rühm,
2. $\forall m, n \in M \forall r \in R: (m + n) \star r = m \star r + n \star r,$
3. $\forall m \in M \forall r, s \in R: m \star (r + s) = m \star r + m \star s,$
4. $\forall m \in M \forall r, s \in R: m \star (r \star s) = (m \star r) \star s.$

Analoogiliselt defineeritakse ka vasakpoolsed R -moodulid. Vajadusel lisan mooduli M tehtesümbolitele alaindeksi M , et rõhutada, millise mooduli tehete tegemist on. Ilmselt on iga ring R parem- ja ka vasakpoolne moodul üle iseenda. Kõik parempoolsed (või ka vasakpoolsed) R -moodulid moodustavad kategooria Mod_R , mille objektideks on parempoolsed R -moodulid ja morfismideks on parempoolsete R -moodulite homomorfismid, st kujutused $f: M \rightarrow N$ (kus $M, N \in \text{Ob}(\text{Mod}_R)$), mis rahuldavad tingimusi

$$f(m_1 +_M m_2) = f(m_1) +_N f(m_2),$$

$$f(m \star_M r) = f(m) \star_N r,$$

iga $m_1, m_2, m \in M$ ja $r \in R$ korral. Siinkohal toon ära ka mõne näite moodulitest.

Näited (moodulid). 1. Iga vektorruum V on moodul (üle korpuse K).

2. Olgu R ring. Vaatleme otseastet

$$R^n = \{(r_1, r_2, \dots, r_n) \mid r_1, r_2, \dots, r_n \in R\}.$$

Hulk R^n on parempoolne moodul üle ruutmaatriksite ringi $\text{Mat}_{n,n}(R)$, kus liitmine on defineeritud komponenthaaval ning kujutus

$$\star: R^n \times \text{Mat}_{n,n}(R) \rightarrow R^n$$

on defineeritud kui tavaline maatriksite korrutamine

$$\begin{aligned} (r_1, r_2, \dots, r_n) \star \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix} \\ = \left(\sum_{k=1}^n r_k q_{k1}, \sum_{k=1}^n r_k q_{k2}, \dots, \sum_{k=1}^n r_k q_{kn} \right). \end{aligned}$$

Üks levinud, lihtsasti mõistetav ning artiklis [1] palju kasutust leidnud R -moodulite liik on unitaarsed moodulid. Parempoolset R -moodulit M nimetatakse *unitaarseks*, kui iga $m \in M$ korral leiduvad $m_1, \dots, m_n \in M$ ja $r_1, \dots, r_n \in R$ nii, et $m = m_1 \star r_1 + \dots + m_n \star r_n$. Nagu näha, siis unitaarsed moodulid on lähedalt seotud idempotentsete ringidega. Nimelt, iga idempotente ring, vaadelduna moodulina üle iseenda, on unitaarne moodul. Kõik unitaarsed R -moodulid moodustavad samuti kategooria, mida tähistame sümboliga UMod_R . (Siinkohal siis kategooria UMod_R objektideks on unitaarsed parempoolsed R -moodulid ning homomorfismideks on kõikvõimalikud parempoolsete R -moodulite homomorfismid nende vahel.)

Moodulite tensorkorrutis

Selleks, et mõista püsiva R -mooduli mõistet, oleks vaja paar sõna kirjutada ka moodulite tenorkorrutisest. Alustuseks toon jälle ära definitsiooni, mis esmapilgul tundub küll abstraktne ja keeruline, kuid üldiselt illustreerib päris hästi tavalist definitsiooni kategooriateoorias. Nimelt on siin esitatud tensorkorrutise mõiste läbi seoste, mis tal on muude Abeli rühmade ja tasakaalustatud kujutustega.

Esmalt aga olgu R ring ning M parempoolne R -moodul ja N vasakpoolne R -moodul. Kujutust $\beta: M \times N \rightarrow A$, kus A on mingi Abeli rühm, nimetatakse R -tasakaalustatuks, kui kehtivad

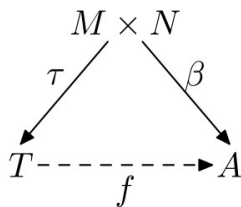
$$\beta(m_1 + m_2, n) = \beta(m_1, n) + \beta(m_2, n),$$

$$\beta(m, n_1 + n_2) = \beta(m, n_1) + \beta(m, n_2),$$

$$\beta(m \star_M r, n) = \beta(m, r \star_N n),$$

iga $m_1, m_2, m \in M$, $n_1, n_2, n \in N$ ja $r \in R$ korral. Järgmisena saab juba tensorkorrutise definitsiooni välja kirjutada.

Definitsioon. Olgu T Abeli rühm ja $\tau: M \times N \rightarrow T$ R -tasakaalustatud kujutus. Paari (T, τ) nimetatakse moodulite M_R ja ${}_R N$ **tensorkorrutiseks**, kui iga Abeli rühma A ja iga R -tasakaalustatud kujutuse $\beta: M \times N \rightarrow A$ korral leidub parajasti üks Abeli rühmade homomorfism $f: T \rightarrow A$ nii, et $\beta = f \circ \tau$.



Tähistame $T = M \otimes_R N$ ja $\tau(m, n) = m \otimes n$. Lihtne viis, kuidas mõelda moodulite tensorkorrutisest, on järgmine: R -moodulite M ja N tensorkorrutis on selline Abeli rühm, kus kehtivad järgmisesse lausesse kogutud omadused.

Lause. *Tensorkorrutise $M \otimes_R N$ iga element on esitatav lõpliku summana moodustajatest:*

$$\sum_{h=1}^k m_h \otimes n_h, \quad (k \in \mathbb{N}, m_h \in M, n_h \in N).$$

Lisaks kehtivad järgnevad omadused:

1. $\forall m_1, m_2 \in M \forall n \in N: (m_1 + m_2) \otimes n = (m_1 \otimes n) + (m_2 \otimes n),$
2. $\forall m \in M \forall n_1, n_2 \in N: m \otimes (n_1 + n_2) = (m \otimes n_1) + (m \otimes n_2),$
3. $\forall m \in M \forall n \in N \forall r \in R: mr \otimes n = m \otimes rn,$
4. $0 \otimes 0 = 0 \otimes n = m \otimes 0$ on Abeli rühma $M \otimes N$ nullelement,
5. $\forall m \in M \forall n \in N: -(m \otimes n) = (-m) \otimes n = m \otimes (-n).$

Püsivate moodulite monomorfismide kirjeldus

Nüüd lõpuks on paras aeg, et tuua sisse ka püsiva mooduli mõiste. Märkame kõigepealt, et iga parempoolse R -mooduli M korral võime tensorkorrutist $M \otimes_R R$ vaadelda samuti kui parempoolset R -moodulit defineerides $(\sum_{h=1}^n m_h \otimes r_h) \star r = \sum_{h=1}^n m_h \otimes (r_h \cdot r).$

Definitsioon. Parempoolset R -moodulit M_R nimetatakse **püsivaks** (*firm*), kui loomulik homomorfism

$$\mu_M: M \otimes_R R \rightarrow M, \quad \mu_M \left(\sum_{h=1}^k m_h \otimes r_h \right) := \sum_{h=1}^k m_h \cdot r_h$$

on bijektiivne.

On selge, et iga püsiv moodul on unitaarne, kuna mooduli M unitaarsus on samaväärne homomorfismi μ_M sürjektiivsusega. Kõikide parempoolsete püsivate R -moodulite kategooriat tähistame sümboliga FMod_R .

Püsivad moodulid tekivad loomulikult Morita teooriast. Nimelt on loomulik defineerida, et ringid R ja S on *Morita ekvivalentsed*, kui kategooriad FMod_R ja FMod_S on ekvivalentsed kategooriad. See on ka üks põhjustest, miks püsivaid mooduleid uuritakse.

Järgnevalt saan lõpuks ära tuua monomorfismide kirjelduse püsivate moodulite kategoorias, mis on artikli [1] üks põhiteoreeme.

Terviklikkuse mõttes on siin toodud ka tingimused 2 ja 3 selgitamata, mis on ekstremaalsed ja regulaarsed monomorfismid. Huvilised saavad leida vastavad definitsioonid artiklist [1].

Teoreem 1. *Olgu R püsiv ring ja $f: M_R \rightarrow N_R$ morfism kategoorias $\mathbf{FMod}_R$. Siis on järgnevad väited samaväärsed:*

1. *f on monomorfism.*
2. *f on ekstremaalne monomorfism.*
3. *f on regulaarne monomorfism.*
4. *$\{\sum_{h=1}^n m_h r_h \mid \forall h: m_h \in \text{Ker } f, r_h \in R\} = \{0\}$.*
5. *$f = \mu_N \circ (a \otimes \text{id}_R) \circ g$ mingi unitaarse mooduli A_R , injektiivse homomorfismi $a: A_R \rightarrow N_R$ ja isomorfismi $g: M_R \rightarrow A \otimes R$ korral.*
6. *$f = h \circ (a \otimes \text{id}_R) \circ g$ mingi injektiivse homomorfismi $a: A_R \rightarrow B_R$ ning isomorfismide $g: M_R \rightarrow A \otimes R$ ja $h: B \otimes R \rightarrow M_R$ korral.*

Nagu eelnevalt lubatud, siis leiab artiklist [1] ka retsepti, kuidas konstrueerida mitte-injektiivseid monomorfisme. Nimelt saab neid leida tänu järgnevale lausele.

Lause. *Olgu R püsiv ring ja olgu püsival moodulil M_R unitaarne alammodul N_R , mis ei ole püsiv. Olgu $\iota: N \rightarrow M$ sisestus. Siis*

$$\iota \otimes 1_R: N \otimes R \rightarrow M \otimes R$$

on mitte-injektiivne (regulaarne) monomorfism.

Tänu näitele 1.2 artiklis [3] leidub mooduleid, mis on unitaarsed, aga pole püsivad. Seega, tänu eelnevale lausele, leidub kategoorias $\mathbf{FMod}_R$ mitte-injektiivseid monomorfisme.

Püsiva mooduli alamobjektide ja unitaarsete alammodulite võrede isomorfism

Lõpetuseks pean tutvustama veel kahte võret, mis on seotud püsivate moodulitega. Alustame abstraktsemast, kategoorsest konstruktsioonist.

Olgu $\mathcal{A}$ kategooria. Defineerime kategooria $\mathcal{A}$ kõikide monomorfismide klassil ekvivalentsusseose $\sim$ järgnevalt

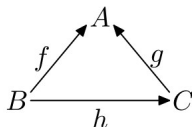
$$f \sim g \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists h \in \text{Iso}(\mathcal{A}): f = g \circ h,$$

kus $\text{Iso}(\mathcal{A})$ on kategooria $\mathcal{A}$ kõikide isomorfismide klass. Tähistame

$$\text{Sub}_{\mathcal{A}}(A) = \{[f] \sim \mid f: B \rightarrow A \text{ on monomorfism}\}.$$

Ühesõnaga, klassi $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(A)$, kuuluvad kõikide selliste monomorfismide ekvivalentsiklassid, mille sihtobjektiks on A . Klassi $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(A)$ saab vaadelda osaliselt järjestatud klassina järjestusseosega

$$f \leq g \quad : \Longleftrightarrow \quad \exists h \in \text{Mor}(\mathcal{A}) : f = g \circ h.$$



Klassi $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(A)$ elemente nimetatakse objekti A *alamobjektideks*.

Olgu R ring ja fikseerime püsiva mooduli $M \in \text{FMod}_R$ ja tähistame

$$\mathcal{S}(M) = \text{Sub}_{\text{FMod}_R}(M).$$

Vaatleme nüüd teistsugust võret, mis on samuti seotud püsiva mooduliga M , kuid mille kirjeldus on märksa lihtsam. Sümboliga $\mathcal{U}(M)$ tähistame, mooduli M_R kõigi unitaarsete alammodulite hulk. Hulk $\mathcal{U}(M)$ on võre, kus supreemum ja infimum on defineeritud järgnevalt:

$$B \vee C = B + C,$$

$$B \wedge C = (B \cap C)R,$$

kus $B, C \in \mathcal{U}(M)$. On lihtsasti tõestatud, et kui ring R on idempotentne, siis on võre $\mathcal{U}(M)$ väga heade omadustega nagu toodud järgnevas lauses.

Lause. *Olgu R idempotentne ring ja M_R parempoolne R -moodul. Hulk $\mathcal{U}(M)$ on täielik modulaarne võre.*

Artiklis [1] on tõestatud, kasutades teoreemi 1, et suhteliselt lihtsasti mõistetav võre $\mathcal{U}(M)$ on isomorfne abstraktse võrega $\mathcal{S}(M)$. See on märkimisväärne lihtsustus, kuna võres $\mathcal{S}(M)$ on infimum ja supreemum defineeritud teatavate kategoorsete piiride kaudu, mille arvutamine on arvestatavalt keerulisem kui alammodulite summade ja ühisosade leidmine.

Teoreem 2. Olgu M_R püsiv parempoolne moodul üle idempotentse ringi R . Siis $\mathcal{S}(M)$ on osaliselt järjestatud hulk ning täielik modulaarne võre, mis on isomorfne võrega $\mathcal{U}(M)$.

Eelnevas teoreemis toodud isomorfism esitub kujul

$$\Psi: \mathcal{U}(M) \rightarrow \mathcal{S}(M), \quad N \mapsto [\mu_M \circ (\iota_N \otimes \text{id}_R)]_{\sim},$$

kus $\iota_N: N \rightarrow M$ on sisestus.

Kirjandus

1. K. Völjako. Monomorphisms in the category of firm modules. *Communications in Algebra* **48** (2020), 1528–1537.
2. M. Kilp. *Kategooriad*. Eesti matemaatika selts, Tartu, 2000.
3. S. Caenepeel, F. Grandjean. A note on Taylor's Brauer group. *Pacific J. Math.* **186** (1998), 13–27.