

Kontinuaalsed summeerimismenetlused. Ühest lõpetamata jäänud doktoritööst

TOIVO LEIGER
Tartu Ülikool

Elmar Reimersit mälestades

1960. aastate lõpuks oli Gunnar Kangro juhendamisel Tartu ülikoolis kaitstud 16 kandidaativäitekirja. Oma esimesed aspirandid oli ta õppetöö vajadusi arvestades suunanud algebrasse ja arvutusmatemaatikasse, hilisemad, aastatel 1958 – 1969 kaitstud 12 tööd olid ta enda uurimisvaldkonnast, summeeruvusteooriast. Nii said Eesti kõrgkoolid juurde märkimisväärse arvu kaasaegse matemaatikaharidusega noori õppejõude, teisalt oli pandud alus summeeruvusteooria-alasele uurimiskeskusele Tartus. Selle töösuundadest ja -tulemustest esitas ülevaate Kangro 1967. a ilmunud artikkel [1], milles tähelepanuväärselt palju ruumi oli pühendatud Elmar Reimersi uurimustele uut tüüpi summeerimismenetlustest. Need uurimused andsid märku doktoritöö potentsiaalist.

1970. aastatel kõneldi matemaatikute seas Reimersi doktoritööst, mis „Moskvas läbi ei läinud“, kuid tegelikult doktoritööd kui sellist ta tõenäoliselt kunagi ei vormistanud. Küll aga annab sellekohasest ambitsioonist tunnistust 1967. a ilmunud mahukas artikkel [4] oma mastaapsuse ja uue lähenemisnurgaga summeeruvusteooria probleemidele. Selle artikli tulemused on tõsiseltvõetavad ka praegu, üle poole sajandi hiljem. Doktoritöö ambitsiooni kinnitab ka fakt, et autor käis oma tulemusi tutvustamas Moskvas, saamaks neile hinnangut sealsetelt analüüsi valdkonna autoriteetidelt. Tollastes oludes oli see samm väitekirja perspektiivi silmas pidades möödapääsmatu. Ehkki doktorikraadi kaitsmiseni asi ei jõudnud, on Reimersi tulemused seda väärt, et neist nüüd, pool sajandit hiljem juttu teha. Eriti seoses Elmari lahkumisega meie hulgast aastal 2021.

Kõige üldisemas vaates on summeeruvusteooria matemaatilise analüüsi valdkond, mis tavalise koonduvuse kõrval uurib jadade, ridade, integraalide jm alternatiivseid koonduvuseeskirju. Summeeruvusteoorias

nimetatakse neid eeskirju *summeerimismenetlusteks*. Eeskirja $\mathfrak{A}$ mõttes koonduva reaalarvude jada $\mathbf{x} = (x_k) = (x_1, x_2, \dots)$ vastavat piirväärtust tähistame sümboliga $\lim_{\mathfrak{A}} \mathbf{x}$, kõigi selliste jadade hulka sümboliga $c_{\mathfrak{A}}$. Summeeruvusteooria keeles on $c_{\mathfrak{A}}$ menetluse $\mathfrak{A}$ *summeeruvusväli*. Kui iga tavalises mõttes koonduv jada $\mathbf{x}$ on ka eeskirja $\mathfrak{A}$ järgi koonduv ehk $\mathfrak{A}$ -*summeeruv* (st $c_{\mathfrak{A}} \supset c$, kus c on kõigi koonduvate jadade hulk), siis öeldakse, et $\mathfrak{A}$ on *konservatiivne*. Kui sellele lisaks kehtib iga $\mathbf{x} \in c$ korral võrdus $\lim_{\mathfrak{A}} \mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$, nimetatakse menetlust $\mathfrak{A}$ *regulaarseks*.

Järgnevate arutluste jaoks selgitame kõigepealt vajalikke mõisteid ja tähistusi. Nagu tavaliselt, märgivad tähed $\mathbb{N}$ ja $\mathbb{R}$ vastavalt kõigi naturaalarvude ja reaalarvude hulka. Kõigi reaalarvuliste liikmetega jadade $\mathbf{x} = (x_k)$ vektorruumi tähistame tähega ω , selle alamruumid

$$\ell^\infty := \left\{ \mathbf{x} \in \omega \mid \|\mathbf{x}\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < \infty \right\}$$

(kõigi tõkestatud jadade ruum) ja

$$c := \left\{ \mathbf{x} \in \omega \mid \text{eksisteerib } \lim \mathbf{x} := \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \right\}$$

(kõigi koonduvate jadade ruum) on Banachi ruumid normiga $\|\cdot\|_\infty$.

Tähega χ märgime kõigi 0-1-jadade hulka, st

$$\chi := \{\mathbf{w} = (w_k) \mid w_k \in \{0, 1\}\},$$

seejuures eriline roll on jadadel

$$\mathbf{e}^{(k)} := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots), \text{ kus } 1 \text{ on } k\text{-s liige, ja } \mathbf{e} := (1, 1, \dots).$$

Tuntuim regulaarne menetlus, mis ei ole tavalise koonduvusega samaväärne, on nn aritmeetiliste keskmiste menetlus $\mathbf{C}_1$, sel juhul

$$c_{\mathbf{C}_1} = \left\{ \mathbf{x} \in \omega \mid \text{eksisteerib } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right\}.$$

Üldisemalt määrab iga lõpmatu reaalarvudest koosnev maatriks $\mathbf{A} = (a_{nk})_{n,k \in \mathbb{N}}$ nn *maatriksmenetluse*. Nimelt, jadade teisendusega

$$y_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \quad (n \in \mathbb{N})$$

määratud maatriksmenetluse $\mathbf{A}$ puhul

$$c_{\mathbf{A}} := \left\{ \mathbf{x} \in \omega \mid \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \text{ koondub } (n \in \mathbb{N}) \text{ ja } \mathbf{y} = (y_n) \in c \right\}$$

ning⁴

$$\lim_{\mathbf{A}} \mathbf{x} := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \quad (\mathbf{x} \in c_{\mathbf{A}}).$$

Summeeruvusteooria põhiteoreemi kohaselt on maatriksmenetlus $\mathbf{A}$ konservatiivne (st omadusega $c \subset c_{\mathbf{A}}$) parajasti siis, kui

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$$

ja eksisteerivad piirväärtused $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$ ning $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} =: a_k$ ($k \in \mathbb{N}$).

Teine oluline teoreem väidab, et $\mathbf{A}$ summeerib kõik tõkestatud jadad parajasti siis, kui ta summeerib kõik 0-1-jadad, teisisõnu,

$$\ell^{\infty} \subset c_{\mathbf{A}} \Leftrightarrow \chi \subset c_{\mathbf{A}}. \quad (1)$$

Tähelepanuväärselt kehtib sel juhul võrdus

$$\lim_{\mathbf{A}} \mathbf{x} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \text{ iga } \mathbf{x} \in \ell^{\infty} \text{ korral.} \quad (2)$$

Maatriksmenetlustel on teiste koonduvuseeskirjade ees mitmeid eeliseid, eeskätt tulenevad need summeerimisvälja soodsast topoloogilisest struktuurist. Nimelt on $c_{\mathbf{A}}$ täielik separaabel metriseeruv lokaalselt kumer ruum⁵, funktsionaalanalüüsi meetodid töötavad selliste ruumide

⁴Lihntne on näha, et C_1 on maatriksmenetlus maatriksiga

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

⁵Lokaalselt kumer ruum on topoloogiline vektorruum, mille topoloogiat saab kirjeldada nn poolnormide abil. Metriseeruv lokaalselt kumer ruum on funktsionaalanalüüsi põhikursusest tuntud normeeritud ruumi vahetu üldistus. Meetrilist ruumi nimetatakse separaablik, kui tal on tihe loenduv alamhulk.

puhul hästi. Vähem meeldiv asjaolu on järgmine H. Steinhausi poolt 20. sajandi algul tõestatud teoreem: *ükski regulaarne maatriksmenetlus ei summeeri kõiki tõkestatud jadasisid*. Tegelikult on see lihtne järeldus seosest (2), kui pidada silmas, et regulaarse $\mathbf{A}$ korral $a_k = 0$ ($k \in \mathbb{N}$).

Väidetavalt – nii kirjutab Kangro oma ülevaateartiklis [1] – oli Reimersi uurimuste algeesmärk defineerida sellised uued summeerimismenetlused, mille abil saaks kirjeldada tõkestatud jadade ruumi ℓ^∞ topoloogilist kaasruumi⁶ $(\ell^\infty)'$ ehk, lihtsamalt öeldes, leida pideva lineaarse funktsionaali $f: \ell^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ üldkuju. Teatavasti on koonduvate jadade ruumis $(c, \|\cdot\|_\infty)$ niisugust üldkuju lihtne leida. Samuti on lihtne veenduda, et iga $f \in c'$ saab esitada ka kujul $f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{A}} \mathbf{x}(\mathbf{x} \in c)$ mingi sobivalt valitud (funktsionaalist f sõltuva) konservatiivse maatriksmenetluse $\mathbf{A}$ korral. Seevastu Banachi ruumi ℓ^∞ puhul on selle mitteseparaabluse tõttu olukord sootuks keerulisem, funktsionaalidel $f \in (\ell^\infty)'$ pole ühtegi käepärast esitust⁷. See asjaolu teeb ruumi ℓ^∞ ja tema mitteseparaablite alamruumide uurimise oluliselt raskemaks. Niisiis oli püstitatud eesmärk – leida selliste koonduvuseeskirjade $\mathfrak{A}$ klass, et iga $f \in (\ell^\infty)'$ saaks esitada kujul $f = \lim_{\mathfrak{A}}$ – igati asjakohane.

Märgime, et kui selline menetluste klass tõepoolest eksisteerib, siis Steinhausi teoreem selles ei kehti. Nimelt, kui $f \in (\ell^\infty)'$ on piirväärtusfunktsionaali $\lim \in c'$ jätk⁸ ruumist c ruumi ℓ^∞ (st $f(\mathbf{x}) = \lim \mathbf{x}$ iga $\mathbf{x} \in c$ korral) ja $\lim_{\mathfrak{A}} = f$, siis $\mathfrak{A}$ on regulaarne ja summeerib kõik tõkestatud jadaid.

Reimersi idee uute menetluste ehitamiseks, mida me järgnevas püüame selgitada, lähtus 0-1-jadade hulgast χ . Idee oli täiesti originaalne, konstruktsioon aga kõike muud kui lihtne. Kui

⁶Tuletame meelde, et normeeritud ruumi $(X, \|\cdot\|)$ topoloogiliseks kaasruumiks nimetatakse kõigi selles määratud pidevate lineaarsete funktsionaalide $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ vektorruumi, mida käesolevas tekstis tähistame $(X, \|\cdot\|)'$ või lühemalt X' . Normiga $\|f\| := \{ |f(x)| \mid x \in X, \|x\| \leq 1 \}$ on X' Banachi ruum.

⁷Tõsi küll, kaasruumi $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)'$ võib samastada kõigi σ -algebras $\mathcal{P}(\mathbb{N}) := \{S \mid S \subset \mathbb{N}\}$ määratud tõkestatud aditiivsete mõõtude $\mu: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ Banachi ruumiga $(ba, \|\cdot\|_\infty)$, kus $\|\mu\|_\infty = \sup_{S \subset \mathbb{N}} |\mu(S)|$, kuid ruumi ℓ^∞ struktuuri kirjeldamisel ning tema omaduste uurimisel on sellest teadmisest vähe kasu.

⁸Tuntud Hahn-Banachi teoreemi põhjal selliseid jätkte f leidub.

$$q = \{\mathbf{w}^{(1)}, \dots, \mathbf{w}^{(m)}\} = \left\{ \mathbf{w}^{(i)} \right\}_{i=1}^m$$

on hulga χ lõplik disjunktne alamhulk, st

$$\mathbf{w}^{(i)} \mathbf{w}^{(j)} := \left(w_k^{(i)} w_k^{(j)} \right)_{k \in \mathbb{N}} = \mathbf{0} := (0, 0, \dots) \quad (i \neq j),$$

siis $\mathbf{w} := \mathbf{w}^{(1)} + \dots + \mathbf{w}^{(m)}$ on 0-1-jada ning öeldakse, et hulk q on *jada $\mathbf{w}$ lahutus*. Lahutust $q = \{\mathbf{w}\}$ nimetame järgnevas *triviaalseks*.

Jada $\mathbf{e} = (1, 1, \dots)$ kõikvõimalike lahutuste hulka märgime tähega L . Selles defineerime osalise järjestuse $\leq$, kus seos

$$q = \left\{ \mathbf{w}^{(i)} \right\}_{i=1}^m \leq q' = \left\{ \mathbf{w}'^{(j)} \right\}_{j=1}^r$$

tähendab, et kas $q' = q$ või q' on rangelt peenem kui q , st q' on saadud lahutusest q sel viisil, et vähemalt üks $\mathbf{w}^{(i)} \in q$ on asendatud tema mittetriviaalse lahutusega. Niisuguse järjestusega on L suunatud hulk⁹.

Reimersi konstruktsioonis on tähtsal kohal lahutuste süsteemid $\mathbf{q} = \{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, milles $1^0 q_1 = \left\{ \mathbf{w}^{(i)} \right\}_{i=1}^m \in L$ on niisugune lahutus, kus igas jadas $\mathbf{w}^{(i)}$ on lõpmata palju liikmeid $w_k^{(i)} = 1$; olgu need selles jadas indeksitega¹⁰ i_n , ja 2^0 kui $n = 2, 3, \dots$, siis

$$\begin{aligned} q_2 &:= \left\{ \mathbf{e}^{(i_1)}, \mathbf{w}^{(i)} - \mathbf{e}^{(i_1)} \right\}_{i=1}^m, \\ q_3 &:= \left\{ \mathbf{e}^{(i_1)}, \mathbf{e}^{(i_2)}, \mathbf{w}^{(i)} - \left(\mathbf{e}^{(i_1)} + \mathbf{e}^{(i_2)} \right) \right\}_{i=1}^m, \\ &\dots \\ q_n &:= \left\{ \mathbf{e}^{(i_1)}, \dots, \mathbf{e}^{(i_{n-1})}, \mathbf{w}^{(i)} - \left(\mathbf{e}^{(i_1)} + \dots + \mathbf{e}^{(i_{n-1})} \right) \right\}_{i=1}^m, \\ &\dots \end{aligned}$$

⁹Mingi järjestusseosega $\leq$ varustatud hulka Γ nimetatakse suunatud hulgaks, kui suvaliste $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ korral leidub $\gamma'' \in \Gamma$, et $\gamma \leq \gamma''$ ning $\gamma' \leq \gamma''$. Öeldakse, et reaalarvude suunatud pere $(y_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ koondub arvuks y , kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline $\gamma_0 \in \Gamma$, et $|y_\gamma - y| < \varepsilon$ iga $\gamma \geq \gamma_0$ puhul.

¹⁰Näiteks, kui $q = \{\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)}\}$, kus $\mathbf{w}^{(1)} = (1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots)$ ja $\mathbf{w}^{(2)} = (0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$, siis vastavad indeksite jadad on $(1_n) = (1, 2, 4, 5, \dots, 3n-2, 3n-1, \dots)$ ning $(2_n) = (3n)$.

Pole kahtlust, et $q_n \leq q_{n+1}$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Edasi vaadeldakse selliseid suunatud alamhulki $Q \subset L$, mis rahuldavad tingimusi

- kui $q_1 \in Q$, siis $q_n \in Q$ iga $n \in \mathbb{N}$ puhul, ja
- triviaalne lahutus $\{\mathbf{e}\}$ kuulub hulka Q .

Niisuguste hulkade Q seas on L sisalduvuse mõttes suurim, vähim on $Q_0 = \{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, kus

$$q_1 = \{\mathbf{e}\} \text{ ja } q_n = \{\mathbf{e}^{(1)}, \dots, \mathbf{e}^{(n-1)}, \mathbf{e} - (\mathbf{e}^{(1)} + \dots + \mathbf{e}^{(n-1)})\} \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (3)$$

Fikseeritud suunatud hulga Q baasil defineerib Reimers oma *kontinuaalsed menetlused*¹¹. Kui igale lahutusele $q \in Q$ seame mingi eeskirja järgi vastavusse reaalarvude jada $\mathbf{b}(q) := (b_k(q))_{k \in \mathbb{N}}$, siis saame jada de pere $(\mathbf{b}(q))_{q \in Q}$. Seostega 1^0 ja 2^0 määratud lahutuste süsteemile $\mathbf{q} = \{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ seame vastavusse maatriksi $\mathbf{A}(\mathbf{q}) = (a_{nk}(\mathbf{q}))_{n,k \in \mathbb{N}}$ nii, et – see on Reimersi konstruktsiooni trikikoht! –

$$(a_{nk}(\mathbf{q}))_{k \in \mathbb{N}} = \mathbf{a}^{(n)}(q_n) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

kus jada $\mathbf{a}^{(n)} := (a_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$ on maatriksi n -s rida.

Reaalarvude jada $\mathbf{x} = (x_k)$ ja indeksi $n \in \mathbb{N}$ korral tähistame

$$\mathfrak{A}(\mathbf{x}, q_n) := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}(\mathbf{q}) x_k,$$

kui vaadeldav arvrida koondub. Ütleme, et jada $\mathbf{x}$ on *summeeruv kontinuaalse menetlusega* $\mathfrak{A}$ *arvuks* y , kui eksisteerib piirväärtus $\lim_Q \mathfrak{A}(\mathbf{x}, q_n) =: \lim_{\mathfrak{A}} \mathbf{x}$, mis võrdub arvuga y . Seejuures koonduvus $y = \lim_Q \mathfrak{A}(\mathbf{x}, q_n)$ on defineeritud järgmiselt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists q = q(\varepsilon) \in Q : [q_n \in Q, q_n \geq q] \Rightarrow |\mathfrak{A}(\mathbf{x}, q_n) - y| < \varepsilon.$$

Nii defineeritud menetluste jaoks kehtivad järgmised kaks põhiteoreemi.

(A) *Menetlus* $\mathfrak{A}$ *summeerib tõkestatult*, st lisatingimusel¹²

$$\sup_{q_n \in Q} |\mathfrak{A}(\mathbf{x}, q_n)| < \infty,$$

¹¹Termin *kontinuaalne* tuleneb asjaolust, et L on kontiinumide võimsusega hulk.

¹²Peame silmas, et koonduv pere ei pruugi olla tõkestatud.

kõik koonduvad jaded parajasti siis, kui

$$\sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}(\mathbf{q})| \mid n \in \mathbb{N}, q_n \in Q \right\} < \infty \quad (4)$$

ning jaded $\mathbf{e}$ ja $\mathbf{e}^{(k)}$ ($k \in \mathbb{N}$) on tõkestatult $\mathfrak{A}$ -summeeruvad.

(B) *Menetlus $\mathfrak{A}$ summeerib tõkestatult kõik tõkestatud jaded (sel juhul ütleme, et $\mathfrak{A}$ on ℓ^∞ -konservatiivne) parajasti siis, kui juhul $Q = L$ kehtib tingimus (4) ja kõik 0-1-jaded on tõkestatult $\mathfrak{A}$ -summeeruvad¹³.*

Mistahes ℓ^∞ -konservatiivse $\mathfrak{A}$ puhul garanteerib tingimus (4) arvrea $\sum_{k=1}^{\infty} \lim_{\mathfrak{A}} (\mathbf{w}^k)$ absoluutse koonduvuse, seega eksisteerib iga 0-1-jada $\mathbf{w}$ korral

$$\rho(\mathfrak{A}, \mathbf{w}) := \lim_{\mathfrak{A}} \mathbf{w} - \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{\mathfrak{A}} (\mathbf{w}^k).$$

Tingimusi 1^0 ja 2^0 rahuldava lahutuste süsteemi $\mathbf{q} = \{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ja suvalise jada $\mathbf{x} \in \mathcal{w}$ jaoks moodustame summad

$$S(\mathbf{x}, q_n) := \sum_{i=1}^m \rho(\mathfrak{A}, \mathbf{w}^{(i)}) x_{i_n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

kus, nagu eespool kokku lepitud, lahutuses $q_1 = \{\mathbf{w}^{(i)}\}_{i=1}^m$ sisaldab iga jada $\mathbf{w}^{(i)}$ lõpmata palju ühtesid ning need paiknevad kohtadel i_n . Piirväärtust

$$\lim_Q S(\mathbf{x}, q_n) =: S_{\mathfrak{A}}(\mathbf{x}),$$

kui see eksisteerib, nimetab Reimers *jada $\mathbf{x}$ $\mathfrak{A}$ -integraaliks*. Seejuures

- iga koonduva jada $\mathbf{x}$ korral $S_{\mathfrak{A}}(\mathbf{x}) = \rho(\mathfrak{A}, \mathbf{e}) \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ ning

$$\lim_{\mathfrak{A}} \mathbf{x} = \rho(\mathfrak{A}, \mathbf{e}) \lim_{k \rightarrow \infty} x_k + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lim_{\mathfrak{A}} \mathbf{e}^{(k)} \right) x_k;$$

¹³Paneme tähele, et väide (A) on igati kooskõlas „tavalise“ summeeruvusteooria eespool sõnastatud põhiteoreemiga. See saadakse juhul $Q = Q_0$ (vt. (3)), nimelt on $\mathfrak{A}$ siis tavaline maatriksmenetlus $\mathbf{A}$. Samas situatsioonis, st juhul $Q = Q_0$ on väite (B) puhul tingimus (4) aga üleliigne, see on täidetud, kui kõik 0-1-jaded on $\mathbf{A}$ -summeeruvad (vrd. (1)).

- iga tõkestatud jada $\mathbf{x}$ puhul

$$\lim_{\mathfrak{A}} \mathbf{x} = S_{\mathfrak{A}}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lim_{\mathfrak{A}} \mathbf{e}^{(k)} \right) x_k. \quad (5)$$

Ühe konkreetse ℓ^∞ -konservatiivsete menetluste klassi defineerimiseks kasutab Reimers funktsionaale $s: \chi \rightarrow [0, \infty)$, mis rahuldavad tingimusi¹⁴

(a) $s(\mathbf{e}) = 1$,

(b) $s(\mathbf{w} + \mathbf{w}') = s(\mathbf{w}) + s(\mathbf{w}')$, kui $\mathbf{w}\mathbf{w}' = \mathbf{0}$, ning

(c) $s(\mathbf{w}) = s(\mathbf{w}'')$, kui $\mathbf{w}'' = (w_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$.

Kontinuaalsete menetluste konstrueerimisel aluseks olnud skeemi kasutades laiendab ta funktsionaali s nii, et see rakendub kõigile tõkestatud jadadele. Täpsemalt, suunatud alamhulgas $Q \subset L$ võetud lahutuste süsteemi $\mathbf{q} = \{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ning jada $\mathbf{x} \in \omega$ puhul moodustatakse summad $s(\mathbf{x}, q_n) := \sum_{i=1}^m s(\mathbf{w}^{(i)}) x_{i_n}$ ning kui eksisteerib piirväärtus

$$s(\mathbf{x}) := \lim_Q s(\mathbf{x}, q_n),$$

siis öeldakse, et jada $\mathbf{x}$ on hulgas Q s -koonduv summaks $s(\mathbf{x})$. Seejuures

- $s(\mathbf{w}) = s(\mathbf{w})$ iga 0-1-jada $\mathbf{w}$ korral,

- $s(\mathbf{x}) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ iga koonduva jada $\mathbf{x}$ puhul,

- jada $\mathbf{x}$ on s -koonduv juhul $Q = L$ parajasti siis, kui ta on *peaaegu tõkestatud*, st kui leidub selline 0-1-jada $\mathbf{w}$, et $s(\mathbf{w}) = 0$ ja $\mathbf{x} - \mathbf{x}\mathbf{w} \in \ell^\infty$.

Kui defineerida süsteemi $\mathbf{q} = \{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ puhul maatriks $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ seosega

$$a_{nk}(\mathbf{q}) := \begin{cases} s(\mathbf{w}^{(i)}), & \text{kui } k = i_n, \\ 0, & \text{kui } k \neq i_n, \end{cases}$$

siis nende maatriksitega määratud kontinuaalset menetlust $\mathfrak{A}$ nimetab Reimers (mitte päris õnnestunult) *ühikmenetluseks*. Sel juhul $\mathfrak{A}(\mathbf{x}, q_n) =$

¹⁴Neid tingimusi rahuldavad näiteks *Banachi piirväärtused*. s.o pidevad lineaarsed funktsionaalid ruumis ℓ^∞ , mis saadakse piirväärtusfunktsionaali $\lim: c \rightarrow \mathbb{R}$ jätkamisel ruumist c ruumi ℓ^∞ .

$s(\mathbf{x}, q_n)$, mistõttu

- iga hulgas Q $\mathfrak{A}$ -summeeruv jada on peaaegu tõkestatud,
- juhul $Q = L$ on jada $\mathbf{x}$ jaoks $\mathfrak{A}$ -summeeruvus ja $\mathfrak{s}$ -koonduvus samaväärsed tingimused,
- kui $Q = Q_0$, siis $c_{\mathfrak{A}} = c$.

Kuna tõkestatud jadad on peaaegu tõkestatud ja ühikmenetlused on regulaarsed, siis oleme saanud *sellised regulaarsed kontinuaalsed menetlused* $\mathfrak{A}$, mis summeerivad tõkestatult kõik tõkestatud jadad. Niisiis, Steinhausi teoreem kontinuaalsete menetluste jaoks üldjuhul ei kehti.

Ka Reimersi põhieesmärk – esitada ruumis ℓ^∞ pidevad lineaarsed funktsionaalid $\mathfrak{A}$ -piirväärtustena – on nendele menetlustele jõukohane. Kui $f \in (\ell^\infty)'$ ja $\mathbf{q} = \{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ on fikseeritud lahutuste süsteem esimese lahutusega $q_1 = \{\mathbf{w}^{(i)}\}_{i=1}^m$, siis juhul $Q = L$ moodustatakse maatriks $\mathbf{A}(\mathbf{q}) = (a_{nk}(\mathbf{q}))$ nii, et iga $i = 1, \dots, m$ korral

$$a_{ni_r}(\mathbf{q}) := \begin{cases} f(\mathbf{e}^{(i_r)}), & \text{kui } r < n, \\ f(\mathbf{w}^{(i)}) - \sum_{j=1}^{n-1} f(\mathbf{e}^{(i_j)}), & \text{kui } r = n, \\ 0, & \text{kui } r > n. \end{cases}$$

Selliste maatriksitega määratud kontinuaalne menetlus $\mathfrak{A}$ *summeerib tõkestatult iga tõkestatud jada* $\mathbf{x}$ arvuks $f(\mathbf{x})$, teisisõnu, iga $\mathbf{x} \in \ell^\infty$ korral $f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathfrak{A}} \mathbf{x}$ ehk (vrd. valem (5))

$$f(\mathbf{x}) = S_{\mathfrak{A}}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k \quad (\mathbf{x} \in \ell^\infty),$$

kus $u_k := f(\mathbf{e}^{(k)})$ ning $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| < \infty$. Seejuures funktsionaali f norm kaasruumis $(\ell^\infty)'$ arvutatakse valemiga

$$\|f\| = \sup_{q \in Q} \sum_{i=1}^m \left| \rho(\mathfrak{A}, \mathbf{w}^{(i)}) \right| + \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|.$$

Reimersi teooriale lisab oluliselt kaalu asjaolu, et *summa* $\mathfrak{s}$ *abil saab*

esitada funktsioonide $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue'i integraali¹⁵ $\mathcal{L}\text{-}\int_0^1 x(t) dt$. Kõigepealt näitab autor, et igale Lebesgue'i mõttes mõõduvale (lühidalt $\mathcal{L}$ -mõõduvale) alamhulgale $A \subset [0, 1]$ vastab 0-1-jada $\mathbf{w}_A$ nii, et

- $s(\mathbf{w}_A)$ on hulga A Lebesgue'i mõõt ja
- kui $A, B \subset [0, 1]$ ning $A \cap B = \emptyset$, siis $\mathbf{w}_A \mathbf{w}_B = \mathbf{0}$.

Seega, kui $\{A_1, \dots, A_m\}$ on hulga $[0, 1]$ $\mathcal{L}$ -mõõtuv lahutus, s.o selline $\mathcal{L}$ -mõõtuvate alamhulkade süsteem, et

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j) \quad \text{ja} \quad [0, 1] = \bigcup_{i=1}^m A_i,$$

siis sellele vastab jada $\mathbf{e}$ lahutus $q_1 = \{\mathbf{w}^{(i)}\}_{i=1}^m$, kus $\mathbf{w}^{(i)} = \mathbf{w}_{A_i}$. Teiseks, igale lõigus $[0, 1]$ tõkestatud funktsioonile x seab Reimers vastavusse tõkestatud jada $\mathbf{x}$ nii, et suvalise $\varepsilon > 0$ puhul leiduvad $\mathcal{L}$ -mõõtuv lahutus $\{A_1, \dots, A_m\}$ ning indeks $N \in \mathbb{N}$, mille korral

$$|x(t) - x_{i_n}| < \varepsilon, \quad \text{kui } t \in A_i \text{ ja } n \geq N.$$

Koosnegu alamhulk $Q_{\mathcal{L}} \subset L$ jada $\mathbf{e}$ kõikvõimalikest lahutustest $q = \{\mathbf{w}^{(i)}\}_{i=1}^m$, kus $\mathbf{w}^{(i)}$ vastab mingile $\mathcal{L}$ -mõõduvale hulgale $A_i \subset [0, 1]$. Siis lõigu $[0, 1]$ $\mathcal{L}$ -mõõtuvate lahutuste $\{A_1, \dots, A_m\}$ ja jada $\mathbf{e}$ lahutuste $q = \{\mathbf{w}^{(i)}\}_{i=1}^m \in Q_{\mathcal{L}}$ vahel on üksühene vastavus. Seejuures iga tõkestatud $\mathcal{L}$ -mõõduva funktsiooni $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue'i integraalsumma $\sigma = \sum_{i=1}^m \eta_i \mu(A_i)$ puhul

$$\lim_{Q_{\mathcal{L}}} (\sigma - s(\mathbf{x}, q_n)) = 0,$$

¹⁵Laskumata Lebesgue'i integraali definitsiooniga seotud tehnilistesse detailidesse, märgime vaid selle põhimõttelist erinevust Riemanni integraalist, mida õpetatakse analüüsi põhikursustes. Funktsiooni $x: [a, b] \rightarrow [c, d]$ Riemanni integraalsumma on kujul $\sum_{k=1}^m x(\xi_k) \Delta t_k$, kus $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ on lõigu $[a, b]$ alajaotus, $\Delta t_k := t_k - t_{k-1}$ ja $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$. Riemanni integraal on selle summa piirväärtus protsessis $\max_{1 \leq k \leq m} \Delta t_k \rightarrow 0$. Lebesgue'i integraali puhul lähtutakse alajaotustest $c = r_0 < r_1 < \dots < r_n = d$ ja osalõikude originaalidest $E_k := x^{-1}([r_k, r_{k-1}])$, selle integraalsumma on kujul $\sum_{k=1}^m \eta_k \mu(E_k)$, kus $\eta_k \in [r_{k-1}, r_k]$ ning $\mu(E_k)$ on hulga E_k Lebesgue'i mõõt. Viimane defineeritakse kui nn välismõõt $\mu^*(E_k) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) \mid (a_i, b_i) \subset [a, b], E_k \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \right\}$, eeldusel et $\mu^*(E_k) = b - a - \mu^*([a, b] \setminus E_k)$.

Märgime veel, et Lebesgue'i mõttes integreeruvate funktsioonide hulk $\mathcal{L}_1$ sisaldab kõik Riemanni mõttes integreeruvad funktsioonid. Seejuures on $\mathcal{L}_1$ Banachi ruum, mis teeb Lebesgue'i integraali mõiste eelistatavamaks funktsionaalanalüüsi seisukohalt.

kus $\mathbf{x}$ on funktsioonile x vastav tõkestatud jada. Teisisõnu,

$$\mathcal{L}\text{-}\int_0^1 x(t) dt = \mathfrak{s}(\mathbf{x}).$$

Niisiis, tõkestatud $\mathcal{L}$ -mõõtuva funktsiooni Lebesgue'i integraali saab esitada kujul $\lim_{\mathfrak{A}}$, kus $\mathfrak{A}$ on kontinuaalne ühikmenetlus.

Esitatud kokkuvõte Reimersi tulemustest on kirjutatud 1967. a ilmunud publikatsiooni [4] põhjal. Kuid mööda ei saa minna ka viis aastat varem ilmunud tööst [3], mis tegelikult on artikli [4] esialgne versioon. Sisult, mahult ja struktuurilt on kaks teksti üsna sarnased ning eespool kirjeldatud uute menetluste konstruktsioon on töös [3] põhimõtteliselt olemas, puudub Lebesgue'i integraali puudutav osa. Seejuures on töös [3] autori lähenemine probleemidele sirgjoonelisem, mistõttu jäävad õhku mõned kahtlused ning vastuseta küsimused. Sellest pisut toorevõitu artiklist polekski põhjust rääkida, kui mitte asjaolu, et laiema, mitte-venekeelse matemaatikute kogukonnani jõudis info Reimersi ideedest artikli [3] kajastuste läbi referatiivsetes ajakirjades. Nimelt sai neis just [3] põhjalikuma käsitluse ning viimistletud tekstile [4] pühendatud referaadid vaid viitasid tööle [3]. Viimast refereerisid õnneks asjatundlikud autorid: ajakirjas *Mathematical Reviews* G. G. Lorentz (MR0156128 (27#6060)) ning ajakirjas *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete* M. S. Rangachari¹⁶. Viimase referaat Zbl 0151 05804 oli ajakirja formaati arvestades märkimisväärselt põhjalik. Hinnangutes olid mõlemad vaoshoitud, nentides, et osa autori arutlustest jäi neile väheveenvaks. Lorentz kahtles summa $\mathfrak{s}$ definitsiooni korrektsuses. Nimelt oli artiklis [3] funktsionaali $s: \chi \rightarrow [0, \infty)$ definitsioonis eelpool toodud

¹⁶G. G. Lorentzi (1910 – 2006) roll summeeruvusteorია arengus 20. sajandil oli tähelepanuväärne. Sündinud Sankt-Peterburgis ning saanud kandidaadikraadi Leningradi ülikoolis, sattus ta teise maailmasõja ajal Saksamaale. Habileerus Tübingeni ülikoolis, oli mitmete Saksamaa, Kanada ja USA ülikoolide professor. Oma õpilastest nimetab ta teiste hulgas K. Zellerit, kes oli kaasaegse summeeruvusteorია üks peaideolooge, ja meilgi tuntud monograafia autorit G. M. Peterseni. Oma 1948. a ilmunud artikliga pani Lorentz sisuliselt aluse peaaegu koonduvate jadade teooriale.

M. S. Rangachari sulest on ilmunud palju summeeruvusteorია alaseid töid, põhiliselt Tauberi teoreemide kohta, aga ka mittearhimeediliste jadade summeeruvusest.

tingimustele (a) – (c) lisatud veel üks, mis väidetavalt pidi garanteerima selle funktsionaali ühesuse. Selle seadis Lorentz oma referaadis kahtluse alla. Nähtavasti oli see Lorentzi etteheide peamine põhjus, mis sundis Reimersit kirjutama kogu töö uut versiooni.

Nagu eespool märgitud, esitas väga põhjaliku ülevaate Reimersi tulemustest Kangro oma artiklis [1], mis tutvustab Tartu Riiklikus Ülikoolis aastatel 1964 – 1967 teostatud summeeruvusteooria–alaseid uurimusi. Kuigi selle kirjanduse loetelus on vaid töö [3] (artikkel [4] polnud ülevaate [1] kirjutamise ajaks veel ilmunud), kajastab tekst just artikli [4] tulemusi. Asjaolu, et neile on pühendatud peaaegu pool kogu artikli [1] mahust, näitab Kangro kõrget hinnangut. Kontinuaalsetele menetlustele viitab Kangro ka oma suures ülevaateartiklis [2].

Doktoritöö perspektiivist vaadates oli Reimersi jaoks kõige olulisem saada positiivne hinnang oma tulemustele Moskvast, analüüsi valdkonnas nimekatelt spetsialistidelt. Teatavasti korraldas Nõukogude Liidus teaduskraadide andmist VAK¹⁷. See riiklik organ andis lubasid erialade kaupa kaitsmiskomisjonide moodustamiseks kõrgkoolides ja uurimis-asutustes ning kinnitas või lükkas tagasi kaitsmiskomisjonide poolt omistatud teaduskraadid. VAK-i ekspertidena tegutsesid valdkondade tunnustatud teadlased, nende hinnangust sõltus tegelikult väitekirja saatus. Eriti oluline oli ekspertide roll doktoritööde puhul, millele esitati Nõukogude Liidus väga kõrgeid nõudmisi, reeglina eeldati, et doktoritöö pidi avama matemaatikas uue uurimisvaldkonna.

On teada, et Reimers esines ettekandega oma tulemustest Moskvast P. L. Uljanovi¹⁸ seminaris, kelle sõnal oli VAK-is kaalu. Paraku loodetud toetust autorile ei tulnud, seminarist osavõtjate suhtumine tema töösse jäi ilmselt skeptiliseks. Selle peamine põhjus oli tõenäoliselt Moskva matemaatikute üldine suhtumine summeeruvusteooriasse. Nad olid huvitatud selle rakendustest funktsiooniteoorias, kuid sellega seotud üldteoreetilisi probleeme ei loetud doktoritööde tasemel „dissertaablisk“. Võimalik, et oma osa mängis ka esitatud materjali tehniline keerukus. Kuigi Reimers valdas perfektselt vene keelt ja, nagu

¹⁷VAK on akronüüm venekeelsest nimetusest *Võsšaja atestatsionnaja komissija*.

¹⁸P. L. Uljanov (1928 – 2006) oli aastast 1960 Moskva Riikliku Ülikooli professor ning funktsionaalanalüüsi ja funktsiooniteooria kateedri juhataja.

tema loenguid kuulanud üliõpilased on kinnitanud, tal oli eriline oskus keerulisi matemaatilisi probleeme lihtsalt esitada, Moskva skeptilise kuulajaskonna veenmiseks sellest nähtavasti ei piisanud.

Pärast ebaõnnestumist Moskvas Reimersi entusiasm kontinuaalsete menetlustega edasi tegelda vähenes. Tõsi küll, ta avaldas sel teemal veel lühiartikli [5] s -koonduvusega seotud ühilduvusküsimustest ning artikli [6], mis on seotud Lebesgue'i integraali esitamisega summa s abil, kuid naases seejärel oma uurimistöös tavaliste maatriksmenetluste juurde ning keskendus Tauberi teoreemidele. Ühele Eesti summeeruvusteooria ajaloo omanäolisele ning paljulubavale peatükile, mis sisuliselt jäi lõpetamata, oli pandud punkt.

Küsimusele, kas Reimersi tulemused väärinuksid VAK-i doktorikraadi, pole ühest vastust. Aga suure tõenäosusega võib väita, et nendes oli olemas doktoritöö potentsiaal, mille nimel oleks tasunud edasi töötada. Nende tulemuste edasiarendamine nii üldise teooria, kuid eriti rakenduste osas andnuks arvatavasti ka VAK-i poolt aktsepteeritava doktoritöö.

Kirjandus

1. G. Kangro. Mõnedest uurimustest summeeruvusteoorias. *Eesti NSV Tead. Akad. Toimetised, Füüs.-Mat. seeria*, 16, no. 3 (1967), 255–266 (vene keeles).
2. G. Kangro. Jadade ja ridade summeeruvusteooria. *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Mat. Anal.*, 12 (1974), 5–70 (vene keeles).
3. E. Reimers. Uued üldised summeerimismenetlused. *Tartu Riikl. Ül. Toimetised*, vih. 129 (1962), 119–154 (vene keeles).
4. E. Reimers. Kontinuaalsed summeerimismenetlused. *Tartu Riikl. Ül. Toimetised*, vih. 206 (1967), 50–89 (vene keeles).
5. E. Reimers. s -koonduvuse ühilduvus. *Tartu Riikl. Ül. Toimetised*, vih. 220 (1968), 131–135 (vene keeles).
6. E. Reimers. Funktsioonide esitamine arvujadade abil. *Tartu Riikl. Ül. Toimetised*, vih. 281 (1971), 129–139 (vene keeles).