

Pöördülesanded murruliste tuletistele

JAAN JANNO JA NATALIJA KINASH
Tallinna Tehnikaülikool

Murrulisi tuletisi iseloomustab mittelokaalsus. See võimaldab neile püstitada ülesandeid, mis tavaliste täisarvuliste tuletiste korral ei oma mõtet.

Vaatleme Riemann-Liouville'i ja Caputo tuletisi järguga $\alpha \in (0, 1)$. Need on defineeritud järgmiste valemitega:

$$D_{RL}^{\alpha} u(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} * u(t) \right], \quad t > 0 \quad \text{ja}$$

$$D_C^{\alpha} u(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} * u'(t), \quad t > 0,$$

kus sümbol $*$ tähistab konvolutsiooni, st

$$f_1 * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau, \quad t > 0.$$

Olgu $T > 0$ ja $\delta \in (0, T)$. Eeldame, et funktsioon u ja tema tuletis on teada vahemikus $(T - \delta, T)$. Eesmärgiks on jätkata see funktsioon tervesse vahemikku $(0, T)$. On selge, et täisarvulise tuletise korral ei ole see võimalik. Kuid funktsiooni u murruline tuletis vahemikus $(T - \delta, T)$ sisaldab informatsiooni selle funktsiooni käitumise kohta ka eelnevas vahemikus $(0, T - \delta)$ ja taoline probleemi püstitus on täiesti asjakohane.

Tõestame püstitatud jätkamise ülesande ühesuse murrulise tuletise korral. Kuna ülesanne on lineaarne, piisab järgmiste implikatsioonide kehtivuse näitamisest:

$$u(t) = 0, D_{RL}^{\alpha} u(t) = 0, t \in (T - \delta, T) \implies u(t) = 0, t \in (0, T), (1)$$

$$u(t) = 0, D_C^{\alpha} u(t) = 0, t \in (T - \delta, T) \implies u(t) = 0, t \in (0, T). (2)$$

Tõestame kõigepealt implikatsiooni (1). Rahuldagu funktsioon u tingimusi $u \in L_1(0, T)$, $\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} * u \in W_1^1(0, T)$ ja eeldame, et implikatsiooni

(1) vasak pool kehtib. Kuna $u(t) = 0$, $t \in (T - \delta, T)$, siis avaldis $D_{RL}^\alpha u(t) = 0$, $t \in (T - \delta, T)$ teisendub järgmisele kujule:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{T-\delta} \frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} u(\tau) d\tau = 0, \quad t \in (T - \delta, T).$$

Tuumas esinev singulaarsus on ära lõigatud ja me saame operaatoriga $\frac{d}{dt}$ integraali alla minna:

$$\int_0^{T-\delta} \frac{(t-\tau)^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} u(\tau) d\tau = 0, \quad t \in (T - \delta, T). \quad (3)$$

Tuum on koguni lõpmata arv kordi diferentseeruv. Seega rakendades võrdusele (3) üha uuesti ja uuesti operaatorit $\frac{d}{dt}$ saame järgmise võrdustejada:

$$\int_0^{T-\delta} \frac{(t-\tau)^{-\alpha-n}}{\Gamma(-\alpha-n+1)} u(\tau) d\tau = 0, \quad t \in (T - \delta, T), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Valime konkreetselt ühe punkti $t_0 \in (T - \delta, T)$ ja korrutame konstandiga $\Gamma(-\alpha - n + 1)$. Saame

$$\int_0^{T-\delta} (t_0 - \tau)^{-\alpha-n} u(\tau) d\tau = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Tehes võrduse (5) vasakul poolel oleva integraali all muutuja vahetuse $\varrho = (t_0 - \tau)^{-1}$ teisendub see järgmiselt:

$$\int_0^{T-\delta} (t_0 - \tau)^{-\alpha-n} u(\tau) d\tau = \int_a^b \varrho^{\alpha+n-2} u(t_0 - \frac{1}{\varrho}) d\varrho,$$

kus $a = t_0^{-1}$, $b = (t_0 - T + \delta)^{-1}$.² Järelikult saame võrdusest (5), et

$$\int_a^b \varrho^k v(\varrho) d\varrho = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

kus $v(\varrho) = \varrho^{\alpha-1} u(t_0 - \frac{1}{\varrho})$. Neist avaldistest tuleneb, et

$$\int_a^b P(\varrho) v(\varrho) d\varrho = 0,$$

²Kuna kujutus $[0, T - \delta] \ni \tau \mapsto (t_0 - \tau)^{-1} \in [a, b]$ on difeomorfne ja $u \in L_1(0, T - \delta)$, siis on taoline muutuja vahetus korrektne ja $u(t_0 - \frac{1}{\varrho}) \in L_1(a, b)$ (vt [1], Section 16.4).

kus P on suvaline polünoom. Kuna polünoomide hulk on kõikjal tihe ruumis $C[a, b]$, saame

$$\int_a^b z(\rho) v(\rho) d\rho = 0 \quad \forall z \in C[a, b]. \quad (7)$$

Valemiga $Vz = \int_a^b v(\rho) z(\rho) d\rho$ defineeritud funktsionaal V kuulub ruumi $C[a, b]$ kaasruumi ja tema norm avaldub kujul $\|V\| = \|v\|_{L_1(a, b)}$. Kuna (7) põhjal $V = 0$, siis $v(\rho) \equiv 0$. Siit tuleneb, et $u(t) = 0$, $t \in (0, T - \delta)$. Kuna eelduse põhjal $u(t) = 0$, $t \in (T - \delta, T)$, saame $u(t) = 0$, $t \in (0, T)$. Implikatsioon (1) on tõestatud.

Implikatsiooni (2) tõestus on sarnane. Tõsi küll, tuleb eeldada u suuremat siledust. Olgu $u \in W_1^1(0, T)$ ja kehtigu (2) vasak pool. Siis

$$\int_0^{T-\delta} \frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} u'(\tau) d\tau = 0, \quad t \in (T-\delta, T). \quad (8)$$

Operaatori $\frac{d}{dt}$ järkjärgulise rakendamisega tuletame võrdustejada

$$\int_0^{T-\delta} \frac{(t-\tau)^{-\alpha-n}}{\Gamma(-\alpha-n+1)} u'(\tau) d\tau = 0, \quad t \in (T-\delta, T), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Fikseerime $t_0 \in (T-\delta, T)$. Saame

$$\int_0^{T-\delta} (t_0 - \tau)^{-\alpha-n} u'(\tau) d\tau = 0, \quad t \in (T-\delta, T), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Edasi teeme muutuja vahetuse $\rho = (t_0 - \tau)^{-1}$. Saame $\int_a^b \rho^n v(\rho) d\rho = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, kus $v(\rho) = \rho^{\alpha-2} u'(t_0 - \frac{1}{\rho})$. Kordame eelmise tõestuse samme. Tulemuseks saame $v(\rho) \equiv 0$, millest järeldub, et $u'(t) = 0$, $t \in (0, T - \delta)$. Kuna $u(t) = 0$, $t \in (T - \delta, T)$ ja u on pidev, siis saamegi $u(t) = 0$, $t \in (0, T)$.

Pöördülesanded üldistatud murrulistele tuletistele

Järgnevalt vaatleme üldistatud murrulisi tuletisi, milles astmefunktsioon on asendatud suvalise tuumaga. Need on defineeritud järgmiselt:

$$D_{RL}^{\{k\}} u(t) = \frac{d}{dt} [k * u(t)], \quad t > 0 \quad \text{ja}$$

$$D_C^{\{k\}} u(t) = k * u'(t), \quad t > 0,$$

kus k on etteantud funktsioon. Näiteid tuuma k kohta on toodud paragrahvi lõpus.

Meid huvitab küsimus: kas eelmises paragrahvis tõestatud implikatsioonid (1) ja (2) jäävad taolise üldistuse juures kehtima? Paraku eelmises paragrahvis kasutatud meetod ei tööta juba lihtsamate üldistuste korral. Näiteks kahe murrulise tuletise summa korral, kui $k(t) = \frac{t^{-\alpha_1}}{\Gamma(1-\alpha_1)} + \frac{t^{-\alpha_2}}{\Gamma(1-\alpha_2)}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$, saaksime võrdustejada (4) asemel

$$\int_0^{T-\delta} \left[\frac{(t-\tau)^{-\alpha_1-n}}{\Gamma(-\alpha_1-n+1)} + \frac{(t-\tau)^{-\alpha_2-n}}{\Gamma(-\alpha_2-n+1)} \right] u(\tau) d\tau = 0, \quad t \in (T-\delta, T),$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Nendest võrranditest ei saa $t = t_0$ fikseerimise ja muutuva vahetusega üle minna seostele kujul (6). Ei aita ka võrrandite lineaarsete kombinatsioonide moodustamine.

Õnneks leidub üks teine elegantne meetod, mida saab üldise k korral kasutada. Meetod on publitseeritud artiklis [2].

Tähistame funktsiooni $f : (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ Laplace'i teisendust järgmiselt:

$$\hat{f}(s) = (\mathcal{L}_{t \mapsto s} f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

Eeldusel, et

$$\exists \mu \in \mathbb{R} : \int_0^\infty e^{-\mu t} |f(t)| dt < \infty,$$

Laplace'i teisendus $\hat{f}$ eksisteerib ja on analüütiline pooltasandil $\text{Re } s > \mu$. Kui f on tõkestatud kandjaga, siis on $\hat{f}$ täisfunktsioon.

Teoreem. [2] *Rahuldagu funktsioon k järgmisi tingimusi:*

$$\exists \mu \in \mathbb{R} : \int_0^\infty e^{-\mu t} |k(t)| dt < \infty, \quad (9)$$

$$k \text{ on reaalanalüütiline poollõigis } (0, \infty), \quad (10)$$

$\widehat{k}$ ei ole meromorfselt jätkatav kogu komplekstasandile $\mathbb{C}$. (11)

Siis kehtivad järgmised väited.

Kui $u \in L_1(0, T)$ ja $k * u \in W_1^1(0, T)$, siis

$$u(t) = 0, D_{RL}^{\{k\}} u(t) = 0, t \in (T - \delta, T) \implies u(t) = 0, t \in (0, T). \quad (12)$$

Kui $u \in W_1^1(0, T)$, siis

$$u(t) = 0, D_C^{\{k\}} u(t) = 0, t \in (T - \delta, T) \implies u(t) = 0, t \in (0, T). \quad (13)$$

Tõestus. Olgu $u \in L_1(0, T)$, $k * u \in W_1^1(0, T)$ ja kehtigu implikatsiooni (12) vasak pool. Jätkame funktsiooni u nulliga vahemikku (T, ∞) ja defineerime

$$f(t) = D_{RL}^{\{k\}} u(t), \quad t > 0.$$

Kehtib seos

$$f(t) = \frac{d}{dt} \int_0^{T-\delta} k(t-\tau) u(\tau) d\tau = \int_0^{T-\delta} k'(t-\tau) u(\tau) d\tau, \quad \text{kui } t > T - \delta.$$

On võimalik näidata, et eeldusest (10) järeldub, et funktsioon f on reaalanalüütiline vahemikus $(T - \delta, \infty)$.³ Implikatsiooni (12) vasaku poole põhjal kehtib $f(t) = 0$, $t \in (T - \delta, T)$. Analüütilise jätkamise teel saame $f(t) = 0$, $t \in (T - \delta, \infty)$. Nii u kui ka f on tõkestatud kandjaga.

Rakendame võrdusele

$$f(t) = \frac{d}{dt} [k * u(t)], \quad t > 0,$$

Laplace'i teisendust. Saame

$$\widehat{f}(s) = s\widehat{k}(s)\widehat{u}(s) - \theta, \quad \text{Res} > \mu, \quad (14)$$

kus $\theta = k * u(t)|_{t=0}$. Kui oletada, et u ei ole nullfunktsioon, siis tuleneb avaldisest (14) järgmine seos:

$$\frac{\widehat{f}(s) + \theta}{s\widehat{u}(s)} = \widehat{k}(s) \quad \text{kõigi } s \text{ korral, mis rahuldavad } \text{Res} > \mu \text{ ja } s\widehat{u}(s) \neq 0. \quad (15)$$

³Seda saab näidata nii, et k jätkatakse kompleksanalüütiliseks funktsiooniks $k_{\mathbb{C}}(z)$ ja tõestatakse, et $f_{\mathbb{C}}(z) = \int_0^{T-\delta} k_{\mathbb{C}}(z-\tau) u(\tau) d\tau$ rahuldab Cauchy-Riemanni võrrandeid. Viimasest tulenebki, et $f'_{\mathbb{C}}$ ahend f on reaalanalüütiline vahemikus $(T - \delta, \infty)$. Täpsemalt võib lugeda artiklist [2].

Kuna u ja f on tõkestatud kandjaga, siis on $\hat{u}$ ja $\hat{f}$ täisfunktsioonid. Seega on avaldise (15) vasak pool meromorfselt jätkatav kogu komplekstasandile $\mathbb{C}$. Kuid eelduse (11) põhjal ei ole seda võrduse (15) parem pool. Jõudsimme vastuoluni. Järelikult on u nullfunktsioon ja see tõestabki implikatsiooni (12).

Tõestame ka (13). Olgu $u \in W_1^1(0, T)$ ja kehtigu implikatsiooni (13) vasak pool. Tähistame $v = u'$, jätkame funktsiooni v nulliga vahemikku (T, ∞) ja defineerime

$$f(t) = D_c^{\{k\}} u(t), \quad t > 0 \quad \text{ehk} \quad f(t) = k * v(t), \quad t > 0.$$

Taas on võimalik näidata, et f on reaalanalüütiline vahemikus (T, ∞) . Seega eeldusest $f(t) = 0$, $t \in (T - \delta, T)$, tuleneb, et $f(t) = 0$, $t \in (T - \delta, \infty)$. Nii v kui ka f on tõkestatud kandjaga.

Rakendades võrdusele $f = k * v$ Laplace'i teisendust saame $\hat{f}(s) = \hat{k}(s) \hat{v}(s)$, $\text{Res} > \mu$. Kui oletada, et v ei ole nullfunktsioon, siis

$$\frac{\hat{f}(s)}{\hat{v}(s)} = \hat{k}(s) \quad \text{kõigi } s \text{ korral, mis rahuldavad } \text{Res} > \mu \text{ ja } \hat{v}(s) \neq 0. \quad (16)$$

Kuna v ja f on tõkestatud kandjaga, siis on $\hat{v}$ ja $\hat{f}$ täisfunktsioonid ning avaldise (16) vasak pool meromorfselt jätkatav kogu komplekstasandile $\mathbb{C}$. Kuid eelduse (11) põhjal ei ole seda võrduse (16) parem pool. Järelikult v on nullfunktsioon ja u on konstant. Kuna $u(t) = 0$, $t \in (T - \delta, T)$, siis u on nullfunktsioon. Implikatsioon (13) kehtib. $\square$

Järgnevalt toome näiteid Teoreemi tingimusi rahuldavate tuumade kohta.

1. Murruliste tuletiste lõpliku lineaarkombinatsiooni korral $k(t) = \sum_{j=1}^n \gamma_j \frac{t^{-\alpha_j}}{\Gamma(1-\alpha_j)}$, kus $\gamma_j \neq 0$, $0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n < 1$. Eeldused (9) ja (10) on täidetud. Kehtib $\hat{k}(s) = \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{s^{1-\alpha_j}}$. Funktsioonil $\hat{k}$ on hargnemispunktid, järelikult on täidetud ka (11).
2. Jaotatud murruliste tuletiste korral $k(t) = \int_0^1 p(\alpha) \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} d\alpha$, kus $p \in L_1(0, 1)$. Eeldame, et $p(\alpha) \geq 0$, $p(\alpha) \not\equiv 0$. Ilmselt on täidetud (9) ja (10). Kehtib $\hat{k}(s) = \int_0^1 p(\alpha) \frac{1}{s^{1-\alpha}} d\alpha$. Arvutame:

$$\lim_{\substack{\text{Arg } s \rightarrow \pm\pi, \\ |s|=1}} \text{Im } \hat{k}(s) = \int_0^1 p(\alpha) \sin((\alpha-1) \times (\pm\pi)) d\alpha \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 0.$$

Seega on funktsioonil $\widehat{k}(s)$ hüppekoht punktis $s = -1$ ja (11) on täidetud.

3. Tempereeritud murrulise tuletise korral $k(t) = e^{-\lambda t} \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$, kus $\lambda > 0$, $0 < \alpha < 1$. Taas on täidetud (9) ja (10). Laplace'i teisendus $\widehat{k}(s) = \frac{1}{(s+\lambda)^{1-\alpha}}$ omab hargemispunkti, seega on täidetud ka (11).
4. Atangana-Baleanu tuletise korral $k(t) = \frac{1}{1-\alpha} E_\alpha \left(-\frac{\alpha t^\alpha}{1-\alpha} \right)$, $0 < \alpha < 1$, kus E_α on Mittag-Leffleri funktsioon. Jällegi on täidetud (9) ja (10). Laplace'i teisendus $\widehat{k}(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{(1-\alpha)s^\alpha + \alpha}$ omab hargnemispunkti. Järelikult on täidetud ka (11).

Olgu toodud näide ka tuuma kohta, mis ei rahulda Teoreemi tingimusi. Caputo-Fabrizio tuletise tuum on $k(t) = \frac{1}{1-\alpha} e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}t}$, $\lambda > 0$, $0 < \alpha < 1$. Ilmselt on täidetud (9) ja (10). Kuid eeldus (11) ei ole täidetud, sest $\widehat{k}(s) = \frac{1}{(1-\alpha)s+\alpha}$ on meromorfne kogu komplekstasandil. Näitame, et sellise tuuma korral ei kehti ka implikatsioonid (12) ja (13). Konstrueerime kontranäited. Olgu u_0 suvaline nullist erinev element ruumist $L_2(0, T-\delta)$, mis on ortogonaalne elemendiga $e^{\frac{\alpha}{1-\alpha}\tau}|_{\tau \in (0, T-\delta)}$, st kehtib $\int_0^{T-\delta} e^{\frac{\alpha}{1-\alpha}\tau} u_0(\tau) d\tau = 0$. Defineerime

$$u(t) = \begin{cases} u_0(t), & t \in (0, T-\delta) \\ 0, & t \in (T-\delta, T). \end{cases}$$

Ilmselt

$$k * u(t) = e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}t} \int_0^t e^{\frac{\alpha}{1-\alpha}\tau} u(\tau) d\tau \in W_1^1(0, T).$$

Kui $t \in (T-\delta, T)$, siis

$$D_{RL}^{\{k\}} u(t) = \frac{d}{dt} k * u(t) = -\frac{\alpha}{1-\alpha} e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}t} \int_0^{T-\delta} e^{\frac{\alpha}{1-\alpha}\tau} u_0(\tau) d\tau = 0.$$

Vaatlusaluse funktsiooni u korral on täidetud implikatsiooni (12) vasak pool, kuid funktsioon ei ole samaselt võrdne nulliga vahemikus $(0, T)$. Järgnevalt defineerime

$$v(t) = \begin{cases} u_0(t), & t \in (0, T-\delta) \\ 0, & t \in (T-\delta, T) \end{cases}$$

ja $u(t) = \int_{T-\delta}^t v(\tau) d\tau$. Siis $u \in W_1^1(0, T)$. Kui $t \in (T - \delta, T)$, siis

$$D_C^{\{k\}} u(t) = k * v(t) = e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}t} \int_0^{T-\delta} e^{\frac{\alpha}{1-\alpha}\tau} u_0(\tau) d\tau = 0.$$

Implikatsiooni (13) vasak pool kehtib, kuid u ei ole nullfunktsioon vahemikus $(0, T)$.

Aja- ja ruumimuutujatest sõltuva allikafunktsiooni rekonstrueerimise ülesanne

Käsitleme ühte rakendusliku sisuga ülesannet, mis taandub pöördülesandele murrulise tuletise jaoks. Olgu Ω ruumi $\mathbb{R}^n$ lahtine alamhulk. Vaatleme järgmist üldistatud murrulist tuletist sisaldavat difusioonivõrrandit hulgas Ω :

$$D_C^{\{k\}} u(x, t) = \Delta u(x, t) + F(x, t), \quad (17)$$

kus t on aeg, Δ on Laplace'i operaator, u on difusiooniprotsessi olekumuutuja ja F on allikafunktsioon.

Olgu

$$F(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (T - \delta, T), \quad (18)$$

kus δ on mingi arv 0 ja T vahel. Ülesanne on järgmine: etteantud

$$u(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (T - \delta, T)$$

põhjal määrata

$$u(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T) \quad \text{ja} \quad F(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T).$$

Selline ülesanne tekib näiteks minevikus ($t < T - \delta$) aktiivsete reostusallikate määramisel põhjavees või atmosfääris ajahetke $t = T$ ümbruses tehtud mõõtmiste tulemuste alusel.

Fikseerime $x \in \Omega$. Eelduse (18) põhjal saame võrrandist (17)

$$D_C^{\{k\}} u(x, t) = \Delta u(x, t), \quad t \in (T - \delta, T). \quad (19)$$

Paremal poolel olev funktsioon $\Delta u(x, t)$, $t \in (T - \delta, T)$ on teada, sest $u(x, t)$, $(x, t) \in \Omega \times (T - \delta, T)$, on etteantud. Seega on teada nii $u(x, t)$, $t \in (T - \delta, T)$ kui ka $D_C^{\{k\}} u(x, t)$, $t \in (T - \delta, T)$. Juhul, kui k rahuldab Teoreemi tingimusi ja u on piisavalt sile, on $u(x, t)$ üheselt jätkatav vahemikku $t \in (0, T)$. Kuna $x \in \Omega$ on suvaline, on $u(x, t)$, $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$ üheselt taastatav. Lõpuks saab allikafunktsiooni $F(x, t)$, $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$ leida ilmutatud valemi

$$F(x, t) = D_C^{\{k\}} u(x, t) - \Delta u(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T)$$

abil, sest selle valemi parem pool on määratud.

Kirjandus

1. F. Jones. *Lebesgue Integration on Euclidean Space*. Jones and Bartlett Publishers: London, 2001.
2. N. Kinash, J. Janno. An inverse problem for a generalized fractional derivative with an application in reconstruction of time- and space-dependent sources in fractional diffusion and wave equations. *Mathematics* **7** (12):1138, 2019.