Murrulised tuletised ja murruliste tuletistega diferentsiaalvõrrandid

Arvet Pedas, Mikk Vikerpuur
Tartu Ülikool

1. Sissejuhatus

Matemaatika ajalugu käsitlevatest töödest nähtub, et 17. sajandiks oli matemaatikute ette kerkinud mitmeid ülesandeid, mille lahendamiseks puudus sobiv metoodika. Üheks selliseks ülesandeks oli küsimus kõverale joonele puutuja joonestamisest antud punktis. Alles piirväärtuste meetod võimaldas anda üldise lahendusviisi sellele ülesandele ja jõuda välja matemaatika ühe viljakama mõiste – funktsiooni tuletise juurde. Peale täisarvulist järku tuletise mõiste sissetoomist kerkis üles ka küsimus, kas on võimalik defineerida ja anda sisu funktsiooni murrulist (mittetäisarvulist) järku tuletisele. Kuna nii 17. sajandil kui ka veel palju hilisemal ajal, kui funktsiooni murrulise tuletise mõiste oli juba olemas, ei olnud näha, millised võiksid olla murrulise tuletise rakendusvõimalused, siis suhtuti funktsiooni murrulisse tuletisse kaua kui kasutusse kurioosumisse.

Alles viimastel aastakümnetel on suhtumine radikaalselt muutunud ning huvi murruliste tuletiste vastu on hüppeliselt kasvanud. Nimelt on selgunud, et funktsiooni murrulised tuletised on suurepäraseks vahendiks paljude reaalse elu nähtuste matemaatilisel modelleerimisel. Selle põhjuseks on asjaolu, et sageli kirjeldavad murrulisi tuletisi sisaldavad diferentsiaalvõrrandid vaadeldavate materjalide ja protsesside käitumist paremini kui klassikalised täisarvulist järku tuletistega diferentsiaalvõrrandid. Murruliste tuletistega diferentsiaalvõrrandeid kasutatakse näiteks viskoossete polümeeride ja plastmasside uurimisel [5] ning aeglase difusiooni kirjeldamisel mitmesugustes poorsetes, bioloogilistes ja fraktaalsetes keskkondades [11]. Viimasel ajal on murrulistele tuletistele leitud üha uusi rakendusvõimalusi füüsikas, mehaanikas, tehnikas, keemias,

Eesti Matemaatika Selts AR 2019

majanduses, finantsmatemaatikas, bioloogias, meditsiinis ja teistes valdkondades [35].

Murrulise tuletise mõistega seotud matemaatilisi aspekte on põhjalikult käsitletud monograafiates [5, 15, 31, 33] ja artiklis [39]. Kuna murruliste tuletistega diferentsiaalvõrrandite täpne lahendamine ei ole enamasti võimalik, siis tuleb nende lahendamiseks kasutada numbrilisi meetodeid. Kõrget järku täpsusega numbriliste meetodite konstrueerimisel murruliste tuletistega diferentsiaalvõrrandite jaoks tekivad aga sageli raskused vaadeldavate võrrandite lahendite võimaliku iseärase käitumise pärast [5]. Murruliste tuletistega diferentsiaalvõrrandite lahendamisega seotud küsimusi on vaadeldud paljudes töödes, vt näiteks [1, 4, 5, 8, 10, 18, 31, 34]. Märgime, et palju kasulikku teavet funktsiooni murruliste tuletistega seotud temaatika kohta saab ka aastal 2019 kirjastuse De Gruyter väljaandena ilmunud 8-köitelisest teadustööde kogumikust [20]. Selle kaheksast eraldi raamatust koosneva seeria kaks esimest köidet on pühendatud murruliste tuletiste baasteooriale (toimetajad A. Kochubei ja Y. Luchko), kolmas numbrilistele meetoditele (toimetaja G. E. Karniadakis), neljas ja viies rakendustele füüsikas (toimetaja V. E. Tarasov), kuues rakendustele juhtimisteoorias (toimetaja I. Petraš), seitsmes ja kaheksas rakendustele inseneri ning sotsiaalteadustes (toimetajad D. Baleanu ja A. M. Lopes); seeria üldtoimetajaks on J. A. Tenreiro Machado.

Käesoleva artikli eesmärk on tutvustada lugejale praktikas sageli kasutatavate murruliste tuletiste mõisteid ja mõningaid murruliste tuletistega diferentsiaalvõrrandite ligikaudse lahendamisega seotud probleeme. Me vaatleme kõigepealt ühte tähendusrikast ajaloolist momenti funktsiooni murrulise tuletise mõiste sünniloos. Seejärel toome sisse Riemanni-Liouville'i integraaloperaatori mõiste ja vaatleme tema tähtsamaid omadusi. Tuginedes Riemanni-Liouville'i integraaloperaatori mõistele defineerime funktsiooni Riemanni-Liouville'i ja Caputo murruliste tuletiste mõisted ning käsitleme nende olemasolu ja siledusega seotud küsimusi. Seejärel kommenteerime lühidalt mõningaid viimasel ajal Tartu Ülikoolis valminud töid murruliste tuletistega diferentsiaalvõrrandite valdkonnas. Lõpuks vaatleme ühe Caputo murrulise tuletisega diferentsiaalvõrrandi ligikaudset lahendamist etteantud algtingimuse korral. Käesolev kirjutis täiendab ja täpsustab artikli [22] murrulisi tuletisi käsitlevat osa.

2. Tuletis kui funktsiooni murrulise tuletise erijuht

Juba gümnaasiumis õpitakse, et ühest argumendist (muutujast) sõltuva funktsiooni tuletis on funktsiooni muudu ja argumendi muudu suhte piirväärtus kui argumendi muut läheneb nullile. Paneme öeldu kirja mõnevõrra täpsemalt. Olgu t funktsiooni $y = y(t)$ määramispiirkonna sisepunkt. Siis on funktsiooni y väärtus määratud nii punktis t kui ka selle mingis väikeses ümbruses. Olgu muutuja h väärtus selline, et punkt $t + h$ kuulub funktsiooni y määramispiirkonda. Vaatleme suhet

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h},$$

kus suurus h läheneb nullile. Et protsessis $h \to 0$ võivad muutujal h olla vaid nullist erinevad väärtused, siis jagamine suurusega h on alati lubatav. Kui sellel suhtel on protsessis $h \to 0$ olemas piirväärtus, siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni $y = y(t)$ tuletiseks kohal t ja märgitakse sümboliga y' või $y'(t)$:

$$y'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}. \tag{1.36}$$

Geomeetriliselt kujutab funktsiooni $y = y(t)$ tuletis $y'(t)$ funktsiooni y graafiku puutuja tõusu kohal t [12]. Mehaanika seisukohalt tähendab tuletis $y'(t)$ seaduse $y = y(t)$ alusel liikuva keha (näiteks auto) kiirust ajahetkel t. Mõistes liikumist selle sõna filosoofilises mõttes kui mis tahes nähtust looduses, tehnikas või ühiskonnas, võime öelda, et y tuletis y' kohal t tähendab seaduse $y = y(t)$ alusel toimuva nähtuse kulgemise kiirust (intensiivsust) ajahetkel t [12].

Kui funktsioonil $y = y(t)$ on lõplik tuletis kohal t, siis öeldakse, et ta on diferentseeruv sellel kohal. Kui funktsioon $y = y(t)$ on diferentseeruv kohal t, siis ta on pidev sellel kohal. Tõepoolest, kui funktsioonil $y = y(t)$ on olemas lõplik tuletis $y'(t)$ kohal t, siis

$$\lim_{h\to 0}[y(t+h) - y(t)] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{y(t+h) - y(t)}{h}\,h\right]$$
$$= \left(\lim_{h\to 0}\left[\frac{y(t+h) - y(t)}{h}\right]\right)\lim_{h\to 0} h = y'(t)\ \cdot 0 = 0,$$

mis ütlebki, et funktsioon $y = y(t)$ on pidev kohal t. Kui funktsioon on diferentseeruv vaadeldava piirkonna igas punktis, siis öeldakse, et ta on diferentseeruv selles piirkonnas.

Kui funktsiooni $y = y(t)$ määramispiirkonnaks on lõik $[a, b]$, $a < b$, siis selle lõigu otspunktid a ja b ei ole vaadeldava piirkonna sisepunktid ning $t = a$ ja $t = b$ korral ei saa vaadelda piirväärtust kujul (1.36), kus h võib omandada nii positiivseid kui negatiivseid väärtusi. Sel korral lõigu $[a, b]$ vasakpoolses otspunktis võib kõnelda ainult funktsiooni y parempoolsest tuletisest $y'(a+)$ kohal a ja parempoolses otspunktis – vasakpoolsest tuletisest $y'(b-)$ kohal b, kus

$$y'(a+) = \lim_{h\to 0, h>0}\frac{y(a+h) - y(a)}{h},\ y'(b-) = \lim_{h\to 0, h<0}\frac{y(b+h) - y(b)}{h}.$$

Öeldakse, et funktsioon on diferentseeruv lõigus $[a, b]$, kui tal on olemas lõplik tuletis vaadeldava lõigu igas sisepunktis ning lõigu otspunktides a ja b on tal olemas vastavad lõplikud ühepoolsed tuletised $y'(a+)$ ja $y'(b-)$ (enamasti kirjutatakse siin siiski lihtsalt $y'(a)$ ja $y'(b)$).

Lisaks sümbolitele y' ja $y'(t)$ kasutatakse funktsiooni $y = y(t)$ tuletise märkimiseks ka sümboleid

$$\frac{d}{dt}y(t),\ \frac{dy(t)}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ Dy. \tag{1.37}$$

Tähistuse Dy korral nimetatakse suurust D diferentsiaaloperaatoriks ehk diferentseerimise operaatoriks, see tähendab teisenduseks, mis igale diferentseeruvale funktsioonile y seab vastavusse selle funktsiooni tuletise y', seega $Dy = y'$.

Kui funktsioon $y = y(t)$ on diferentseeruv kohal t ja selle mingis ümbruses, siis on tal lõplik tuletis y' vaadeldava piirkonna igas punktis. Selles piirkonnas kujutab siis y' argumendi t teatavat funktsiooni, mis omakorda võib olla diferentseeruv mingites oma määramispiirkonna punktides. Seejuures funktsiooni y' tuletist $(y')'$ kohal t nimetatakse funktsiooni y teist järku tuletiseks ehk teiseks tuletiseks kohal t ja märgitakse sümboliga y'' või $y''(t)$:

$$y''(t) = [y'(t)]' = \lim_{h\to 0} \frac{y'(t+h) - y'(t)}{h}.$$

Asendades tähistustes (1.37) funktsiooni y tema tuletisega y', näeme, et $y = y(t)$ teise tuletise y'' märkimiseks võime kasutada ka sümboleid

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 y(t),\ \frac{d^2y(t)}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2},\ D^2y.$$

Üldiselt, olgu m mingi positiivne täisarv, st ta kuulub naturaalarvude hulka $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Olgu funktsioonil $y = y(t)$ kohal t olemas lõplik $(m-1)$ - järku tuletis (kui $m = 1$, siis mõistame funktsiooni 0 - järku tuletise osas funktsiooni ennast). Kui sellel $(m-1)$ - järku tuletisel on kohal t omakorda olemas tuletis, siis viimast nimetatakse funktsiooni $y = y(t)$ m - ndat järku ehk m - järku tuletiseks kohal t ja märgitakse sümboliga $y^{(m)}$ või $y^{(m)}(t)$:

$$y^{(m)}(t) = \frac{d}{dt}\left(y^{(m-1)}(t)\right).$$

Lisaks tähistusele $y^{(m)}$ ja $y^{(m)}(t)$ kasutatakse funktsiooni m - järku tuletise märkimiseks ka sümboleid

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m y(t),\ \frac{d^my(t)}{dt^m},\ \frac{d^my}{dt^m},\ D^my.$$

Seejuures $m = 1$ korral jäetakse nendes sümbolites indeks 1 kirjutamata (st nad esitatakse kujul (1.37)) ning $m \le 3$ korral kirjutatakse $y^{(1)}, y^{(2)}$ ja $y^{(3)}$ asemel enamasti y', y'' ja y'''; sümbol

D^m kannab m-järku diferentsiaaloperaatori ehk diferentseerimise operaatori nime ($m = 1$ korral $D^1 = D$) ning kirjutis $D^m y$ tähendab, et diferentsiaaloperaatorit D tuleb funktsioonile y järjest rakendada m korda.

Eespool toodud funktsiooni tuletise mõistet puudutav arutelu tugines eeldusele, et funktsiooni tuletise järk on täisarv. Sellel kitsendusel pole tegelikult mingit fundamentaalset põhjust. Seetõttu on loogiline küsida, mis saab siis, kui funktsiooni tuletise järk ei ole täisarv? Selline küsimus kerkis üles juba sel ajal, kui Isaac Newton (1643 - 1727) ja Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) panid aluse kõrgema matemaatika vundamendiks olevale diferentsiaal- ja integraalarvutusele. Kui Leibniz tutvustas ühes oma kirjas Guillaume de L'Hospitalile (1661 - 1704) funktsiooni $y = y(t)$ tuletiste märkimiseks Leibnizi poolt kasutusele võetud tähistust

$$\frac{d^m y(t)}{dt^m}$$

(eeldades vaikimisi, et m on naturaalarv), sai ta vastuseks küsimuse "Mida tähendab $\frac{d^m y(t)}{dt^m}$, kui $m = \frac{1}{2}$?". Vastuse leidmine sellele küsimusele osutus väga raskeks ülesandeks ning Leibniz ei suutnud sellele küsimusele anda ammendavat vastust. Viimaks arvas ta prohvetlikult, et "... see küsimus kujutab endast teatavat paradoksi, millest ehk vaid tulevikus kasulikke järeldusi teha saab ... " [15].

Seda L'Hospitali 1695. aastal esitatud küsimust võib pidada oluliseks tähiseks funktsiooni murrulise tuletise mõiste arengus. Alates sellest ajast hakkasid matemaatikud, füüsikud, mehaanikud ja teiste valdkondade esindajad mõtlema sellele, kas ja kuidas saab funktsiooni tuletise mõistet nii üldistada, et see katab ka olukorrad, kus tuletise järk on täisarvust erinev positiivne reaalarv, näiteks $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\sqrt{2}$ või π. Tänapäeval teame, et selline üldistamine on võimalik (ja isegi mitmel viisil [5, 20, 33]). Ometi ei suudetud siin kaua aega jõuda positiivsete tulemusteni. Kulus peaaegu poolteist sajandit, enne kui Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866) ja Joseph Liouville (1809 - 1882) 19. sajandil leidsid, et funktsiooni murrulise tuletise mõisteni saab jõuda integreerimise kaudu [5, 20], nimelt teatava integraaloperaatori abil, mida tänapäeval nimetatakse Riemanni-Liouville'i integraaloperaatoriks või Riemanni-Liouville'i murrulise integreerimise operaatoriks.

Termini operaator all mõistetakse matemaatikas tavaliselt teatavat spetsiifilist matemaatilist operatsiooni – teisendust, kujutust, funktsiooni, eeskirja jne. Täpsemalt saame operaatori defineerida järgmisel viisil (vt näiteks [21]). Olgu Y ja Z mingid etteantud hulgad, see tähendab mingi tunnuse alusel üheks tervikuks kokku võetud objektid. Hulka koondatud objekte nimetatakse selle elementideks. Asjaolu, et y on hulga Y element, tähistatakse $y \in Y$; kui y ei ole hulga Y element, siis kirjutatakse $y \notin Y$. Kui Y_1 on hulk, mille iga element kuulub hulka Y, siis öeldakse, et hulk Y_1 on hulga Y osahulk ehk alamhulk ja kirjutatakse $Y_1 \subset Y$. On selge, et iga hulga Y korral $Y \subset Y$.

Kui on antud eeskiri T, mis seab hulga Y igale elemendile vastavusse hulga Z kindla elemendi, siis öeldakse, et on defineeritud operaator T, ja kirjutatakse $T : Y \to Z$. Kui elemendile $y \in Y$ seatakse vastavusse element $z \in Z$, siis kasutatakse kirjutist $z = Ty$, $y \in Y$ (kasutatakse ka kirjutusi $z = T(y), y \in Y$, või $T : y \to z, y \in Y$). Hulka Y nimetatakse operaatori T määramispiirkonnaks ning öeldakse, et operaatori T väärtuste piirkond $T(Y)$ asub hulgas Z.

Operaator $I : Y \to Y$, mis hulga Y igale elemendile seab vastavusse sama elemendi, see tähendab, et iga $y \in Y$ korral $Iy = y$, kannab samasusteisenduse ehk identsusteisenduse ehk ühikoperaatori nime. Paneme tähele, et ühikoperaatori rakendamine on selline tegevus, mille tulemusena üldse midagi ei muutu.

Järgnevas vaatleme hulga Y osas hulka $C[0, b]$, $0 < b < \infty$, mis koosneb kõigist lõigus $[0, b]$ pidevatest funktsioonidest (esituse lihtsustamiseks vaatleme siin ja edaspidi üldise lõigu $[a, b]$ asemel lõiku $[0, b]$) ning operaatori T osas Riemanni-Liouville'i δ - järku integraaloperaatorit $J^\delta : C[0, b] \to C[0, b]$, $\delta > 0$, mille defineerimisele kohe asume.

3. Riemanni-Liouville'i integraaloperaator

Olgu $0 < \delta < \infty$ mingi positiivne reaalarv. Vaatleme teisendust J^δ, mis seab igale lõigus $[0, b]$ pidevale funktsioonile y vastavusse funktsiooni $J^\delta y = (J^\delta y)(t)$ valemiga

$$\big(J^\delta y\big)(t) = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^t (t-s)^{\delta-1} y(s)ds, \tag{1.38}$$

kus $0 \leq t \leq b$ ja $\Gamma(\delta)$ on Leonhard Euleri (1707 - 1783) nimega seostatav Euleri teist liiki integraal ehk gammafunktsioon:

$$\Gamma(\delta) = \int_0^\infty e^{-s} s^{\delta-1} ds, \quad 0 < \delta < \infty. \tag{1.39}$$

Valemis (1.38) oleva integraali $\int_0^t (t-s)^{\delta-1} y(s)ds$ alumiseks rajaks on 0 ja ülemiseks rajaks t, kus $0 \leq t \leq b$. Seega see integraal ning järelikult ka $J^\delta y = (J^\delta y)(t)$ kujutab endast muutuja t funktsiooni. Seda funktsiooni nimetatakse Riemanni-Liouville'i murruliseks integraaliks, valemiga (1.38) defineeritud operaatorit J^δ aga Riemanni-Liouville'i δ - järku integraaloperaatoriks ehk murrulise integreerimise operaatoriks [5, 15, 20, 33].

On hästi teada (vt näiteks [13]), et gammafunktsioon $\Gamma = \Gamma(\delta)$ on määratud ja pidev (isegi lõpmata arv kordi diferentseeruv) vahemikus $(0, \infty)$ ning iga $\delta > 0$ korral kehtib võrdus

$$\Gamma(\delta + 1) = \delta\,\Gamma(\delta), \tag{1.40}$$

mida nimetatakse gammafunktsiooni taandamisvalemiks. Võttes $\delta = n \in \mathbb{N}$, saame taandamisvalemit n korda rakendades võrduste ahela

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1)\cdots 1 \cdot \Gamma(1).$$

Kuna (vt (1.39))

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-s} ds = \lim_{h\to\infty} \int_0^h e^{-s} ds = \lim_{h\to\infty} (1 - e^{-h}) = 1,$$

siis näeme, et

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.41}$$

Sellest järeldub, et gammafunktsioon Γ üldistab faktoriaali mõistet, see tähendab, funktsiooni $n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$, mis on määratud vaid naturaalarvude hulgal $\mathbb{N}$.

Edaspidi läheb meil vaja gammafunktsiooni väärtust kohal $\frac{3}{2}$. Selle leidmise saame taandada $\Gamma(\frac{1}{2})$ leidmisele, sest valemi (1.40) põhjal $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$. Kui $0 < \delta < 1$, siis kehtib võrdus

$$\Gamma(\delta)\,\Gamma(1-\delta) = \frac{\pi}{\sin(\pi\delta)}. \tag{1.42}$$

Võttes siin $\delta = \frac{1}{2}$, saame $\left[\Gamma(\frac{1}{2})\right]^2 = \pi$, millest $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Seega

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{1.43}$$

Meil läheb vaja ka valemit

$$\int_0^1 s^{\delta-1}(1-s)^{\eta-1}ds = \frac{\Gamma(\delta)\,\Gamma(\eta)}{\Gamma(\delta+\eta)}, \text{ kus } \delta > 0,\, \eta > 0. \tag{1.44}$$

Viimase võrduse vasakul poolel olevat integraali nimetatakse Euleri esimest liiki integraaliks ehk beetafunktsiooniks. Valemite (1.42) ja (1.44) tõestused võib leida raamatust [13].

Osutub, et Riemanni-Liouville'i murruline integraal $J^\delta y$ on pidev funktsioon lõigus $[0, b]$ mis tahes $\delta > 0$ ja $y \in C[0, b]$ korral. Näitame seda vahemiku $(0, b)$ puhul.

Antud $\delta > 0$ ja $y \in C[0, b]$ korral tähistame

$$u(t) = \int_0^t (t-s)^{\delta-1} y(s)ds. \tag{1.45}$$

Fikseerime $t \in (0, b)$ ja olgu suurus h selline, et $t + h \in (0, b)$. Lihtsuse mõttes olgu $h > 0$. Siis

$$u(t+h) = \int_0^t (t+h-s)^{\delta-1} y(s)ds + \int_t^{t+h} (t+h-s)^{\delta-1} y(s)ds.$$

Märkides

$$K = \max_{0 \le s \le b} |y(s)|,$$

saame

$$\begin{aligned}
|u(t+h)-u(t)| = & \left| \int_0^t (t+h-s)^{\delta-1} y(s) ds + \int_t^{t+h} (t+h-s)^{\delta-1} y(s) ds \right. \\
& \left. - \int_0^t (t-s)^{\delta-1} y(s) ds \right| \\
& \le \int_0^t \left| (t+h-s)^{\delta-1} - (t-s)^{\delta-1} \right| |y(s)| ds \\
& + \int_t^{t+h} (t+h-s)^{\delta-1} |y(s)| ds \\
& \le K(I_1 + I_2),
\end{aligned}$$

kus

$$I_1 = \int_0^t \left| (t+h-s)^{\delta-1} - (t-s)^{\delta-1} \right| ds$$

ja

$$I_2 = \int_t^{t+h} (t+h-s)^{\delta-1} ds = \frac{h^\delta}{\delta}.$$

Kui $\delta = 1$, siis $I_1 = 0$. Kui $0 < \delta < 1$, siis on $(t+h-s)^{\delta-1} < (t-s)^{\delta-1}$ iga $s \in [0, t)$ korral ja seega

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^t (t-s)^{\delta-1} ds - \int_0^t (t+h-s)^{\delta-1} ds \\
&= \frac{1}{\delta} \left[t^\delta + h^\delta - (t+h)^\delta \right] \le \frac{h^\delta}{\delta}.
\end{aligned}$$

Kui $\delta > 1$, siis $(t+h-s)^{\delta-1} > (t-s)^{\delta-1}$ iga $s \in [0, t]$ korral ning seetõttu

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^t (t+h-s)^{\delta-1} ds - \int_0^t (t-s)^{\delta-1} ds \\
&= \frac{1}{\delta} \left[(t+h)^\delta - h^\delta - t^\delta \right] \le \frac{1}{\delta} \left[(t+h)^\delta - t^\delta \right].
\end{aligned}$$

Kokkuvõttes saame järgmise hinnangu:

$$|u(t+h)-u(t)| \leq \begin{cases} \frac{2K}{\delta}h^\delta, & 0<\delta\leq 1, \\ \frac{K}{\delta}\left[h^\delta+(t+h)^\delta-t^\delta\right], & \delta>1. \end{cases}$$

Seega mis tahes reaalarvu $\delta > 0$ korral $\lim_{h\to 0}|u(t+h)-u(t)| = 0$, mis ütlebki, et valemiga (1.45) defineeritud funktsioon $u = u(t)$ on pidev kohal $t \in (0, b)$. Järelikult ka funktsioon $J^\delta y$ on pidev kohal $t \in (0, b)$, sest $\left(J^\delta y\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\delta)}u(t)$ ja $\frac{1}{\Gamma(\delta)}$ on konstant. Analoogiliselt saab näidata, et $\left(J^\delta y\right)(t)$ on pidev kohal $t = 0$ ja $t = b$.

Niisiis, Riemanni-Liouville'i integraaloperaatori J^δ korral võime kirjutada, et $J^\delta : C[0, b] \to C[0, b]$, sest J^δ tõepoolest seab igale pidevale funktsioonile y hulgas $C[0, b]$ vastavusse funktsiooni $J^\delta y$, mis kuulub hulka $C[0, b]$. Täpsem arutelu näitab, et kui $y \in C[0, b]$, siis [9, 33]

$$J^\delta y \in H^\delta[0, b] \subset C[0, b] \quad (0 < \delta < 1)$$

ning

$$J^\delta y \in C^m[0, b], \text{ kui } \delta \geq m, \ m \in \mathbb{N}.$$

Hulk $H^\delta[0, b]$ $(0 < \delta < 1)$ koosneb sellistest funktsioonidest $z \in C[0, b]$, mis rahuldavad lõigus $[0, b]$ Hölderi tingimust $\delta \in (0, 1)$ korral: leidub konstant $c > 0$ nii, et

$$|z(t) - z(s)| \leq c\,|t-s|^\delta$$

iga $t, s \in [0, b]$ puhul. Sümboliga $C^m[0, b]$ tähistame kõigi lõigus $[0, b]$ m korda $(m \geq 0)$ pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulka, seejuures $C^0[0, b] = C[0, b]$.

Operaatori J^δ definitsioonist (1.38) järeldub mis tahes $\delta > 0$ ja $y \in C[0, b]$ korral, et

$$(J^\delta y)(0) = 0 \quad (\delta > 0, y \in C[0, b]). \tag{1.46}$$

Kui $\delta = 0$, siis valem (1.38) ei ole rakendatav, sest $\Gamma(\delta)$ on määratud vaid $\delta > 0$ korral ning mis tahes $t > 0$ puhul integraal

$\int_0^t (t-s)^{\delta-1} y(s)ds$ hajub, kui $\delta = 0$. Monograafias [33] saadud tulemuste põhjal võime öelda, et iga lõigus $[0,b]$ pideva funktsiooni $y = y(t)$ korral

$$\lim_{\delta\to 0, \delta>0} (J^\delta y)(t) = y(t).$$

Seega $\delta = 0$ korral on loomulik defineerida operaator $J^0 : C[0,b] \to C[0,b]$ ühikoperaatorina võrdusega

$$\big(J^0 y\big)(t) = y(t), \text{ kus } 0 \le t \le b, \quad y \in C[0,b]. \tag{1.47}$$

Märgime, et Riemanni-Liouville'i integraaloperaatori J^δ määramispiirkonna osas võime $C[0,b]$ asemel vaadelda ka mingit laiemat funktsioonide klassi, näiteks funktsioonide hulka $L^p(0,b)$, $1 \le p \le \infty$.

Hulk $L^p(0,b)$ $(1 \le p < \infty)$ on kõigi lõigus $[0,b]$ Lebesgue'i mõttes mõõtuvate funktsioonide $y = y(t)$ hulk, mille korral eksisteerib lõplik Lebesgue'i integraal

$$\int_0^b |y(t)|^p dt.$$

Hulk $L^\infty(0,b)$ on kõigi lõigus $[0,b]$ Lebesgue'i mõttes mõõtuvate funktsioonide $y = y(t)$ hulk, mille korral

$$\inf_{E\subset[0,b], \mu(E)=0} \ \sup_{t\in[0,b]\setminus E} |y(t)| < \infty,$$

kus $\mu(E)$ on hulga E Lebesgue'i mõõt ja $t \in [0,b] \setminus E$ tähendab, et $t \in [0,b]$, kuid $t \notin E$.

Võrdus $y = z$ hulgas $L^p(0,b)$ $(1 \le p \le \infty)$ tähendab seda, et $y = z$ peaaegu kõikjal lõigus $[0,b]$. Märgime, et kaks lõigus $[0,b]$ Lebesgue'i mõttes mõõtuvat funktsiooni $y = y(t)$ ja $z = z(t)$ on võrdsed peaaegu kõikjal lõigus $[0,b]$, kui nende erinevus on võimalik vaid $t \in E$ korral, kus $E \subset [0,b]$ on lõigu $[0,b]$ alamhulk, mille Lebesgue'i mõõt on võrdne nulliga. Seega hulga $L^p(0,b)$ $(1 \le p \le \infty)$ elementideks on lõigus $[0,b]$ peaaegu kõikjal ühtivate funktsioonide klassid. Kui $1 \leq p < q < \infty$, siis (vt näiteks [2])

$$L^{\infty}(0, b) \subset L^{q}(0, b) \subset L^{p}(0, b).$$

Kui $\delta > 0$ ja $y \in L^1(0, b)$, siis Riemanni-Liouville'i murruline integraal $J^\delta y$ eksisteerib peaaegu kõikjal lõigus $[0, b]$ ning $J^\delta y \in L^1(0, b)$; kui $\delta_1 > 0$ ja $\delta_2 > 0$ ning $y \in L^1(0, b)$, siis peaaegu kõikjal lõigus $[0, b]$ kehtib võrdus

$$(J^{\delta_1} J^{\delta_2} y)(t) = (J^{\delta_1 + \delta_2} y)(t); \tag{1.48}$$

kui $y \in C[0, b]$ või $\delta_1 + \delta_2 \geq 1$, siis võrdus (1.48) kehtib iga $t \in [0, b]$ korral [5, 33]. Kui $0 < \delta < 1$, $p > \frac{1}{\delta}$ ja $y \in L^p(0, b)$, siis $J^\delta y \in C[0, b]$; kui $\delta, p \geq 1$ ja $y \in L^p(0, b)$, siis $J^\delta y \in C[0, b]$ [9, 33].

4. Riemanni-Liouville'i murruline tuletis

Tuginedes Riemanni-Liouville'i integraaloperaatori mõistele, saame sisse tuua Riemanni-Liouville'i murrulise tuletise mõiste.

Olgu $AC[0, b]$ kõigi lõigus $[0, b]$ absoluutselt pidevate funktsioonide hulk. Märgime, et lõigul $[0, b]$ määratud funktsiooni $y = y(t)$ nimetatakse absoluutselt pidevaks, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et mistahes omavahel mittelõikuvate vahemike süsteemi

$$(a_i, b_i) \subset [0, b] \ (i = 1, \ldots, n; n \in \mathbb{N})$$

puhul tingimusest $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta$ järeldub, et $\sum_{i=1}^{n} |y(b_i) - y(a_i)| < \varepsilon$. Absoluutselt pidev funktsioon $y \in AC[0, b]$ on diferentseeruv peaaegu kõikjal lõigus $[0, b]$ ning tema tuletis $y' \in L^1(0, b)$ [5, 21]. Järgnevas läheb meil vaja ka funktsioonide hulka $AC^m[0, b]\,(m \in \mathbb{N})$, mis koosneb sellistest funktsioonidest $y \in C^{m-1}[0, b]$, mille $(m-1)$-järku tuletis $y^{(m-1)}$ on absoluutselt pidev lõigus $[0, b]$:

$$AC^m[0, b] = \{y \in C^{m-1}[0, b] : y^{(m-1)} \in AC[0, b]\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Olgu $\alpha \in (0, \infty)$ mingi reaalarv ja olgu $m = \lceil \alpha \rceil$, see tähendab, et m on vähim täisarv, mis on suurem või võrdne arvuga α. Teiste sõnadega, m on selline täisarv, et $m-1<\alpha\le m$. Funktsiooni $y\in C[0,b]$ Riemanni-Liouville'i α-järku murruline tuletis $D^\alpha_{RL}y=(D^\alpha_{RL}y)(t)$ kohal $t\in(0,b]$ defineeritakse valemiga [5, 15, 31, 33]

$$\big(D^\alpha_{RL}y\big)(t)=\frac{d^m}{dt^m}\big(J^{m-\alpha}y\big)(t), \tag{1.49}$$

kus funktsioon $J^{m-\alpha}y$ on määratud võrdusega (1.38), kui $m-\alpha>0$ ja võrdusega (1.47), kui $m-\alpha=0$. Valemiga (1.49) määratud operaatorit

$$D^\alpha_{RL}=D^mJ^{m-\alpha}\quad(\alpha>0, m=\lceil\alpha\rceil), \tag{1.50}$$

nimetatakse Riemanni-Liouville'i murrulise diferentseerimise operaatoriks. Kui $\alpha=0$, siis ka $m=\lceil\alpha\rceil=0$ ning valemi (1.47) tõttu on loomulik defineerida (vt (1.49)–(1.50))

$$D^0_{RL}=D^0=I, \tag{1.51}$$

kus I on ühikoperaator. Osutub, et iga $\alpha>0$ korral kehtib võrdus (vt näiteks [5])

$$(D^\alpha_{RL}J^\alpha y)(t)=y(t),\ \text{kus}\ \ t\in[0,b],\quad y\in C[0,b]. \tag{1.52}$$

On selge, et valemit (1.49) saame kasutada vaid niisuguse pideva funktsiooni $y\in C[0,b]$ Riemanni-Liouville'i murrulise tuletise $D^\alpha_{RL}y=(D^\alpha_{RL}y)(t)$ leidmiseks, mille korral funktsioonil $J^{m-\alpha}y$ on olemas m - järku tavatuletis $D^mJ^{m-\alpha}y$ kohal $t\in(0,b]$. Kui $y\in AC^m[0,b]$ $(m=\lceil\alpha\rceil,\ \alpha>0)$, siis Riemanni-Liouville'i murruline tuletis $D^\alpha_{RL}y$ eksisteerib peaaegu kõikjal lõigus $[0,b]$ [33].

Kui $\alpha=m\in\mathbb{N}$, siis järeldub valemitest (1.47) ja (1.49), et iga $y\in C^m[0,b]$ korral kehtib võrdus

$$\big(D^m_{RL}y\big)(t)=\frac{d^my(t)}{dt^m}\quad(0\le t\le b)$$

ehk

$$D^m_{RL}=D^m,\ m\in\mathbb{N}. \tag{1.53}$$

Teiste sõnadega, täiarvulist järku Riemanni - Liouville'i murruline tuletis funktsioonist y on võrdne sama järku tavatuletisega funktsioonist y. Seega valemiga (1.49) defineeritud Riemanni - Liouville'i murruline tuletis on tõepoolest tavatuletise mõiste üldistus juhule, kus tuletise järk võib olla mis tahes positiivne reaalarv.

Kahjuks ei ole Riemanni - Liouville'i murrulise tuletise mõiste vaba puudustest [5, 6, 20]. Näiteks on tavatuletiste vallast hästi teada, et konstantse funktsiooni tuletis võrdub nulliga: kui $y(t) = C$, kus $0 \le t \le b$ ja C on mingi konstant, siis $y(t+h)-y(t) = C-C = 0$ ja seega valemist (1.36) järeldub, et $y'(t)$ on võrdne nulliga iga $t \in [0, b]$ korral. Valemist (1.49) aga järeldub, et mittetäisarvulist järku Riemanni - Liouville'i murruline tuletis konstandist C ei ole võrdne nulliga, kui $C \neq 0$. Selle näitamiseks oletame, et $\alpha > 0$ ei ole täisarv. Siis $m = \lceil\alpha\rceil > \alpha$, $0 < m - \alpha < 1$ ning valemi (1.49) põhjal saame konstantse funktsiooni $y = C$ korral kirjutada

$$\begin{aligned}(D^{\alpha}_{RL}C)(t) &= \frac{C}{\Gamma(m-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_0^t (t-s)^{m-\alpha-1}ds \\ &= \frac{C}{\Gamma(m-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^m \frac{t^{m-\alpha}}{m-\alpha}, \quad 0 < t \le b.\end{aligned}$$

Kuna

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}\right)^m t^{m-\alpha} &= (m-\alpha)\,(m-\alpha-1)\cdots(m-\alpha-(m-1))\,t^{-\alpha} \\ &= (m-\alpha)\,(m-\alpha-1)\cdots(1-\alpha)\,t^{-\alpha}, \quad 0 < t \le b,\end{aligned}$$

siis

$$(D^{\alpha}_{RL}C)(t) = \frac{C}{\Gamma(m-\alpha)}\,(m-\alpha-1)\cdots(1-\alpha)\,t^{-\alpha}, \quad 0 < t \le b.$$

Teiselt poolt, kui $\alpha = m \in \mathbb{N}$, siis $D^{\alpha}_{RL} = D^{\alpha}$ ja seega $D^{\alpha}_{RL}C = D^{\alpha}C = 0$. Lõppkokkuvõttes saame, et iga $t \in (0, b]$ korral

$$(D^{\alpha}_{RL}C)\,(t) = \begin{cases} 0, & \alpha \in \mathbb{N} \text{ või } C = 0, \\ \frac{C}{\Gamma(m-\alpha)}\,(m-\alpha-1)\cdots(1-\alpha)\,t^{-\alpha}, & \alpha \notin \mathbb{N},\ m = \lceil\alpha\rceil. \end{cases}$$

Seega $D^{\alpha}_{RL}C$ on nullist erinev, kui C on nullist erinev ja $\alpha > 0$ ei ole täisarv.

Nimetatud puudusest on vaba Riemanni - Liouville'i murrulise tuletise teatav modifikatsioon, mille 1967. aastal [3, 5, 20] esitas Itaalia geofüüsik Michele Caputo (sündinud 1927). Kuigi analoogiline modifikatsioon esineb ka töödes [7] ja [32], mis ilmusid Caputo tööga [3] umbes samal ajal, seostatakse järgnevas osas vaadeldavat Riemanni-Liouville'i murrulise tuletise modifikatsiooni enamasti vaid Caputo nimega.

5. Caputo murruline tuletis

Olgu $\alpha > 0$ ja olgu $m = \lceil \alpha \rceil$. Olgu

$$(T_{m-1}y)\,(s) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{y^{(j)}(0)}{j!} s^j \quad (0 \le s \le b, \quad 0! = 1) \tag{1.54}$$

funktsiooni $y \in C^{m-1}[0,b]$ Taylori $(m-1)$-järku polünoom punktis 0. Olgu funktsioon $y \in C^{m-1}[0,b]$ selline, et iga $t \in (0,b]$ korral leidub funktsiooni $y - T_{m-1}y$ α-järku Riemanni-Liouville'i tuletis $(D^{\alpha}_{RL}(y - T_{m-1}y))(t)$. Viimast avaldist nimetatakse funktsiooni y Caputo α-järku murruliseks tuletiseks $D^{\alpha}_{Cap}y = (D^{\alpha}_{Cap}y)(t)$ kohal $t \in (0,b]$ [5, 15]:

$$(D^{\alpha}_{Cap}y)(t) = \left(D^{\alpha}_{RL}(y - T_{m-1}y)\right)(t), \tag{1.55}$$

kus $\alpha > 0$, $m = \lceil \alpha \rceil$, $y \in C^{m-1}[0,b]$, $T_{m-1}y$ on defineeritud valemiga (1.54) ja $0 < t \le b$. Valemiga (1.55) määratud operaatorit D^{α}_{Cap} nimetatakse α-järku Caputo murrulise diferentseerimise operaatoriks.

Kui $\alpha = 0$, siis analoogiliselt võrdusega (1.51) on loomulik defineerida

$$D^{0}_{Cap} = I,$$

kus I on ühikoperaator.

Kui $\alpha = m \in \mathbb{N}$ ja $y \in C^m[0,b]$, siis $D^m T_{m-1} y = 0$ ning valemite (1.53) ja (1.55) põhjal saame $D^m_{Cap} y = D^m(y - T_{m-1}y) = D^m y - D^m T_{m-1} y = D^m y$, see tähendab, et

$$D^m_{Cap} = D^m, \ m \in \mathbb{N}.$$

Seega sarnaselt Riemanni-Liouville'i murrulise tuletisega langeb täisarvulist järku Caputo murruline tuletis funktsioonist y kokku sama järku tavatuletisega funktsioonist y. Nii nagu Riemanni-Liouville'i murrulise tuletise korral, saame ka Caputo murrulise tuletise jaoks, et [5, 15]

$$(D^\alpha_{Cap} J^\alpha y)(t) = y(t), \text{ kus } 0 \le t \le b, \quad \alpha \ge 0, \quad y \in C[0,b]. \tag{1.56}$$

Kuid erinevalt Riemanni-Liouville'i murrulisest tuletisest on Caputo murruline tuletis $D^\alpha_{Cap} C$ võrdne nulliga mis tahes konstandi C korral:

$$D^\alpha_{Cap} C = 0, \quad \alpha > 0. \tag{1.57}$$

Tõepoolest, konstantse funktsiooni $y(t) = C$ $(0 \le t \le b)$ korral järeldub valemitest (1.38), (1.50) ja (1.55), et

$$D^\alpha_{Cap} C = D^m J^{m-\alpha}(C - C) = D^m J^{m-\alpha} 0 = 0 \quad (\alpha > 0, \ m = \lceil \alpha \rceil).$$

Osutub, et kui $y \in AC^m[0,b]$ $(m = \lceil \alpha \rceil, \alpha > 0)$, siis (vt [5, 15]) Caputo murruline tuletis $D^\alpha_{Cap} y$ eksisteerib peaaegu kõikjal lõigus $[0,b]$ ning

$$D^\alpha_{Cap} y = J^{m-\alpha} D^m y. \tag{1.58}$$

Märgime, et sageli kasutataksegi funktsiooni y Caputo murrulise tuletise $D^\alpha_{Cap} y$ defineerimisel valemi (1.55) asemel just valemit (1.58), vt näiteks [31].

Kui $y \in C^m[0,b]$, $m \in \mathbb{N}$, siis $D^\alpha_{Cap} y \in C[0,b]$, kus $m - 1 < \alpha \le m$. Teiste sõnadega, tingimus $y \in C^m[0,b]$ on piisav selleks, et funktsioonil y on olemas pidev Caputo tuletis $D^\alpha_{Cap} y \in C[0,b]$. Ebaselge on siin, millised tingimused on selleks tarvilikud. See sai selgeks alles aastal 2016, kui ilmus G. Vainikko põhjapanev töö [39] (vt ka [40]) funktsioonide murrulise diferentseeruvuse kohta. Selles töös on murrulise diferentseerimise operaatorina vaadeldud Riemanni - Liouville'i operaatori J^δ pöördoperaatorit ja leitud üldine kriteerium lõigus pideva funktsiooni murrulise diferentseeruvuse jaoks. Saadud üldiste tulemuste baasil on esitatud murruliselt diferentseeruvate funktsioonide klassi ammendav kirjeldus nii Riemanni - Liouville'i kui Caputo definitsiooni korral. Muuhulgas on antud tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, millal funktsioonil $y \in C^{m-1}[0,b]$ on olemas valemiga (1.55) määratud Caputo murruline tuletis $D^\alpha_{Cap}y \in C[0,b]$, $m-1 < \alpha \leq m$. Lihtsuse mõttes esitame vastava tulemuse, kui $\alpha \in (0,1)$. Sellisel juhul järeldub valemitest (1.38), (1.49) ja (1.55), et lõigus $[0,b]$ pideva funktsiooni $y = y(t)$ Caputo α - järku murruline tuletis kohal $t \in (0,b]$ avaldub valemiga

$$\big(D^\alpha_{Cap}y\big)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}(y(s)-y(0))ds, \qquad (1.59)$$

kus Γ on Euleri gammafunktsioon. Tööst [39] järeldub, et kui $0 < \alpha < 1$ ja $y \in C[0,b]$, siis järgmised väited **(i)** ja **(ii)** on samaväärsed:

(i) funktsioonil y leidub pidev Caputo murruline tuletis $D^\alpha_{Cap}y \in C[0,b]$;

(ii) eksisteerib lõplik piirväärtus $\lim_{t\to 0} t^{-\alpha}[y(t)-y(0)]$ ning leiab aset koondumine

$$\lim_{\substack{\theta\to 1\\ 0<\theta<1}} \sup_{0<t\leq b}\left|\int_0^t \frac{y(t)-y(s)}{(t-s)^{\alpha+1}}ds - \int_0^{\theta t}\frac{y(t)-y(s)}{(t-s)^{\alpha+1}}ds\right| = 0.$$

Leiame lõpuks funktsiooni $y(t) = \sqrt{t}$ $(0 \leq t \leq b)$ Caputo $\frac{1}{2}$-järku tuletise. Valemi (1.59) põhjal

$$(D^{\frac{1}{2}}_{Cap}y)(t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}(s^{\frac{1}{2}}-0)ds = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}s^{\frac{1}{2}}ds,$$

kus $0 < t \leq b$. Valemi (1.44) abil saame, et

$$\int_0^t s^{\frac{1}{2}}(t-s)^{-\frac{1}{2}} ds = t \int_0^1 \tau^{\frac{1}{2}}(1-\tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau = t \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2)}.$$

Seega iga $t \in [0, b]$ korral

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t s^{\frac{1}{2}}(t-s)^{-\frac{1}{2}} ds = \frac{t}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2)} = t\, \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)}.$$

Kuna $\Gamma(2) = 1\,\Gamma(1) = 1$ ja $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (vt (1.43)), siis näeme, et funktsiooni $y(t) = \sqrt{t}$ $(0 \leq t \leq b)$ Caputo $\frac{1}{2}$-järku tuletis avaldub järgmiselt:

$$(D^{\frac{1}{2}}_{Cap} y)(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \text{ kus } 0 \leq t \leq b. \tag{1.60}$$

6. Murruliste tuletistega diferentsiaalvõrrandid

Murruliste tuletisega diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, mis seob otsitavat funktsiooni $y = y(t)$ tema murrulist järku tuletistega ja sõltumatu muutujaga t. Paljude rakenduslike ülesannete matemaatilisel kirjeldamisel mängivad tähtsat rolli lineaarsed Caputo murruliste tuletistega diferentsiaalvõrrandid kujul

$$(D^{\alpha_p}_{Cap} y)(t) + \sum_{j=0}^{p-1} d_j(t)\, (D^{\alpha_j}_{Cap} y)(t) = f(t)\ (0 \leq t \leq b,\ b > 0;\ p \in \mathbb{N}), \tag{1.61}$$

kus kordajad $d_j = d_j(t)\, (j = 0, \ldots, p-1)$ ja vabaliige $f = f(t)$ on antud funktsioonid ning $y = y(t)$ on otsitav funktsioon, $(D^{\alpha_j}_{Cap} y)(t)\, (j = 0, \ldots, p)$ on aga otsitava funktsiooni y Caputo α_j-järku murrulised tuletised,

$$0 \leq \alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_p.$$

Kui $p = 1$ ja $\alpha_0 = 0$, siis võrrand (1.61) kujutab endast ühe Caputo murrulise tuletisega diferentsiaalvõrrandit. Sellise võrrandi lahendamist vaatleme selle artikli järgmises osas. Kui $\alpha_j = j,\ j =$

$0, \ldots, p$, siis on tegemist täisarvuliste tuletistega p-järku hariliku diferentsiaalvõrrandiga, mille teooriat ja lahendusmeetodeid on käsitletud näiteks töödes [29, 37]. Kui kõik arvud $\alpha_0, \ldots, \alpha_p$ ei ole täisarvud, siis nõuab võrrandi (1.61) lahendamine spetsiaalsete meetodite väljatöötamist, kuna mittetäisarvuliste tuletistega diferentsiaalvõrrandite korral ei ole reeglina rakendatavad täisarvulist järku tuletistega diferentsiaalvõrrandite vallast tuntud tulemused. Eelkõige puudutab see diferentsiaalvõrrandi lahendi siledusega seotud küsimust (funktsioon on sile, kui ta on vaadeldavas piirkonnas vähemalt üks kord pidevalt diferentseeruv). Nimelt on täisarvulist järku tuletistega diferentsiaalvõrrandi (1.61) lahendite siledus täielikult ära määratud võrrandi kordajate $d_0, \ldots, d_{p-1}$ ja vabaliikme f siledusega: kui $d_0, \ldots, d_{p-1}, f$ on k korda pidevalt diferentseeruvad lõigus $[0, b]$ mingi $k \in \mathbb{N}$ korral, siis diferentsiaalvõrrandi lahendid on $k+1$ korda pidevalt diferentseeruvad lõigus $[0, b]$ [29]. Mittetäisarvulist järku tuletistega diferentsiaalvõrrandite (1.61) korral on küsimus võrrandi lahendi siledusest palju komplitseeritum − võrrandi (1.61) lahend y ei pruugi olla diferentseeruv lõigu $[0, b]$ kõigis punktides isegi siis, kui võrrandi kordajatel $d_0, ..., d_{p-1}$ ja vabaliikmel f on olemas kuitahes kõrget järku tuletised, mis on pidevad lõigus $[0, b]$. Vaatleme näiteks ühe Caputo murrulise tuletisega diferentsiaalvõrrandi algtingimusega ülesannet

$$(D^{\frac{1}{2}}_{Cap} y)(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad 0 \leq t \leq b,$$
$$y(0) = 1,$$

kus $y = y(t)$ on otsitav funktsioon. On lihtne näha, et selle ülesande lahendiks on funktsioon

$$y(t) = \sqrt{t} + 1, \text{ kus } \ 0 \leq t \leq b.$$

Tõepoolest, on selge, et $y(t) = \sqrt{t} + 1$ korral $y(0) = 1$ ning valemite (1.60) ja (1.57) abil saame

$$(D^{\frac{1}{2}}_{Cap} y)(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + 0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \text{ kus } \ 0 \leq t \leq b.$$

Me näeme, et diferentsiaalvõrrandi $(D^{\frac{1}{2}}_{Cap}y)(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ parem pool on konstant ja seega lõpmata arv kordi pidevalt diferentseeruv lõigus $[0, b]$, lahend $y(t) = \sqrt{t} + 1$ on aga diferentseeruv vaid $t \in (0, b]$ korral.

Et konstrueerida kõrget järku täpsusega numbrilisi meetodeid, mis võtavad arvesse murruliste tuletistega diferentsiaalvõrrandi lahendi iseärase käitumise, on töödes [16, 17, 23, 41] kõigepealt uuritud vaadeldava võrrandi lahendi olemasolu ja siledusega seotud küsimusi ning selgitatud välja lahendi tavatuletiste võimalik iseärane käitumine. Selleks on välja töötatud originaalne metoodika – võrrandit kirjeldavatest andmetest lähtuvalt on sisse toodud poollõigul $(0, b]$ siledate funktsioonide kaaluruumid, kus funktsioonide tavatuletised võivad olla tõkestamata punkti 0 lähedal. Seejärel on näidatud, et kui vaadeldav ülesanne on lahenduv, siis tema lahend on vastava kaaluruumi element. Märgime, et sellist metoodikat on kasutatud ka käesoleva artikli järgmises osas vaadeldava ülesande lahendi sileduse uurimisel.

Lahendi diferentseeruvuse ja tuletiste käitumise kohta saadud informatsiooni alusel on vaadeldava murruliste tuletistega diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks konstrueeritud selliseid lähislahendite leidmise arvutusskeeme, mille korral saadud lähislahendid koonduvad vaadeldava ülesande täpseks lahendiks "optimaalse" kiirusega, see tähendab, sama kiirusega nagu siledate lähteandmetega täisarvulist järku tuletistega võrrandite puhul. Lisaks sellele on paljudel juhtudel leitud tingimused, mille korral lähislahendite koondumine on veelgi kiirem, see tähendab, et on näidatud, millal leiab aset lähislahendite superkoondumine (ülikiire koondumine).

Töödes [25, 26, 27, 30] ja [24, 28] on saadud analoogilisi tulemusi vastavalt murruliste tuletistega lineaarsete integro-diferentsiaalvõrrandite ja murruliste tuletistega mittelineaarsete diferentsiaalvõrrandite jaoks.

Viitame ka töödele [14] ja [19], milles vaadeldakse singulaarseid (iseäraseid) murruliste tuletistega diferentsiaalvõrrandeid. Töös [14] on leitud tingimused vaadeldava võrrandi analüütilise lahendi olemasoluks ja ühesuseks ning konstrueeritud kõrget järku täpsusega meetod lähislahendite leidmiseks. Töös [19] on esitatud tarvilikud ja piisavad tingimused lineaarse singulaarse murruliste tuletistega diferentsiaalvõrrandi lõigul $[0, b]$ m korda pidevalt diferentseeruva (lühidalt C^m-sileda, $m \in \mathbb{N}$) lahendi olemasoluks ja ühesuseks. Võrrandi üldliige omab kuju $a(t)t^\alpha(D_0^\alpha y)(t)$, kus $\alpha > 0$, $t \in [0, b]$, $a(t)$ on antud C^m-sile funktsioon ja $y = y(t)$ on otsitav funktsioon; liikme teeb iseäraseks (singulaarseks) tegur t^α. Siin murruline α-järku diferentseerimise operaator D_0^α $(\alpha > 0)$ on defineeritud kui α-järku Riemanni-Liouville'i integraaloperaatori J^α pöördoperaator $(J^\alpha)^{-1}$:

$$D_0^\alpha v = (J^\alpha)^{-1} v, \quad v \in J^\alpha(C[0, b]),$$

kus $J^\alpha(C[0, b]) \subset C[0, b]$ on operaatori $J^\alpha : C[0, b] \to C[0, b]$ väärtuste piirkond. Artiklis [19] saadud tulemused on fundamentaalse tähtsusega kõrget järku täpsusega meetodite konstrueerimisel singulaarsete murruliste tuletistega diferentsiaalvõrrandite ligikaudseks lahendamiseks.

7. Caputo murrulise tuletisega võrrandi lahendamine

Järgnevas konstrueerime ühe kõrget järku täpsusega numbrilise meetodi Caputo murrulist tuletist sisaldava diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks etteantud algtingimuse korral. Lugemise hõlbustamiseks jaotame järgneva esituse alapunktideks. Nendes formuleeritud teoreemid 1 ja 2 järelduvad artiklis [41] tõestatud teoreemidest 1 ja 3.

7.1. Ülesande püstitus ja lahendi siledus

Vaatleme ülesannet

$$(D_{Cap}^\alpha y)(t) + d_0(t)y(t) = f(t), \quad 0 \le t \le b, \quad b > 0, \tag{1.62}$$

$$y(0) = y_0, \tag{1.63}$$

kus $0 < \alpha < 1$, $d_0 = d_0(t)$ ja $f = f(t)$ on antud funktsioonid, $y_0 \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ on antud reaalarv, $y = y(t)$ on otsitav funktsioon ning $D_{Cap}^\alpha y$ on otsitava funktsiooni α-järku Caputo murruline tuletis. Kui d_0 ja f on pidevad funktsioonid lõigus $[0, b]$, siis on ülesanne (1.62)–(1.63) üheselt lahenduv ja tema lahend y on pidev funktsioon lõigus $[0, b]$ (vt teoreemi 1 allpool). Kui d_0 ja f on m korda ($m \in \mathbb{N}$) pidevalt diferentseeruvad lõigus $[0, b]$, siis kahjuks ei saa me seda enam öelda ülesande (1.62)–(1.63) lahendi y jaoks, sest üldjuhul juba tema esimene tuletis y' ei pruugi olla pidev lõigus $[0, b]$ (vt eelmises punktis toodud näidet). Ülesande (1.62)–(1.63) lahendi tuletiste võimaliku iseärase käitumise kirjeldamiseks toome sisse funktsioonide hulga $C^{q,\nu}(0, b]$, kus täisarv $q \in \mathbb{N}$ ja reaalarv $\nu \in (-\infty, 1)$ on vaadeldavat funktsioonide klassi iseloomustavad parameetrid. Funktsioonide klass $C^{q,\nu}(0, b]$ on teatav adaptsioon töös [38] kasutatud analoogilisest mõistest mitmemõõtmeliste nõrgalt singulaarsete integraalvõrrandite lahendite sileduse kirjeldamiseks.

Täpsemalt, sümboliga $C^{q,\nu}(0, b]$ ($q \in \mathbb{N}, \nu \in \mathbb{R}, \nu < 1$) hakkame tähistama selliste funktsioonide $u = u(t)$ hulka, mis on pidevad lõigus $[0, b]$ ja q korda pidevalt diferentseeruvad poollõigus $(0, b]$ ning mille korral

$$\left|u^{(i)}(t)\right| \leq c \left\{\begin{array}{ll} 1, & \text{kui } i < 1 - \nu \\ 1 + |\log t|, & \text{kui } i = 1 - \nu \\ t^{1-\nu-i}, & \text{kui } i > 1 - \nu \end{array}\right\}, \ 0 < t \leq b, \ i = 1, \dots, q, \tag{1.64}$$

kus c on mingi positiivne konstant.

Paneme tähele, et kui $0 \leq \nu < 1$, siis funktsiooni $u \in C^{q,\nu}(0, b]$ tuletised $u^{(i)}(t)\,(i = 1, \dots, q)$ võivad olla tõkestamata lõigu $[0, b]$ vasakpoolse otspunkti $t = 0$ lähedal. Kui $\nu < 0$, siis funktsiooni $u \in C^{q,\nu}(0, b]$ esimest järku tuletis u' on tõkestatud funktsioon piirkonnas $(0, b]$, kuid tema kõrgemat järku tuletised $u^{(2)}, \dots, u^{(q)}$ võivad olla tõkestamata punkti 0 lähedal. Vaatleme näiteks funktsioone y_1, y_2 ja y_3, mis on defineeritud järgmiselt:

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= t^{\frac{3}{2}}, \quad 0 \le t \le b,\\
y_2(t) &= t^{\frac{3}{4}}, \quad 0 \le t \le b,\\
y_3(t) &= \begin{cases} t\log t, & 0 < t \le b,\\ 0, & t = 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Me näeme, et mis tahes $q \in \mathbb{N}$ korral

$$y_1 \in C^{q,-\frac{1}{2}}(0,b], \quad y_2 \in C^{q,\frac{1}{4}}(0,b], \quad y_3 \in C^{q,0}(0,b].$$

Märgime, et kõik funktsioonid, mis on lõigus $[0,b]$ q korda pidevalt diferentseeruvad, kuuluvad hulka $C^{q,\nu}(0,b]$ iga $\nu < 1$ korral. Veelgi enam, kehtivad järgmised sisalduvused:

$$C^q[0,b] \subset C^{q,\nu}(0,b] \subset C^{p,\mu}(0,b] \subset C[0,b], \text{ kui } q \ge p \text{ ja } \nu \le \mu < 1.$$

Ülesande (1.62)–(1.63) lahendi olemasolu, ühesuse ja sileduse kohta kehtib järgmine teoreem.

Teoreem 1.5.1. *Olgu* $0 < \alpha < 1$, $y_0 \in \mathbb{R}$. *Olgu* $d_0, f \in C[0,b]$. *Siis on ülesanne* (1.62)–(1.63) *üheselt lahenduv ja tema lahend* $y \in C[0,b]$ *ning* $D^\alpha_{Cap} y \in C[0,b]$.

Kui $d_0, f \in C^{q,\mu}(0,b]$, $q \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu < 1$, *siis ülesande* (1.62)–(1.63) *lahend* y *ning tema Caputo murruline tuletis* $D^\alpha_{Cap} y$ *kuuluvad hulka* $C^{q,\nu}(0,b]$, *kus* $\nu = \max\{1-\alpha, \mu\}$. *Kui* $d_0, f \in C^q[0,b]$, $q \in \mathbb{N}$, *siis* y *ja* $D^\alpha_{Cap} y$ *kuuluvad hulka* $C^{q,\nu}(0,b]$, *kus* $\nu = 1-\alpha$.

7.2. Meetodi kirjeldus

Ülesande (1.62)–(1.63) ligikaudseks lahendamiseks läheme ülesandelt (1.62)–(1.63) üle teatavale integraalvõrrandile, milles on otsitavaks lähteülesande lahendi Caputo murruline tuletis.

Olgu $0 < \alpha < 1$. Olgu $y \in C[0,b]$ selline pidev funktsioon, mille α-järku Caputo murruline tuletis $D^\alpha_{Cap} y$ on pidev funktsioon lõigus $[0,b]$ ning olgu

$$z(t) = (D^\alpha_{Cap} y)(t), \text{ kus } 0 \le t \le b. \tag{1.65}$$

Siis

$$y(t) = (J^\alpha z)(t) + c, \quad 0 \le t \le b,$$

kus J^α on valemiga (1.38) defineeritud Riemanni-Liouville'i integraaloperaator ja c on mingi konstant. Võttes $t = 0$, saame $y(0) = (J^\alpha z)(0) + c$, millest $c = y(0)$, sest $(J^\alpha z)(0) = 0$ (vt (1.46)). Järelikult funktsioon kujul

$$y(t) = (J^\alpha z)(t) + y_0, \tag{1.66}$$

kus $0 \le t \le b$ ja $z \in C[0, b]$ on antud võrdusega (1.65), rahuldab algtingimust (1.63). Oletame, et võrdusega (1.66) defineeritud funktsioon $y = y(t)$ rahuldab ka diferentsiaalvõrrandit (1.62). Siis iga $t \in [0, b]$ korral kehtib võrdus

$$\big(D^\alpha_{Cap}(J^\alpha z + y_0)\big)(t) + d_0(t)[(J^\alpha z)(t) + y_0] = f(t),$$

mille saame kirjutada kujul

$$z(t) + d_0(t)(J^\alpha z)(t) = f(t) - y_0\, d_0(t),$$

sest valemite (1.57) ja (1.56) tõttu $D^\alpha_{Cap}\, y_0 = 0$ ja $D^\alpha_{Cap} J^\alpha z = z$. Teiste sõnadega, funktsioon kujul (1.65) rahuldab integraalvõrrandit

$$z(t) + \frac{d_0(t)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha - 1} z(s) ds = f(t) - y_0\, d_0(t), \text{ kus } \ 0 \le t \le b. \tag{1.67}$$

On lihtne näha, et kehtib ka vastupidi – kui lõigus $[0, b]$ pidev funktsioon $z = z(t)$ on integraalvõrrandi (1.67) lahendiks, siis valemiga (1.66) defineeritud funktsioon $y = y(t)$ on ülesande (1.62)–(1.63) lahendiks.

Seega võime ülesande (1.62)–(1.63) lahendada järgmiselt – leiame kõigepealt võrrandi (1.67) lahendi z ja seejäral leiame seose (1.66) abil lähteülesande lahendi y, kus z on võrrandi (1.67) lahend. Kahjuks võrrandi (1.67) täpse lahendi leidmine ei ole enamasti võimalik ning peame võrrandi (1.67) lahendi leidmiseks kasutama mingit ligikaudset meetodit. Võrrandi (1.67) ligikaudseks lahendamiseks kasutame tükiti polünomiaalsete koordinaatfunktsioonidega kollokatsioonimeetodit. Kollokatsioonimeetodi puhul otsitakse võrrandile lähislahendit teatavate tuntud funktsioonide (koordinaatfunktsioonide) lineaarkombinatsiooni abil. Lähislahend leitakse tingimusest, et see rahuldab võrrandit etteantud lõplikus arvus punktides, mida nimetatakse kollokatsioonipunktideks. Lõppkokkuvõttes saadakse kõnesoleva lineaarkombinatsiooni kordajate leidmiseks lineaarne algebraline võrrandisüsteem.

Meetodi täpsemat kirjeldust alustame lõigu $[0, b]$ osalõikudeks jaotamisega. Olgu $N \in \mathbb{N}$. Jaotame lõigu $[0, b]$ osalõikudeks $[t_{j-1}, t_j]$ $(j = 1, \dots, N)$ punktidega

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b.$$

Hulka $\Pi_N = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ nimetatakse lõigul $[0, b]$ antud võrguks ja tema elemente $t_0, \dots, t_N$ võrgu sõlmedeks. Võrku nimetatakse ühtlaseks, kui $t_j = jh$, $h = \frac{b}{N}$, $j = 0, \dots, N$. Järgnevas vaatleme võrku Π_N, mille sõlmedeks on

$$t_j = b\left(\frac{j}{N}\right)^r, \quad j = 0, \dots, N, \tag{1.68}$$

kus reaalarv $r \geq 1$ on võrgu Π_N ebaühtlust näitav parameeter. Kui $r = 1$, siis on võrk ühtlane. Kui $r > 1$, siis võrgu sõlmed (1.68) paiknevad tihedamalt lõigu $[0, b]$ vasakpoolse otspunkti 0 lähedal.

Olgu π_k $(k \in \mathbb{N}_0)$ kõikide polünoomide hulk, mille järk on väiksem või võrdne arvuga k. Defineerime hulga

$$S_k(\Pi_N) = \{u : \ u|_{[t_{j-1}, t_j]} \in \pi_k, \ j = 1, \dots, N\},$$

kus $u|_{[t_{j-1}, t_j]}$ $(j = 1, \dots, N)$ on funktsiooni $u : [0, b] \to \mathbb{R}$ ahend osalõigule $[t_{j-1}, t_j] \subset [0, b]$. Hulga $S_k(\Pi_N)$ elementideks on näiteks funktsioonid kujul $u = u_j(t)$, kus

$$u_j(t) = \begin{cases} 0, & \text{kui } t \notin [t_{j-1}, t_j], \\ a_{j0} + a_{j1}t + \cdots + a_{jk}t^k, & \text{kui } t \in [t_{j-1}, t_j]. \end{cases}$$

Siin $0 \leq t \leq b$ ja $a_{j0}, \dots, a_{jk} \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, N$. Paneme tähele, et funktsioon $u \in S_k(\Pi_N)$ ei pruugi olla pidev võrgu Π_N punktides $t_1, \dots, t_{N-1}$.

On lihtne näha, et $S_k(\Pi_N)$ on vektorruum: kui $u_1, u_2 \in S_k(\Pi_N)$ ning c_1 ja c_2 on konstandid, siis $c_1u_1 + c_2u_2 \in S_k(\Pi_N)$; veelgi enam, $S_k(\Pi_N)$ on lõplikumõõtmeline vektorruum dimensiooniga

$$\dim S_k(\Pi_N) = N(k+1).$$

Olgu $m \in \mathbb{N}$ fikseeritud (kuid suvaline) naturaalarv. Valime m kollokatsiooniparameetrit $\eta_1, \dots, \eta_m$ nii, et

$$0 < \eta_1 < \cdots < \eta_m < 1 \tag{1.69}$$

ja defineerime kollokatsioonipunktid

$$t_{jk} = t_{j-1} + \eta_k(t_j - t_{j-1}), \quad k = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, N, \tag{1.70}$$

kus t_j ($j = 0, 1, \dots, N$) on võrgu Π_N sõlmed (1.68).

Integraalvõrrandi (1.67) lähislahendit (võrrandi (1.67) lahendi z lähendit) z_N otsime ruumist $S_{m-1}(\Pi_N)$. Lähislahendi $z_N = z_N(t)$ $(0 \le t \le b)$ leidmiseks asetame

$$z_N \in S_{m-1}(\Pi_N) \tag{1.71}$$

võrrandisse (1.67) otsitava z asemele ning nõuame, et võrrand oleks rahuldatud kollokatsioonipunktides (1.70):

$$\begin{aligned} z_N(t_{jk}) &+ \frac{d_0(t_{jk})}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{jk}} (t_{jk} - s)^{\alpha-1} z_N(s) ds \\ &= f(t_{jk}) - y_0\, d_0(t_{jk}), \quad k = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{1.72}$$

Peale z_N leidmist tingimustest (1.71)–(1.72) saame leida ülesande (1.62)–(1.63) lähislahendi (lahendi y lähendi) y_N valemiga

$$y_N(t) = (J^\alpha z_N)(t) + y_0, \text{ kus } 0 \le t \le b. \tag{1.73}$$

Märgime, et suuruse z_N leidmiseks tingimustest (1.71) ja (1.72) võime kasutada tema esitust Lagrange'i fundamentaalpolünoomide kaudu kujul

$$z_N(t) = \sum_{\lambda=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{m} c_{\lambda\mu} \varphi_{\lambda\mu}(t), \tag{1.74}$$

kus $0 \leq t \leq b$, $c_{\lambda\mu}$ $(\mu = 1, \ldots, m; \lambda = 1, \ldots, N)$ on otsitavad kordajad ja

$$\varphi_{\lambda\mu}(t) = \begin{cases} 0, & \text{kui } t \notin [t_{\lambda-1}, t_\lambda], \\ \prod_{i=1, i\neq\mu}^{m} \frac{t - t_{\lambda i}}{t_{\lambda\mu} - t_{\lambda i}}, & \text{kui } t \in [t_{\lambda-1}, t_\lambda]. \end{cases}$$

Siis $z_N \in S_{m-1}(\Pi_N)$ ja $z_N(t_{jk}) = c_{jk},\ k = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, N$. Otsides tingimusi (1.72) rahuldavat funktsiooni z_N kujul (1.74), saame järgmise lineaarse algebralise võrrandisüsteemi kordajate $\{c_{jk}\}$ jaoks:

$$c_{jk} + \frac{d_0(t_{jk})}{\Gamma(\alpha)} \sum_{\lambda=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{m} c_{\lambda\mu} \int_0^{t_{jk}} (t_{jk} - s)^{\alpha-1} \varphi_{\lambda\mu}(s) ds = f(t_{jk}) - y_0\, d_0(t_{jk}),$$
$$k = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, N.$$

Märgime, et saadud võrrandisüsteemis olevad integraalid on täpselt leitavad. Lahendades selle võrrandisüsteemi, saame leitud $\{c_{jk}\}$ ja esituse (1.74) abil võrrandi (1.67) lähislahendi $z_N(t)$ välja kirjutada iga $t \in [0, b]$ korral. Asetades leitud $z_N(t)$ valemisse (1.73), saame leida ülesande (1.62)–(1.63) lähislahendi $y_N(t)$ iga $t \in [0, b]$ korral.

7.3. Meetodi koonduvus

Eelmises punktis esitatud meetodi (1.71)–(1.73) koonduvuse kohta kehtib järgmine teoreem.

Teoreem 1.5.2. (i) *Eeldame, et* $0 < \alpha < 1$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $d_0, f \in C[0, b]$, $b > 0$. *Olgu* $N, m \in \mathbb{N}$ *ja olgu kollokatsioonipunktid* $\{t_{jk}\}$ *määratud võrdusega* (1.70), *kus* $\{t_j\}$ *on valemiga* (1.68) *määratud võrgu* Π_N *sõlmed ja* $\eta_1, \ldots, \eta_m$ *on suvalised kollokatsiooniparameetrid, mis rahuldavad tingimust* (1.69).

Siis ülesanne (1.62)–(1.63) *on üheselt lahenduv ja tema lahend* $y \in C[0, b]$. *Leidub selline arv* $N_0 \in \mathbb{N}$, *et kõigi* $N \geq N_0$ *korral tingimused* (1.71)–(1.72) *määravad üheselt integraalvõrrandi* (1.67) *lähislahendi* $z_N \in S_{m-1}(\Pi_N)$*, mis valemi* (1.73) *abil määrab üheselt ülesande* (1.62)–(1.63) *lähislahendi* y_N *ja leiab aset koondumine*

$$\max_{0\le t\le b} |y(t) - y_N(t)| \to 0, \qquad \text{kui } N \to \infty.$$

(ii) *Eeldame lisaks osas* (i) *vaadeldud tingimustele, et* $d_0, f \in C^{m+1,\mu}(0,b]$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu < 1$ *ja leiduvad arvud (kordajad)* $w_1, \ldots, w_m$ *nii, et kvadratuurvalem*

$$\int_0^1 F(x)dx = \sum_{k=1}^m w_k F(\eta_k) + R_m(F), \tag{1.75}$$

kus $\eta_1, \ldots, \eta_m$ *on tingimust* (1.69) *rahuldavad kollokatsioonipa-rameetrid, on täpne kõigi* m*-järku polünoomide* F *korral (see tähendab, et jääkliige* $R_m(F)$ *on võrdne nulliga kõigi* m*-järku polünoomide* F *korral).*

Siis $N \ge N_0$ *korral kehtib veahinnang*

$$\max_{0\le t\le b} |y(t) - y_N(t)| \le c \begin{cases} N^{-r(1+\alpha-\nu)}, & \text{kui } 1 \le r < \frac{m+\alpha}{1+\alpha-\nu}, \\ N^{-m-\alpha}, & \text{kui } r \ge \frac{m+\alpha}{1+\alpha-\nu}, \end{cases}$$

kus $\nu = \max\{1-\alpha, \mu\}$, $r \ge 1$ *on võrgu* Π_N *sõlmede* (1.68) *ebaühtlust iseloomustav parameeter ja* c *on mingi positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest* N*.*

7.4. Arvulised tulemused

Meetodi (1.71)–(1.73) rakenduse näiteks ja teoreemiga 2 esitatud teoreetiliste tulemuste testimiseks vaatleme ülesannet

$$(D^{\frac{1}{2}}_{Cap} y)(t) + t^{\frac{1}{2}}\, y(t) = \frac{3\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})} t^{\frac{1}{4}} + t^{\frac{5}{4}} + t^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \le t \le 1, \tag{1.76}$$

$$y(0) = 1, \tag{1.77}$$

kus $y = y(t)$ on otsitav funktsioon. See ülesanne on erijuht ülesandest (1.62)–(1.63), kus

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad y_0 = 1, \quad d_0(t) = t^{\frac{1}{2}}, \quad f(t) = \frac{3\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})} t^{\frac{1}{4}} + t^{\frac{5}{4}} + t^{\frac{1}{2}}, \quad b = 1.$$

Siin $d_0 \in C^{q,\frac{1}{2}}(0,1] \subset C^{q,\frac{3}{4}}(0,1]$ ja $f \in C^{q,\frac{3}{4}}(0,1]$ suvalise $q \in \mathbb{N}$ korral. Sellest järeldub, et $d_0, f \in C^{q,\mu}(0,b]$, kus $q \in \mathbb{N}$ ja $\mu = \frac{3}{4}$. Teoreemi 1 põhjal on ülesanne (1.76)–(1.77) üheselt lahenduv ja tema lahend y kuulub hulka $C^{q,\nu}(0,1]$, kus $q \in \mathbb{N}$ ja

$$\nu = \max\{1-\alpha, \mu\} = \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\} = \frac{3}{4}.$$

Järgnevalt läheme ülesandelt (1.76)–(1.77) üle integraalvõrrandile kujul (1.67), kus otsitavaks funktsiooniks on ülesande (1.76)–(1.77) täpse lahendi $y = y(t)$ Caputo murruline tuletis $z(t) = (D^{\frac{1}{2}}_{Cap}y)(t)$:

$$z(t) + \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} z(s)ds = \frac{3\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})} t^{\frac{1}{4}} + t^{\frac{5}{4}}, \text{ kus } \ 0 \le t \le 1.$$

Selle võrrandi ligikaudseks lahendamiseks valime esmalt parameetrid $N \in \mathbb{N}$ ja $r \geq 1$ ning moodustame võrgu Π_N sõlmedega (1.68). Seejärel fikseerime kollokatsiooniparameetrite arvu $m \in \mathbb{N}$ ja valime kollokatsiooniparameetrid $\eta_1, \ldots, \eta_m$ nii, et nad rahuldavad teoreemis 2 seatud tingimust (1.75) – selleks sobivad näiteks lõigule $[0,1]$ kohandatud Gaussi-Legendre'i m-järku kvadratuurvalemi sõlmed (vt näiteks [36]). Seega $m = 2$ korral valime vastavateks kollokatsiooniparameetriteks

$$\eta_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{6}, \quad \eta_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{6}, \tag{1.78}$$

$m = 3$ korral aga

$$\eta_1 = \frac{5-\sqrt{15}}{10}, \quad \eta_2 = \frac{1}{2}, \quad \eta_3 = \frac{5+\sqrt{15}}{10}. \tag{1.79}$$

Kollokatsiooniparameetrite abil leiame kollokatsioonipunktid (1.70) ja kirjutame välja kollokatsioonitingimused seose (1.72) põhjal:

$$z_N(t_{jk}) + \frac{t_{jk}^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{t_{jk}} (t_{jk}-s)^{-\frac{1}{2}} z_N(s)ds = \frac{3\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})} t_{jk}^{\frac{1}{4}} + t_{jk}^{\frac{5}{4}}, \tag{1.80}$$

$$k = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, N.$$

Otsitava funktsiooni $z_N \in S_{m-1}(\Pi_N)$ saame kirjutada kujul (1.74), mille kordajad $c_{\lambda\mu}$ ($\mu = 1, \ldots, m; \lambda = 1, \ldots, N$) leiame tingimustest (1.80) tulenevast võrrandisüsteemist

$$c_{jk} + \frac{t_{jk}^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \sum_{\lambda=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{m} c_{\lambda\mu} \int_0^{t_{jk}} (t_{jk} - s)^{-\frac{1}{2}} \varphi_{\lambda\mu}(s) ds = \frac{3\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})} t_{jk}^{\frac{1}{4}} + t_{jk}^{\frac{5}{4}},$$

$$k = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, N.$$

Pärast võrrandisüsteemi lahendamist leiame ülesande (1.76)–(1.77) lahendi $y = y(t)$ lähendi $y_N = y_N(t)$ seose (1.73) abil:

$$y_N(t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \sum_{\lambda=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{m} c_{\lambda\mu} \int_0^{t} (t - s)^{-\frac{1}{2}} \varphi_{\lambda\mu}(s) ds + 1, \text{ kus } 0 \le t \le 1. \tag{1.81}$$

Teoreemi 2 põhjal saame $N \ge N_0$ korral väärtuste $\alpha = \frac{1}{2}$, $\nu = \frac{3}{4}$, $m = 2$ ja kollokatsiooniparameetrite (1.78) puhul veahinnangu

$$\max_{0 \le t \le 1} |y(t) - y_N(t)| \le c_1 \begin{cases} N^{-0.75r}, & \text{kui } 1 \le r \le \frac{10}{3}, \\ N^{-2.5}, & \text{kui } r \ge \frac{10}{3}, \end{cases} \tag{1.82}$$

väärtuste $\alpha = \frac{1}{2}$, $\nu = \frac{3}{4}$, $m = 3$ ja kollokatsiooniparameetrite (1.79) korral aga veahinnangu

$$\max_{0 \le t \le 1} |y(t) - y_N(t)| \le c_2 \begin{cases} N^{-0.75r}, & \text{kui } 1 \le r \le \frac{14}{3}, \\ N^{-3.5}, & \text{kui } r \ge \frac{14}{3}, \end{cases} \tag{1.83}$$

kus y on ülesande (1.76)–(1.77) täpne lahend, y_N on tema valemi (1.81) abil leitud lähend, $r \in [1, \infty)$ on võrgu Π_N ebaühtlust iseloomustav parameeter (vt (1.68)) ning c_1 ja c_2 on mingid positiivsed konstandid, mis ei sõltu suurusest N.

Järgnevates tabelites 1 ja 2 on esitatud numbriliste eksperimentide tulemused parameetrite N ning r erinevate väärtuste korral vastavalt $m = 2$ ja $m = 3$ puhul. Tabelites olevad suurused ε_N ja ϱ_N on arvutatud järgmiselt:

$$\varepsilon_N = \max_{j=1,\ldots,N} \max_{i=0,\ldots,9} |y(x_{ji}) - y_N(x_{ji})|, \quad x_{ji} = t_{j-1} + i\,(t_j - t_{j-1})/10,$$

kus

$$y(t) = t^{\frac{3}{4}} + 1 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

on ülesande (1.76)–(1.77) täpne lahend ning

$$\varrho_N = \frac{\varepsilon_{N/2}}{\varepsilon_N}.$$

Numbrilistest tulemustest on näha, et suurendades lõigu $[0, 1]$ osalõikude $[t_{j-1}, t_j]$ $(j = 1, \ldots, N)$ arvu N kaks korda, vähenevad vead vastavalt teoreetilistele hinnangutele (1.82) ja (1.83).

Tõepoolest, veahinnangu (1.82) põhjal saame, et $m = 2$ puhul suhe ϱ_N peaks $r = 1$, $r = 2$ ja $r \geq \frac{10}{3}$ korral ligikaudu olema vastavalt $2^{0.75} \approx 1.68$, $2^{1.5} \approx 2.83$ ja $2^{2.5} \approx 5.66$. Need väärtused on esitatud tabeli 1 viimases reas.

Veahinnangu (1.83) põhjal saame, et $m = 3$ puhul suhe ϱ_N peaks $r = 1$, $r = 2$, $r = 3$, $r = 4$ ja $r \geq \frac{14}{3}$ korral ligikaudu olema vastavalt $2^{0.75} \approx 1.68$, $2^{1.5} \approx 2.83$, $2^{2.25} \approx 4.76$, $2^3 = 8$ ja $2^{3.5} \approx 11.31$. Need väärtused on esitatud tabeli 2 viimases reas.

Me näeme, et saadud numbrilised tulemused on heas kooskõlas teoreetiliste hinnangutega (1.82) ja (1.83).

Lõpetuseks

Avaldame tänu akadeemik Gennadi Vainikkole, kes oma nõuannete ja märkustega aitas kaasa käsikirja valmimisele.

Uurimistööd on finantseerinud Eesti Teadusagentuur (PRG864).

Tabel 1.1: Arvulised tulemused ülesande (1.76)–(1.77) jaoks $m = 2$ korral.

	$r = 1$		$r = 2$		$r = \frac{10}{3}$	
N	ε_N	ϱ_N	ε_N	ϱ_N	ε_N	ϱ_N
4	$1.49 \cdot 10^{-2}$		$5.39 \cdot 10^{-3}$		$3.10 \cdot 10^{-3}$	
8	$9.00 \cdot 10^{-3}$	1.66	$1.92 \cdot 10^{-3}$	2.81	$5.60 \cdot 10^{-4}$	5.54
16	$5.39 \cdot 10^{-3}$	1.67	$6.80 \cdot 10^{-4}$	2.82	$9.97 \cdot 10^{-5}$	5.62
32	$3.22 \cdot 10^{-3}$	1.67	$2.40 \cdot 10^{-4}$	2.83	$1.76 \cdot 10^{-5}$	5.65
64	$1.92 \cdot 10^{-3}$	1.68	$8.50 \cdot 10^{-5}$	2.83	$3.12 \cdot 10^{-6}$	5.66
128	$1.14 \cdot 10^{-3}$	1.68	$3.01 \cdot 10^{-5}$	2.83	$5.51 \cdot 10^{-7}$	5.66
256	$6.80 \cdot 10^{-4}$	1.68	$1.06 \cdot 10^{-5}$	2.83	$9.75 \cdot 10^{-8}$	5.66
		1.68		2.83		5.66

Tabel 1.2: Arvulised tulemused ülesande (1.76)–(1.77) jaoks $m = 3$ korral.

	$r = 1$		$r = 2$		$r = 3$	
N	ε_N	ϱ_N	ε_N	ϱ_N	ε_N	ϱ_N
4	$5.90 \cdot 10^{-3}$		$2.14 \cdot 10^{-3}$		$7.61 \cdot 10^{-4}$	
8	$3.57 \cdot 10^{-3}$	1.65	$7.61 \cdot 10^{-4}$	2.81	$1.60 \cdot 10^{-4}$	4.75
16	$2.14 \cdot 10^{-3}$	1.67	$2.69 \cdot 10^{-4}$	2.82	$3.37 \cdot 10^{-5}$	4.76
32	$1.28 \cdot 10^{-3}$	1.67	$9.53 \cdot 10^{-5}$	2.83	$7.08 \cdot 10^{-6}$	4.76
64	$7.61 \cdot 10^{-4}$	1.68	$3.37 \cdot 10^{-5}$	2.83	$1.49 \cdot 10^{-6}$	4.76
128	$4.53 \cdot 10^{-4}$	1.68	$1.19 \cdot 10^{-5}$	2.83	$3.13 \cdot 10^{-7}$	4.76
256	$2.69 \cdot 10^{-4}$	1.68	$4.21 \cdot 10^{-6}$	2.83	$6.58 \cdot 10^{-8}$	4.76
		1.68		2.83		4.76

	$r = 4$		$r = \frac{14}{3}$		$r = 5$	
N	ε_N	ϱ_N	ε_N	ϱ_N	ε_N	ϱ_N
4	$7.61 \cdot 10^{-4}$		$8.21 \cdot 10^{-4}$		$9.27 \cdot 10^{-4}$	
8	$9.60 \cdot 10^{-5}$	7.92	$7.64 \cdot 10^{-5}$	10.75	$8.54 \cdot 10^{-5}$	10.85
16	$1.20 \cdot 10^{-5}$	7.99	$6.77 \cdot 10^{-6}$	11.29	$8.29 \cdot 10^{-6}$	10.30
32	$1.50 \cdot 10^{-6}$	8.00	$5.98 \cdot 10^{-7}$	11.31	$7.47 \cdot 10^{-7}$	11.10
64	$1.88 \cdot 10^{-7}$	8.00	$5.29 \cdot 10^{-8}$	11.31	$6.56 \cdot 10^{-8}$	11.38
128	$2.35 \cdot 10^{-8}$	8.00	$4.67 \cdot 10^{-9}$	11.31	$5.72 \cdot 10^{-9}$	11.46
256	$2.93 \cdot 10^{-9}$	8.00	$4.13 \cdot 10^{-10}$	11.31	$4.98 \cdot 10^{-10}$	11.49
		8.00		11.31		11.31

Kirjandus

[1] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, J.J. Trujillo. *Fractional Calculus. Models and Numerical Methods.* World Scientific, New Jersey, 2016.

[2] H. Brunner. *Volterra Integral Equations: An Introduction to Theory and Applications.* Cambridge University Press, Cambridge, 2017.

[3] M. Caputo. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent - II. *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, **13** (1967), 529–539. Reprinted *Fract. Calc. Appl. Anal.* **11** (2008), 4–14.

[4] A. Cardone, D. Conte, B. Paternoster. Two-step collocation methods for fractional differential equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, **22** (2018), 1–17.

[5] K. Diethelm. *The Analysis of Fractional Differential Equations.* Lecture Notes in Mathematics 2004, Springer, 2010.

[6] K. Diethelm, N. J. Ford. Analysis of fractional differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, **265** (2002), 229–248.

[7] M. M. Dzherbashyan, A. B. Nersesian. Fractional derivatives and the Cauchy problem for differential equations of fractional order. *Izv. Akad. Nauk Arm. SSR, Mat.*, 3 (1968), 3–29 (vene keeles).

[8] N. J. Ford, M. L. Morgado, M. Rebelo. A nonpolynomial collocation method for fractional terminal value problems. *Comput. Appl. Math.*, **275** (2015), 392–402.

[9] R. Gorenflo, S. Vessella. *Abel Integral Equations.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1991.

[10] R. Garrappa. Trapezoidal methods for fractional differential equations: Theoretical and computational aspects. *Math. Comput. Simul.*, **110** (2015), 96–112.

[11] J. Janno, N. Kinash. Pöördülesanne tuletise järgu ja allikafunktsiooni määramiseks murrulise tuletisega difusioonivõrrandis lõpphetkel tehtud mõõtmiste põhjal. *Eesti Matemaatika Selts. Aastaraamat 2017.* (Toim. Peeter Puusemp) Tallinn, 2018, 54–68.

[12] G. Kangro. *Matemaatilise Analüüs I.* Eesti Raamat, 1965.

[13] G. Kangro. *Matemaatilise Analüüs II.* Valgus, 1968.

[14] U. Kangro. Cordial Volterra integral equations and singular fractional integro-differential equations in spaces of analytic functions. *Math. Model. Anal.*, **22** (2017), 548–567.

[15] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Elsevier, Amsterdam, 2006.

[16] M. Kolk, A. Pedas, E. Tamme. Modified spline collocation for linear fractional differential equations. *J. Comput. Appl. Math.*, **283** (2015), 28–40.

[17] M. Kolk, A. Pedas, E. Tamme. Smoothing transformation and spline collocation for linear fractional boundary value problems. *Appl. Math. Comput.*, **283** (2016), 234–250.

[18] H. Liang, M. Stynes. Collocation methods for general Riemann-Liouville two-point boundary value problems. *Adv. Comput. Math.*, **45** (2019), 897–928.

[19] K. Lätt, A. Pedas, G. Vainikko. A smooth solution of a singular fractional differential equation. *J. Anal. Appl.*, **34** (2015), 127–146.

[20] J. A. T. Machado. *Handbook of Fractional Calculus with Applications: Volumes 1-8.* Berlin, Boston: De Gruyter, 2019.

[21] E. Oja, P. Oja. *Funktsionaalanalüüs.* Tartu Ülikooli Kirjastus, 1991.

[22] A. Pedas. Efektiivsed lahendusmeetodid murruliste tuletistega diferentsiaalvõrrandite ja singulaarsustega integraalvõrrandite jaoks. *Eesti Vabariigi Preemiad 2019.* (Toim. Tarmo Soomere) Eesti Teaduste Akadeemia, Tallinn, 2019, 82–93.

[23] A. Pedas, E. Tamme. Spline collocation methods for linear multi-term fractional differential equations. *J. Comput. Appl. Math.*, **236** (2011), 167–176.

[24] A. Pedas, E. Tamme. Numerical solution of nonlinear fractional differential equations by spline collocation methods. *J. Comput. Appl. Math.*, **255** (2014), 216–230.

[25] A. Pedas, E. Tamme, M. Vikerpuur. Spline collocation for fractional integro-differential equations. *Lecture Notes in Computer Science*, **9045** (2015), 315–322.

[26] A. Pedas, E. Tamme, M. Vikerpuur. Piecewise polynomial collocation for a class of fractional integro-differential equations. *Integral Methods in Science and Engineering, Springer International Publishing* (2015), 471–482.

[27] A. Pedas, E. Tamme, M. Vikerpuur. Spline collocation for fractional weakly singular integro-differential equations. *Appl. Num. Math.*, **110** (2016), 204–214.

[28] A. Pedas, E. Tamme, M. Vikerpuur. Smoothing transformation and spline collocation for nonlinear fractional initial and boundary value problems. *J. Comput. Appl. Math.*, **317** (2017), 1–16.

[29] A. Pedas, G. Vainikko. *Harilikud Diferentsiaalvõrrandid. Teooria, Näiteid, Ülesandeid.* Tartu Ülikooli Kirjastus, 2011.

[30] A. Pedas, M. Vikerpuur. Spline collocation for multi-term fractional integro-differential equations with weakly singular kernels. *Fractal Fract.*, **5** (2021), 90.

[31] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations.* Academic Press, San Diego, 1999.

[32] Yu. N. Rabotnov. *Polzuchest Elementov Konstruktsii.* Nauka, Moscow, 1966 (vene keeles); *Creep Problems in Structural Members*, North-Holland, Amsterdam, 1969.

[33] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications.* Gordon and Breach, Yverdon, 1993.

[34] M. Stynes, J. L. Gracia. A finite difference method for a two-point boundary value problem with a Caputo fractional derivative. *J. Numer. Anal.*, **35** (2015), 698–721.

[35] H. Sun, Y. Zhang, D. Baleanu, W. Chen, Y. Chen. A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, **64** (2018), 213–231.

[36] E. Tamme, L. Võhandu, L. Luht. *Arvutusmeetodid (1. osa).* Tallinn, Valgus, 1986.

[37] E. Tamme. *Arvutusmeetodid (2. osa).* Tallinn, Valgus, 1973.

[38] G. Vainikko. *Multidimensional Weakly Singular Integral Equations.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993.

[39] G. Vainikko. Which functions are fractionally differentiable? *J. Anal. Appl.* **35** (2016), 465–487.

[40] G. Vainikko. Murruliselt diferentseeruvate funktsioonide klassi kirjeldusi. *Eesti Matemaatika Selts. Aastaraamat 2018.* (Toim. Rainis Haller, Toivo Leiger, Kaido Lätt) Tartu, 2021, 40–44.

[41] M. Vikerpuur. Two collocation type methods for fractional differential equations with non-local boundary conditions. *Math. Model. Anal.* **22** (2017), 654–670.