Karen Uhlenbeck, geomeetria ja matemaatiline füüsika

VIKTOR ABRAMOV, PRIIT LÄTT
Tartu Ülikool

1 Sissejuhatus

Norra Teaduste Akadeemia andis 2019. aasta Abeli preemia Karen Uhlenbeckile teedrajava töö ja väljapaistvate saavutuste eest kaasaegse matemaatika sellistes tähtsates valdkondades, kus uuritakse geomeetrilisi diferentsiaalvõrrandeid, kalibratsiooniväljateooriaid ja integreeruvaid süsteeme. Antud artikkel on pühendatud Karen Uhlenbecki panusele nende matemaatika valdkondade arengusse, mis ühendavad geomeetria, matemaatilise füüsika ja matemaatilise analüüsi üheks tervikuks. Vastavat matemaatika valdkonda nimetatakse sageli *geomeetriliseks analüüsiks*, mõnikord *globaalseks analüüsiks*. Selles valdkonnas rakendatakse matemaatilise analüüsi ja diferentsiaalvõrrandite teooria meetodeid geomeetriliste ja topoloogiliste probleemide uurimiseks.

Klassikalise diferentsiaalgeomeetria põhiuurimisobjektideks on kõverad ja pinnad. Kaasaegses teoreetilises füüsikas on mitu väljateooriat, kusjuures iga väljateooria eesmärk on kirjeldada teatud füüsikalisi nähtusi, näiteks elektromagnetilisi vastasmõjusid. Väljateoorias kasutatakse füüsikalise välja mõistet, mis matemaatika seisukohalt on reaal-, kompleks- või vektorväärtustega funktsioon, mille määramispiirkond on neljamõõtmeline Minkowski ruum. Geomeetrilise analüüsi raames uuritakse kõveraid, pindu või välju, mis on mõne geomeetrilise (näiteks pindala) või füüsikalise (näiteks energia) suuruse kriitilised punktid. Näiteks, kui geomeetriliseks suuruseks on minimiseerimist vajav pinna pindala, siis saame *minimaalpindade teooria*. Minimaalpinna kujukas näide on järgmine. Oletame, et kolmemõõtmelises ruumis on antud kinnine joon, mis ei ole sõlm, ning millel puuduvad eneselõikamised. Teiste sõnadega, antud kinnine joon on kuidagi deformeeritud ringjoon. Ülesanne seisneb nüüd selles, et peame moodustama pinna nii, et esiteks, etteantud kinnine joon on selle pinna raja, ja teiseks, pinna pindala on minimaalne. Minimaalpind on matemaatiline abstraktsioon, kuid on huvitav, et sellised pinnad tekivad meid ümbritsevas reaalsuses füüsikaliste seaduste toimel. Näiteks kui teha traadist ring, painutada seda ja panna see seebivahu sisse, siis traadist tehtud kontuurile tõmbub seebikile, mille geomeetriline kuju on minimaalpind. Karen Uhlenbecki kõige olulisemate saavutuste hulgas on põhjapanevad tulemused minimaalpindade teoorias.

Teine geomeetrilise analüüsi valdkond, kuhu Karen Uhlenbeck on silmapaistvalt panustanud, on kalibratsiooniteooriate geomeetria ja Yang-Millsi võrrandite lahendid. Tema tulemused kalibratsiooniteooriate geomeetrias on fundamentaalsed ja kõik edasised uurimised selles valdkonnas tuginevad ühel või teisel määral just Karen Uhlenbecki töödele. Antud uurimisvaldkond on äärmiselt huvitav ja aktuaalne tänu asjaolule, et selles realiseeritakse erinevate teadusvaldkondade nagu teoreetiline füüsika, diferentsiaalgeomeetria, algebra, matemaatiline analüüs ja diferentsiaalvõrranditeooria ideede, mõistete ja meetodite süntees.

Kalibratsiooniväljateooriaid (gauge theories) kasutatakse kaasaegses teoreetilises füüsikas vastasmõjude kirjeldamiseks. Kaasaegsed eksperimentaalsed andmed näitavad, et looduses on neli fundamentaalset interaktsiooni. Need on elektromagnetilised, nõrgad, tugevad ja gravitatsioonilised vastasmõjud. Igat interaktsiooni kirjeldab vastav väljateooria, millel on kalibratsiooniväljateooria struktuur. Selle struktuuri eripäraks on teooria kalibratsioonisümmeetriad, mis moodustavad kalibratsioonirühma. Kalibratsioonisümmeetria tähendab, et kui kalibratsiooniväli on teatud viisil teisendatud (kalibratsiooniteisendused, mis sõltuvad kalibratsioonirühma elementidest), siis vastav füüsikaline konfiguratsioon ei muutu, st väljateooria võrrandid ja nende lahendid jäävad samadeks. Teiste sõnadega, kalibratsiooniteisendus ei too teooria jaoks kaasa mingeid füüsikalisi tagajärgi.

Võime öelda, et kalibratsiooniväli on määratud kalibratsiooniteisenduse täpsusega, ja kui kalibratsioonirühm on mittekommutatiivne, teeb see kalibratsiooniväljateooria kvantiseerimise üsna keeruliseks. Kalibratsiooniväljateooria mittekommutatiivse kalibratsioonirühmaga kvantiseerimise meetod, mis tugineb Feynmani integraalile (integreerimine toimub lõpmatumõõtmelises funktsionaalses ruumis), on välja töötatud L. Faddeevi ja A. Slavnovi töödes [3].

Seega on igal kalibratsiooniväljateoorial oma kalibratsioonirühm. Reeglina on see N-järku komplekssete unitaarsete determinandiga 1 maatriksite rühm $SU(N)$, näiteks Maxwelli teooria (elektromagnetismiteooria) kalibratsioonirühm on $U(1)$ (kompleksarvud mooduliga 1), Yang-Millsi väljateooria kalibratsioonirühm on $SU(2)$ ning tugevate vastasmõjude teooria kalibratsioonirühm on $SU(3)$. Siinkohal tasub mainida, et kaasaegse teoreetilise füüsika fundamentaalseks probleemiks on ühtse väljateooria konstrueerimine, st sellise väljateooria leidmine, mille raames saaks kirjeldada kõiki teadaolevaid vastasmõjusid. Elektromagnetiliste ja nõrkade interaktsioonide ühtse väljateooria on konstrueeritud ja uuritud Glashow, Weinbergi ja Salami töödes. Vastavat teooriat nimetatakse Glashow-Weinberg-Salami kalibratsiooniväljateooriaks (electroweak theory) ja selle kalibratsioonirühmaks on $SU(2) \times U(1)$. Glashow-Weinberg-Salami teooriat on võimalik ühendada tugevate interaktsioonide teooriaga, valides piisavalt suure kalibratsioonirühma (mis sisaldaks $SU(2) \times U(1)$ ja $SU(3)$), näiteks $SU(5)$. Gravitatsiooni võib vaadelda ka kui kalibratsiooniväljateooriat. Kalibratsioonirühm on sel juhul aga lõpmatumõõtmelise funktsionaalse ruumi struktuuriga ja see on probleemide allikas, mida pole siiamaani veel lahendatud.

Esimese kalibratsiooniväljateooria mittekommutatiivse kalibratsioonirühmaga $SU(2)$ pakkusid välja füüsikud C. Yang ja R. Mills [10], ja praegu nimetatakse vastavat väljateooriat Yang-Millsi väljateooriaks. Yang-Millsi väljateooria baseerub H. Weyl'i kalibratsiooniprintsiibil, mida võiks sõnastada järgmiselt: kalibratsiooniteisenduse parameeter sõltub aegruumi punktist, või teiste sõnadega, vaatlejatel on aegruumi erinevates punktides erinevad kalibratsiooniteisenduse parameetrid. Diferentsiaalgeomeetrias loodi 30. aastate lõpus aktiivselt uuritud teooriad kihtkondade ning seostuste kohta. Rõhutame, et Yang-Millsi väljateooria oli konstrueeritud lähtudes väljateooria printsiipidest rõhuga teoreetilise füüsika probleemide lahendamiseks. Samas kihtkondade ja seostuste teooria kasvas välja seostuse mõiste üldistamisest, kusjuures viimane oli loodud diferentsiaalgeomeetria probleemide lahendamiseks. Seda hämmastavam on fakt, et need kaks teooriat osutusid põhimõistete matemaatilise kirjelduse seisukohast täpselt samaks! Ainus erinevus oli, et diferentsiaalgeomeetrias ja teoreetilises füüsikas kasutati samade objektide jaoks erinevaid termineid. Diferentsiaalgeomeetrias kasutati mõisteid seostus ja selle kõverus, samas Yang-Millsi väljateoorias kasutati termineid kalibratsioonivälja potentsiaal ja selle tugevus. Kuid need olid sisuliselt samad objektid! See avastus eelmise sajandi 60. aastate lõpus andis võimsa tõuke kahe teadusharu kiireks vastastikuseks rikastamiseks.

2 Seostuse mõiste

Selgus, et teooriad kihtkondadest ja seostustest kihtkondadel on kalibratsiooniväljateooriate matemaatiliseks kirjeldamiseks adekvaatsed geomeetrilised teooriad. Sellega seoses tekib küsimus, mis on seostus ja kuidas selline mõiste diferentsiaalgeomeetriasse tekkis. Osutub, et seostuse mõistet saab seletada *suunatuletise* abil. Funktsiooni tuletis näitab, kui kiiresti funktsioon muutub. Kui aga funktsioon on määratud kolmemõõtmelises ruumis, siis suunatuletis näitab, kui kiiresti muutub funktsioon teatud suunas. Olgu $\mathbf{E^3}$ kolmemõõtmeline eukleidiline ruum. Kui p on $\mathbf{E^3}$ mingi punkt, siis kõik vektorid alguspunktiga punktis p moodustavad vektorruumi, mida tähistame $T_p\mathbf{E^3}$, ja edaspidi nimetame ruumi $\mathbf{E^3}$ puutujaruumiks punktis p. Olgu kolmemõõtmelises eukleidilises ruumis $\mathbf{E}^3$ antud punkt p, vektor $\mathbf{v}$ (rakendatud punktist p) ja punkti p ümbruses $U \subset \mathbf{E}^3$ määratud lõpmata diferentseeruv funktsioon f. Alati leidub parametriseeritud kõver $\alpha : I \to U$, kus $I \subset \mathbb{R}$, mis läbib punkti p, st $\alpha(0) = p$ ja $\mathbf{v}$ on selle kõvera puutujavektor punktis p, st $\alpha'(0) = \mathbf{v}$, kus $\alpha'(t)$ on kõvera α

puutujavektor punktis $\alpha(t)$. Funktsiooni f suunatuletiseks punktis p vektori v suunas nimetatakse arvu

$$(\nabla_v f)_p = \frac{d}{dt}(f(\alpha(t)))\Big|_{t=0}. \tag{1.1}$$

Kui eukleidilise ruumi $\mathbf{E}^3$ (või selle lahtise alamhulga $U \subset \mathbf{E}^3$) igas punktis p on määratud vektor X_p (siinkohal peame silmas, et vektor X_p on rakendatud punktist p), siis öeldakse, et eukleidilises ruumis on antud vektorväli X ja vektor X_p on selle vektorvälja väärtus punktis p. Vektorväljade liitmine $X + Y$ ja funktsioonidega korrutamine fX on algebralised tehted, mis on defineeritud punktiviisi. Valemi (1.1) abil määrame uue funktsiooni $X(f)$ järgmiselt: $X(f)$ on funktsioon, mille väärtus punktis p on võrdne funktsiooni f suunatuletise väärtusega punktis p vektori X_p suunas. Niisiis, sellisel viisil defineeritud funktsioon $X(f)$ näitab, kui kiiresti muutub algne funktsioon f ruumi mingi punkti infinitesimaalses ümbruses vektorvälja X suunas.

Järgmine samm on rakendada ülalpool kirjeldatud konstruktsiooni selleks, et mõõta kuidas üks vektorväli Y muutub teise vektorvälja X poolt määratud suunas. Selleks oletame, et ruumis $\mathbf{E}^3$ on antud ristkoordinaadisüsteem, st on antud kolm paarikaupa risti asetsevat ühikvektorit $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Nüüd suvaline vektorväli X on üheselt määratud kolme funktsiooniga X^1, X^2, X^3, kus funktsiooni X^i väärtus ruumi punktis p on vektori X_p i-s koordinaat (baasis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$). Funktsioone X^1, X^2, X^3 nimetatakse vektorvälja X komponentideks antud ristkoordinaadisüsteemis ja järgnevas eeldame alati, et vektorvälja komponendid on lõpmata diferentseeruvad funktsioonid. Olgu Y^1, Y^2, Y^3 vektorvälja Y komponendid antud koordinaadisüsteemis. Funktsiooni suunatuletise mõistet kasutades määrame uue vektorvälja $\nabla_X Y$, mille komponendid on funktsioonid $X(Y^1), X(Y^2), X(Y^3)$. Vektorvälja $\nabla_X Y$ definitsioonist järeldub, et vektorväli $\nabla_X Y$ näitab, kuidas muutuvad vektorvälja Y komponendid (seega vektorväli Y) vektorvälja X poolt määratud suunas. Kujutust ∇, mis seab kahele vektorväljale X, Y vastavusse vektorvälja $\nabla_X Y$, nimetatakse *kovariantseks tuletiseks*. Mainime, et kovariantsel tuletisel on järgmine omadus

$$\nabla_{f\,X+g\,Y} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z. \tag{1.2}$$

Sisuliselt on kovariantne tuletis seostus ja ruumi $\mathbf{E}^3$ korral on tegu eukleidilise seostusega. Seletamaks, miks kovariantse tuletise puhul kasutatakse terminit "seostus", näitame, et kovariantse tuletisega assotsieerub *seostuse maatriks.* Oletame, et ruumis $\mathbf{E}^3$ on antud kolm vektorvälja E_1, E_2, E_3, kusjuures ruumi igas punktis moodustavad nende poolt määratud vektorid ruumi ortonormeeritud baasi (st nad on ühikvektorid ja paarikaupa risti). Tavaliselt nimetatakse kolmikut $\{E_1, E_2, E_3\}$ ruumi $\mathbf{E}^3$ *ristreeperväljaks.* Tõepoolest, kolmik E_1, E_2, E_3 määrab ruumi igas punktis ristreeperi, st punkti (alguspunkt) ja kolm baasivektorit. Juhime tähelepanu sellele, et kolm ortonormeeritud vektorit $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ tekitavad ristreepervälja. Sellisel juhul vektorvälja E_i väärtus on ruumi suvalises punktis $\mathbf{e_i}$. On ilmne, et sellisel juhul on ristreeperväli konstantne ja kovariantse tuletise rakendamine annab triviaalse tulemuse. Kuid see ei ole ainus võimalus ristreepervälja konstrueerimiseks. Kõverjooneline koordinaadisüsteem, kus koordinaatjooned on ruumi igas punktis teineteisega risti, tekitab ruumis ristreepervälja, näiteks sfäärilised koordinaadid. Sellisel juhul on vektorvälja E_i väärtus ruumi punktis p vastavalt i-nda koordinaatjoone puutujavektor punktis p (vajaduse korral normeeritud). Võrreldes konstantse reeperväljaga (tekitatud vektorite $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ poolt) on see vähem triviaalne näide, sest vastaval juhul on vektorväljad $\{E_1, E_2, E_3\}$ üldiselt mittekonstantsed, reeper sõltub punktist ja seostuse maatriks on mittetriviaalne. On ilmne, et iga vektorväli X on esitatav kujul

$$X = X^1\, E_1 + X^2\, E_2 + X^3\, E_3, \tag{1.3}$$

kus X^1, X^2, X^3 on vektorälja X komponendid kõverjoonelistes koordinaatides.

Olgu X mingi vektorväli ruumis $\mathbf{E}^3$. Vaatleme kovariantset tuletist $\nabla_X E_i$, kus $i = 1, 2, 3$. Arvestades ülalpool arutletud kovariantse tuletise geomeetrilist tähendust, teame, et kovariantne tuletis näitab meile, kuidas ristreeper muutub alguspunkti lõpmata väikese nihke korral vektorvälja X poolt määratud suunas. Siinkohal on tähtis, et ruumi igas punktis on reeper ristreeper (baasivektorid on ortonormeeritud). See tähendab, et reeperi alguspunkti infinitesimaalnihke korral baasivektorid jäävad ühikvektoriteks (pikkus ei muutu) ja nende vastastikune asend (teineteisega risti) jääb samuti samaks. Kuid eukleidilises ruumis $\mathbf{E}^3$ tähendab see ainult ühte liikumist, mis on parajasti reeperi pööre! Seega peaks kovariantne tuletis näitama infinitesimaalset pööret.

Kuna $\nabla_X E_i$ on vektorväli, kehtib valem (1.3) ja võime kirjutada

$$\nabla_X E_i = \sum_{j=1}^{3} g_i^j \, E_j, \; i = 1, 2, 3, \tag{1.4}$$

kus g_i^j on funktsioonid. Seega valem (1.4) seab igale vektorväljale X vastavusse üheselt määratud funktsioonid g_i^j, ja valemiga (1.4) määratud vastavus rahuldab omadust (1.2). Sellist vastavust nimetatakse kaasaegses diferentsiaalgeomeetrias *esimest järku diferentsiaalvormiks* või 1-*vormiks*, ja tähistatakse $\omega : X \to \omega(X)$, kus $\omega(X)$ on funktsioon. Seega 1-vormi ω väärtus on vektorvälja X korral funktsioon $\omega(X)$ ning suvaliste funktsioonide ja vektorväljade korral kehtib omadus

$$\omega(f\, X + g\, Y) = f\, \omega(X) + g\, \omega(Y).$$

Järelikult võime valemi (1.4) nüüd kirjutada kujul

$$\nabla_X E_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_i^j(X)\, E_j. \tag{1.5}$$

Kolmandat järku ruutmaatriksit $\omega = (\omega_i^j)$, mille elemendid on 1-vormid, nimetatakse *eukleidilise seostuse maatriksiks*. Valemis (1.5) on vektorväli X suvaline ja põhimõtteliselt võiksime selle valemist ära jätta. See rikub aga kovariantse tuletise struktuuri, mis eeldab kahe vektorvälja olemasolu. Valemi (1.5) parem pool annab vihje selle probleemi lahendamiseks. Kui jätame valemi (1.5) paremal poolel oleva vektorvälja X ära, saame avaldise $\omega_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_i^j \, E_j$, mida võime vaadelda 1-vormina, mille väärtused on vektorväljad. Konstrueerime kovariantse tuletise abil uue operaatori D, mis seab igale vektorväljale Y vastavusse üheselt määratud 1-vormi DY, mille väärtused on vektorväljad. Operaatorit D nimetatakse *kovariantseks diferentsiaaliks* ja defineeritakse valemiga $DY(X) = \nabla_X Y$. Nüüd võime võrrandi (1.5) kirjutada kompaktsel ja ilusal kujul

$$DE_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_i^j \, E_j. \tag{1.6}$$

Selle valemi abil saab põhjendada sõna "seostus" kasutamist. Tõepoolest, näeme, et ruumi punkti lõpmata väikse nihke korral muutub puutujaruumi reeper vastavalt valemile (1.6). Piltlikult öeldes, 1-vormide maatriks ω määrab seose puutujaruumide vahel, kus üheks puutujaruumiks on puutujaruum antud punktis ja teiseks on puutujaruum lõpmata lähedases punktis. Võrrand (1.6) selgitab seostuse mõistet infinitesimaalse lähenemise seisukohalt. Seda lähenemist laiendatakse kogu ruumile, kasutades vektori *paralleelülekannet piki kõverat.* Oletame, et ruumis on antud kõver, mis ühendab punkte A ja B, ning punktis A on antud mingi vektor $\mathbf{v}$. Oletame, et ruumis on määratud seostus, järelikult on meil kovariantne diferentseerimine. Me ütleme, et vektorväli piki kõverat on paralleelvektorväli, kui tema kovariantne tuletis on null. Samas, kirjutades kovariantse tuletise nulliga võrdumise koordinaatides, saame diferentsiaalvõrrandisüsteemi. Kui paneme lisaks algtingimuse, et otsitava vektorvälja väärtus punktis A on vektor $\mathbf{v}$, siis eksisteerib sellel diferentsiaalvõrrandisüsteemil lahend, kusjuures see lahend on ainus. Selle lahendi (vektorväli piki kõverat) väärtus (vektor $\mathbf{w}$) punktis B on vektor, mis on saadud vektori $\mathbf{v}$ paralleelsel ülekandel punktist A punkti B. On ilmne, et kujutus, mis seab igale vektorile $\mathbf{v}$ (lahendi olemasolu) vastavusse üheselt määratud (lahendi ainsus) vektori $\mathbf{w}$, on puutujaruumide (punktides A ja B) isomorfism. Muidugi on selge, et puutujaruumide dimensioon ruumi erinevates punktides on üks ja sama ning seetõttu on need isomorfsed. Kuid üldjuhul puudub nende vahel kanooniline isomorfism ja vektori paralleelülekanne võimaldab konstrueerida ühe puutujaruumi isomorfse kujutuse teise peale. Seega määrame me võrrandi (1.6) abil seost kahe puutujaruumi vahel ja see õigustab termini "seostus" kasutamist.

Kovariantse diferentsiaali D korral kehtib valem

$$d\,\langle X, Y\rangle = \langle DX, Y\rangle + \langle X, DY\rangle\,, \tag{1.7}$$

kus X, Y on vektorväljad, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ on skalaarkorrutis ja d on välisdiferentsiaal (hariliku diferentsiaali üldistus diferentsiaalvormidele). Erijuhul kui $X = E_i$ ja $Y = E_j$ saame

$$d\,\langle E_i, E_j\rangle = \langle DE_i, E_j\rangle + \langle E_i, DE_j\rangle\,.$$

Kuid $\langle E_i, E_j\rangle = \delta_{ij}$, ja seega valemi vasak pool on võrdne nulliga. Valemi paremal poolel rakendame valemit (1.6) ja saame $\omega^i_j + \omega^j_i = 0$. See on tähtis tulemus, mis viitab seosele kolmemõõtmelise ruumi pöörete rühmaga. Tuletame meelde, et kolmemõõtmelise ruumi pöördeid saab kirjeldada rühma $SO(3)$ abil, kus $SO(3)$ on kolmandat järku determinandiga 1 ortogonaalmaatriksite ($A\,A^t = I$, I on ühikmaatriks, A^t on transponeeritud maatriks) rühm. Selle rühma Lie algebra $so(3)$ on kolmandat järku kaldsümmeetriliste maatriksite Lie algebra. Järelikult seostuse maatriksit ω võime vaadelda kui $so(3)$-väärtustega 1-vormi, ja siin avaldub vahetu seos infinitesimaalpööretega kolmemõõtmelises ruumis.

3 Muutkond ja sile struktuur

Ülalpool selgitasime seostuste teooria põhimõisteid võrdlemisi lihtsal juhul, kui ruumiks on kolmemõõtmeline eukleidiline ruum. Sel juhul määrab seostuse eukleidilise ruumi geomeetria (vektorite skalaarkorrutis) ja eukleidiline seostus on üsna triviaalne, st sellel pole kõverust. Kuid isegi sel juhul saab seostuse maatriksi teha mittetriviaalseks, kui arvutused viiakse läbi kõverjoonelistes koordinaatides ja see on diferentsiaalgeomeetria kursuse üliõpilastele hea harjutusülesanne. Aktiivse uurimuse tulemusena on seostuste teooria läbinud pika arengu, millele on võimsa tõuke andnud rakendused kalibratsiooniväljateooriates. Praeguseks on seostuste teooria jõudnud kõrgele abstraktsuse ja üldistuse tasemele. Praegu esitatakse seostuste teooriat kaasaegse diferentsiaalgeomeetria selliste mõistete abil nagu *muutkond, kihtkond, Lie rühm, Lie algebra.* Muutkonna näol on tegemist on ruumi ja pinna mõistete üldistusega. Diferentsiaalgeomeetrias uuritakse siledaid muutkondi, kuid tavaliselt alustatakse teooria tutvustust topoloogilise muutkonna mõiste definitsioonist. n-mõõtmeline topoloogiline muutkond M^n on topoloogiline ruum (Hausdorffi ruum, mille topoloogia on loenduva baasiga), mis on lokaalselt homöomorfne ruumiga $\mathbb{R}^n$. Seega topoloogilise muutkonna mis tahes punkti $p \in M^n$ ümbruses $U \subset M^n$ on määratud lokaalne koordinaadisüsteem. Tähendab, lokaalne homöomorfism $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ võimaldab määrata igale punktile lokaalsed koordinaadid $\phi(p) = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Seejuures paari (U, ϕ) nimetatakse lokaalseks koordinaatkaardiks (või lihtsalt kaardiks) punkti p ümbruses. Juhul, kui lokaalsed koordinaadisüsteemid $(U, \phi), (V, \psi)$ kattuvad, $U \cap V \neq \emptyset$, tekivad ühisosal üleminekufunktsioonid

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n \to \phi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.8}$$

mis võimaldavad punkti ühed koordinaadid $\phi(p) = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ ümber arvutada teisteks koordinaatideks $\psi(p) = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$ järgmiselt:

$$(x^1, x^2, \ldots, x^n) = \phi \circ \psi^{-1}(y^1, y^2, \ldots, y^n). \tag{1.9}$$

Tasub mainida, et topoloogilisel muutkonnal ei oska me diferentseerida, kuna sisuliselt meil on ainult pidevuse mõiste. Seega pole võimalik rakendada diferentsiaalarvutuse võimsat aparaati, millele tuginevad näiteks tähtsad füüsika diferentsiaalvõrrandid.

Topoloogilise muutkonna struktuurist järeldub, et üleminekufunktsioonid (1.8) on homöomorfismid ruumi $\mathbb{R}^n$ lahtiste alamhulkade vahel. On ilmne, et kujutus (1.8) on üheselt määratud

n funktsiooniga $f^1, f^2, \ldots, f^n$. Niisiis võime valemi (1.9) nüüd kirjutada kujul

$$\begin{aligned} x^1 &= f^1(y^1, y^2, \ldots, y^n), \\ x^2 &= f^2(y^1, y^2, \ldots, y^n), \\ &\vdots \\ x^n &= f^n(y^1, y^2, \ldots, y^n). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Aga nüüd on tegemist reaalväärtustega n-muutuja funktsioonidega ja selliste funktsioonide korral me teame, mida tähendab diferentseerimine! Seetõttu võime nüüd nõuda, et oleks täidetud rangem tingimus, st et kõik üleminekufunktsioonid oleksid lõpmata diferentseeruvad (siledad), ja see annab meile sileda muutkonna kontseptsiooni. Lokaalsete koordinaatkaartide kogum $\{(U, \phi)\}$ koos vastavate siledate üleminekufunktsioonidega määrab muutkonna *sileda struktuuri*. Topoloogilist muutkonda M^n, millel on määratud sile struktuur, nimetatakse *siledaks muutkonnaks*.

Nüüd võime defineerida sileda funktsiooni mõiste. Olgu $f : M^n \to \mathbb{R}$ pidev funktsioon siledal muutkonnal. Me nimetame funktsiooni f siledaks, kui iga lokaalse koordinaatkaardi (U, ϕ) korral funktsioon

$$f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

on sile. Antud definitsioon on selles mõttes korrektne, et see ei sõltu lokaalse kaardi valikust. Kui funktsioon on sile koordinaatides $x^1, x^2, \ldots, x^n$, siis see on sile ka koordinaatides $y^1, y^2, \ldots, y^n$, sest muutujate vahetus (1.10) on sile.

Järgnevas peame sõna "muutkond" all silmas "sile muutkond", st et muutkond on varustatud sileda struktuuriga. Siledate muutkondade *difeomorfismiks* nimetatakse kujutust, mis on bijektiivne, sile ja selle pöördkujutus on samuti sile. Kui siledad muutkonnad on difeomorfsed, siis diferentsiaalgeomeetrias peetakse neid peetakse ekvivalentseteks.

Fundamentaalne ja väga keeruline küsimus on, kas topoloogilisel muutkonnal eksisteerib mittedifeomorfseid siledaid struktuure. Ja kui eksisteerib, siis kui palju neid üldse võib olla. Pikka aega arvati, et topoloogilisel muutkonnal on üks ja ainult üks sile struktuur. Osutus, et see peab paika dimensioonides 1, 2 ja 3, ehk n-mõõtmelisel topoloogisel muutkonnal, kus $n = 1, 2, 3$, eksisteerib difeomorfismi täpsusega parajast üks sile struktuur. Järgnenud valdkonna areng aga näitas, et kõrgemates dimensioonides ei ole selle küsimuse vastus sugugi nii lihtne. J. Milnor [5] konstrueeris eksootilise sileda struktuuri seitsmemõõtmelisel sfääril S^7, hiljem konstrueeriti eksootilisi siledad struktuure ka kõrgemate dimensioonidega sfääridel. Oli üsna loomulik oletada, et tasased ruumid $\mathbb{R}^n$ on võrreldes kõverate muutkondadega rohkem "kuulekad". Tõepoolest, saab näidata, et kui $n \neq 4$, siis ruumil $\mathbb{R}^n$ on ainult üks sile struktuur. S. Donaldsoni (1986. aasta Fieldsi medal) teoreemidest 4-mõõtmeliste muutkondade topoloogiast [1] järeldub, et ruumil $\mathbb{R}^4$ eksisteerivad "valsk" siledad struktuurid ja selliste struktuuride hulga võimsus on koguni mitteloenduv! Märkimist väärib, et S. Donaldsoni teoreemid olid saadud Yang-Millsi võrrandi lahendite uuurimisel, ja see on valdkond, mille arengusse Karen Uhlenbeck märkimisväärselt panustas. Toome ühe hämmastava väite, mis järeldub S. Donaldoni teoreemidest. Olgu $\mathbb{R}^4_f$ neljamõõtmeline ruum "valsk" sileda struktuuriga. Kehtib [4]

Ruumis $\mathbb{R}^4_f$ eksisteerib selline kompaktne alamhulk C, et seda ei saa ümbritseda siledalt sisestatud kolmemõõtmelise sfääriga.

Tuletame meelde, et kujutust $\phi : S^3 \to \mathbb{R}^4_f$ nimetatakse sisestuseks, kui $\phi : S^3 \to \phi(S^3)$ on homöomorfism, ϕ on sile ja suvalise punkti $p \in S^3$ korral on diferentsiaal $d\phi : T_pS^3 \to T_{\phi(p)}\mathbb{R}^4_f$ injektiivne ($T_pS^3, T_{\phi(p)}\mathbb{R}^4_f$ on puutujaruumid).

4 Peakihtkond ja vektorkihtkond

Karen Uhlenbecki silmapaistvate tulemuste kirjeldamiseks vajame järgmist mõistet, *kihtkond*. Kihtkond on muutkond, millel on täiendav struktuur. Kihtkond koosneb baasmuutkonnast M^n ja sellel määratud kihtide parvest. Kui kihiks on vektorruum, siis kihtkonda nimetatakse *vektorkihtkonnaks* (mainime, et kihtide dimensioonid erinevates punktides on võrdsed). Kui kihiks on Lie rühm (näiteks $SU(N)$), siis nimetatakse kihtkonda *peakihtkonnaks.* Seega võimaldab kihtkonna mõiste kinnitada kihi muutkonna igale punktile, olgu see siis vektorruum või maatriksrühm. Füüsika seisukohalt annab see täiendavaid vabadusastmeid ja võimaldab kirjeldada osakese sisemist ruumi, näiteks isotoopset spinni. Olgu E vektorkihtkond, M^n selle baasmuutkond, E_p kihtkonna kiht punktis $p \in M^n$ (m-mõõtmeline vektorruum) ja $q \in E_p$ kihi mingi punkt. Kujutust $\pi : E \to M^n$, kus $\pi(q) = p$, nimetatakse kihtkonna projektsiooniks baasmuutkonnale. Seega vektorkihtkond on kolmik ja seda tähistatakse sageli (E, π, M^n). Antud juhul on vektorkihtkonna dimensioon $n + m$. Lihtsaim viis vektorkihtkonna konstrueerimiseks on moodustada otsekorrutis $M^n \times \mathbb{R}^m$. Sellist otsekorrutise teel saadud vektorkihtkonda nimetatakse *triviaalseks vektorkihtkonnaks.* Üldiselt on vektorkihtkond mittetriviaalsel viisil "väänatud" otsekorrutis ja seda ei saa esitada ülalpool näidatud otsekorrutisena. Samas kihtkonna definitsioonis nõutakse, et esitus otsekorrutisena oleks alati võimalik lokaalselt, ja seda nimetatakse kihtkonna lokaalse trivialiseerimise nõudeks. Järelikult baasmuutkonna suvalise punkti $p \in M^n$ korral leidub selle ümbrus $U \subset M^n$ nii, et $\pi^{-1}(U) \subset E$ on difeomorfne otsekorrutisega $U \times \mathbb{R}^m$.

Kihtkondade teoorias kasutatakse ka mõistet *kihtkonna lõige.* Viimane on sile kujutus, mis seab baasmuutkonna igale punktile $p \in M^n$ vastavusse üheselt määratud kihi E_p punkti. See tähendab, et lõige on kujutus $s : M^n \to E$, mis rahuldab tingimust $\pi \circ s = \mathrm{id}_{M^n}$, kus id_{M^n} on baasmuutkonna samasusteisendus. Kihtkonna lõike mõiste osutub väga kasulikuks – mitmeid kaasaegse diferentsiaalgeomeetria mõisteid, näiteks vektorväli, diferentsiaalvorm jt, saab ühtselt käsitleda vastava kihtkonna lõikena.

Vektorkihtkonna kujukas näide on muutkonna puutujakihtkond. Muutkonna M^n igas punktis p on määratud puutujaruum T_pM^n. Puutujaruumide (ühisosata) ühend $\cup_{p \in M^n} T_pM^n$ on vektorkihtkond. Üldiselt see on mittetriviaalne vektorkihtkond. Näiteks, kui muutkonnaks on 2-mõõtmeline sfäär S^2, siis selle puutujakihtkond on mittetriviaalne. See tähendab, et teda ei ole võimalik samastada otsekorrutisega $S^2 \times \mathbb{R}^2$. Tõepoolest, kui see oleks võimalik, siis leiduks sfääril kaks siledat puutujavektorvälja X ja Y nii, et sfääri igas punktis oleksid nende väärtused lineaarselt sõltumatud puutujavektorid. Need vektorid moodustaksid puutujatasandi baasi, ja iga puutujavektor oleks samastatav $\mathbb{R}^2$ vektoriga koordinaatide abil. Kuid Poincaré teoreem vektorvälja iseärasastest punktidest takistab selliste vektorväljade olemasolule. Poincaré teoreem väidab

Kui siledal kompaktsel (ilma rajata) muutkonnal on antud sile vektorväli (puutujakihtkonna lõige), siis selle vektorvälja singulaarsete punktide indeksite summa on võrdne muutkonna Euleri karakteristikuga.

Nüüd arvestame, et sfääri Euleri karakteristik on 2. Järelikult suvalise puutujavektorvälja X korral leidub sfääril selle singulaarne punkt (vastasel juhul oleks Euleri karakteristik 0). See tähendab, et leidub punkt, kus puutujavektorvälja X väärtus on nullvektor. Kuid sellises punktis ei moodusta vektorväljade X ja Y väärtused puutujatasandi baasi.

Peakihtkonna mõiste tugineb Lie rühma G toime muutkonna mõistele, ja on abstraktsem ning vähem visualiseeritav kui vektorkihtkond. Antud artiklis piisab kui eeldame, et Lie rühm on Lie maatriksrühm ehk G on kompleksete $N \times N$-ruutmaatriksite ruumi alammuutkond, ja rühma tehteks on maatriksite korrutamine. Rühm G *toimib paremalt* muutkonnal P (paremtoime), kui on määratud sile kujutus

$$R : (p, g) \in P \times G \mapsto R_g(p) = p \cdot g \in P,$$

mis rahuldab

$$p \cdot e = p, \quad (p \cdot g_1) \cdot g_2 = p \cdot (g_1 g_2), \tag{1.11}$$

kus e on rühma ühikelement. Rühm *toimib vabalt*, kui võrdusest $p \cdot g = p$ järeldub, et $p = e$. Rühma toime orbiidiks G_p muutkonna punktis p nimetatakse punktihulka $\{q \in P : q = p \cdot g,\ g \in G\}$. Orbiitide hulka tähistame $M = P/G$. Esiteks oletame, et orbiitide hulgal M saab määrata sileda muutkonna struktuuri, ja kujutus $\pi : P \to M$, mis seab P igale punktile p vastavusse punkti p läbiva orbiidi, on sile. Teiseks oletame, et suvalise punkti $x \in M$ korral leidub selle lahtine ümbrus U nii, et $\pi^{-1}(U)$ on difeomorfne otsekorrutisega $U \times G$ (lokaalse trivialiseerimise nõue). Sel juhul nimetatakse muutkonda P peakihtkonnaks ning tähistatakse $P(M, G)$. Rühma G nimetatakse selle peakihtkonna struktuurirühmaks ja muutkonda M nimetatakse peakihtkonna baasmuutkonnaks. Peakihtkonna kiht, mis läbib punkti p, on rühma toime orbiit G_p.

Peakihtkonna tuntuim näide on järgmine. Olgu M^n sile muutkond, $T_x M^n$ selle puutujaruum punktis x ja $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ puutujaruumi $T_x M^n$ baas. Moodustame reeperi $R_x = \{x; e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ (alguspunkt+baas). Kõikvõimalike reeperite hulka punktis x tähistame $\mathfrak{R}_x$ ja moodustame ühendi $\mathfrak{R} = \cup_{x \in M^n} \mathfrak{R}_x$. Maatriksrühma $\mathrm{GL}(n)$ toimet hulgal $\mathfrak{R}$ määrame valemiga $R_x \cdot A = R_x{}' = \{x; e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$, kus $A = (A^i_j)$ on n-järku regulaarne ruutmaatriks ja

$$e'_i = \sum_j A^j_i \, e_j.$$

See tähendab, et rühma toime defineerimisel kasutame maatriksit A baasiteisenduse maatriksina. Saab näidata, et $\mathfrak{R}$ on peakihtkond, rühm $\mathrm{GL}(n)$ on struktuurirühm ja M^n selle peakihtkonna baasmuutkond. Peakihtkonda $\mathfrak{R}$ nimetatakse *reeperkihtkonnaks.* Kui M^n on Riemanni muutkond (igas puutujaruumis on määratud eukleidiline meetrika), siis kihiks $\mathfrak{R}_x$ võib valida ortonormeeritud reeperite hulga. Sellisel juhul on peakihtkonna struktuurirühmaks ortogonaalsete maatrikstite rühm $\mathrm{O}(n)$. Kui muutkond M^n on orienteeritav, siis kihiks võib valida ühe ja sama orientatsiooniga ortonormeeritud reeperite hulga, ja sellisel juhul on reeperkihtkonna strukturirühmaks $\mathrm{SO}(n)$.

Kui on antud peakihtkond $P(M, G)$, siis baasmuutkonnal M saab konstrueerida vektorkihtkonna E. Sellisel juhul nimetatakse vektorkihtkonda E peakihtkonna $P(M,G)$ *assotsieeritud vektorkihtkonnaks* ja selle konstrueerimine tugineb struktuurirühma G *esitusel* $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, kus V on vektorruum (esituse ruum) ja $\mathrm{GL}(V)$ on selle vektorruumi pööratavate lineaarteisenduste rühm. Assotsieeritud vektorkihtkonna E konstrueerimiseks moodustame otsekorrutise $P \times V$ ja määrame rühma G paremtoime valemiga $(p,v) \cdot g = (p \cdot g, \rho(g)^{-1}v)$. Saab näidata, et selle paremtoime orbiitideks $P \times V/G$ on vektorkihtkond baasmuutkonnaga M ja kihiga V.

5 Seostus peakihtkonnal

Kihtkondade teooria raames saab sõnastada seostuse mõiste kõige üldisema lähenemise. Selleks vaatleme peakihtkonda $P(M,G)$. Igale Lie rühmale vastab tema Lie algebra, mis on vastava Lie rühma uurimisel tähtis struktuur. Lie rühma G Lie algebra $\mathfrak{g}$ on sarnane pinna puutujatasandiga – Lie algebra on Lie rühma lineaarne aproksimatsioon, mille tehe on tekitatud rühma tehte poolt. Saadud tehet Lie algebral nimetatakse Lie suluks. Lie algebra element $h \in \mathfrak{g}$ tekitab rühma G üheparameetrilise alamrühma $\exp(th)$, mis maatriksrühma korral on maatriksi h eksponent. Kuna rühm G toimib paremalt peakihtkonnal P, siis üheparameetriline rühm $\exp(th)$ tekitab peakihtkonna P igas punktis p puutujavektori H_p järgmiselt

$$H_p = \frac{d}{dt}(p \cdot \exp(th))\Big|_{t=0} .$$

Seega peakihtkonnal P tekib vektorväli H, mida nimetatakse fundamentaalvektorväljaks ja tegelikult see on kihi puutujavektorväli. *Seostuseks peakihtkonnal* nimetatakse Lie algebra väärtustega ($\mathfrak{g}$-väärtusega) 1-vormi ω, mis rahuldab tingimusi

S1) $\omega(H) = h$ suvalise fundamentaalvektorvälja korral;

S2) $\omega(dR_g X_p) = g^{-1}\omega(X_p)\, g$, kus X on suvaline vektorväli peakihtkonnal P ja dR_g on paremtoime $R_g : p \to p \cdot g$ diferentsiaal.

Olgu $p \in P$ peakihtkonna mingi punkt ja $x = \pi(p) \in M$ selle projektsioon baasmuutkonnale. Peakihtkonna definitsiooni lokaalse trivialiseerimise tingimusest järeldub, et peakihtkonna suvalise punkti p korral leidub tema projektsiooni x ümbrus $U \subset M$ ja lokaalne lõige $s : U \to \pi^{-1}(U)$ selliselt, et $\pi^{-1}(U)$ on difeomorfne otsekorrutisega $U \times G$, kus difeomorfismi määratakse valemiga $p \to (x, g)$ ning $p = s(x) \cdot g$. Nüüd, kasutades lokaalset lõiget s, võime seostuse vormi ω "langetada" peakihtkonnalt baasmuutkonnale ja saame lokaalse 1-vormi s^* lahtisel hulgal $U \subset M$. Selle lokaalse vormi võime kirjutada lokaalsetes koordinaatides kujul

$$s^*(\omega) = A_\mu(x)\, dx^\mu, \tag{1.12}$$

kus $A_\mu(x)$ on $\mathfrak{g}$-väärtustega funktsioonid (μ on baasmutkonna M lokaalsete koordinatide indeks, see tähendab $\mu = 1, 2, \ldots, \dim M$). Funktsioone $A_\mu(x)$ nimetatakse geomeetrias *seostuse koefitsien-tideks* ning füüsikas *kalibratsioonivälja potentsiaalideks.* Valemis (1.12) kasutame Einsteini kokkulepet ehk summeerime korduva indeksi (üks kord ülaindeks ja teine kord alaindeks) järgi. Kui lokaalsete lõigete määramispiirkonnad lõikuvad ja ühisosal $s'(x) = s(x) \cdot g(x)$, $g(x) \in G$, siis seostuse vormi definitsiooni kasutades saab näidata, et ühisosal avalduvad ühed potentsiaalid teiste kaudu järgmiselt:

$$A^g_\mu(x) = g^{-1}(x) A_\mu(x)\, g + g^{-1}(x)\, \partial_\mu g(x). \tag{1.13}$$

Valemit (1.13) nimetatakse kalibratsioonivälja potentsiaalide *ka-libratsiooniteisenduseks.* Siinkohal tasub märkida rabavat fakti, et geomeetrias järeldub teisendus (1.13) seostuse vormi struktuurist. Samas, füüsikas saadi see teisendus täiesti erinevatest kaalutlustest lähtudes – kalibratsioonivälja mõju funktsionaali invariantsusest. Mainime, et kui peakihtkonna struktuurirühm G on SU(2) (2. järku komplekssete unitaarsete determinandiga maatriksite rühm), siis selle rühma Lie algebra $\mathfrak{su}(2)$ on komplekssete anti-Hermite'i nulljäljega teist järku ruutmaatriksite Lie algebra (üle reaalarvude korpuse), see tähendab

$$\mathfrak{su}(2) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) : A = -\bar{A}^T, \operatorname{Tr} A = 0\},$$

kus $M_2(\mathbb{C})$ on teist järku kompleksete ruutmaatriksite vektorruum. See algebra on kolmemõõtmeline, kui vaatleme seda vektorruumina üle reaalarvude korpuse. Imaginaarühikuga korrutatud Pauli maatriksid $i\,\sigma_1, i\,\sigma_2, i\,\sigma_3$, kus

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

moodustavad Lie algebra baasi (füüsikas nimetatakse neid algebra generaatoriteks). Seega lokaalselt võime seostuse vormi kirjutada kujul

$$s^*(\omega) = A^\alpha_\mu(x) dx^\mu\, \sigma_\alpha. \tag{1.14}$$

Seostuse tähtsaks karakteristikuks on selle kõveruse 2-vorm, mis avaldub

$$F_\omega = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu \wedge dx^\nu, \tag{1.15}$$

kus $F_{\mu\nu}(x) \in \mathfrak{su}(2)$, $F_{\mu\nu}(x) = -F_{\nu\mu}(x)$, $\wedge$ on vormide väliskorrutis,

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^\nu} + [A_\mu(x), A_\nu(x)]$$

ja $[\cdot,\cdot]$ tähistab maatriksite kommutaatorit. Füüsikas nimetatakse kõveruse 2-vormi F_ω sageli kalibratsioonivälja tugevuseks. Kui kalibratsioonivälja potentsiaalid teisenevad valemi (1.13) järgi, siis kõveruse 2-vormi kordajad $F_{\mu\nu}(x)$ teisenevad eeskirja

$$F_{\mu\nu}(x) \to F^g_{\mu\nu}(x) = g^{-1}(x)\, F_{\mu\nu}(x)\, g(x) \tag{1.16}$$

järgi, kus $g(x) \in \mathrm{SU}(2)$.

6 Riemanni muutkond ja Yang-Millsi võrrandid

Siiamaani oli baasmuutkond M lihtsalt lõplikumõõtmeline sile muutkond, kuid Yang-Millsi väljateooria konstrueerimiseks, st füüsika jaoks, ei ole see eeldus piisav ja me peame varustama baasmuutkonna Riemanni meetrikaga g. Riemanni meetrika määrab muutkonna M igas punktis puutujavektorite skalaarkorrutise.

Muutkonda, mis on varustatud Riemanni meetrikaga, nimetatakse Riemanni muutkonnaks. Muutkonna lokaalsetes koordinaatides kirjutatakse meetrika positiivselt määratud ruutvormi kujul

$$g = g_{\mu\nu}(x)\, dx^{\mu} dx^{\nu}, \;\; g_{\mu\nu}(x) = g_{\nu\mu}(x).$$

Kui interpreteerime selles valemis koordinaatide diferentsiaale lõpmata väikeste puutujavektori koordinaatidena, siis see valem määrab tõepoolest puutujavektori pikkuse ruudu. Maatriksi $g = (g_{\mu\nu})$ pöördmaatriksit tähistame $g^{-1} = (g^{\mu\nu})$.

Seega järgnevas eeldame, et

M1) peakihtkonna $P(M, G)$ baasmuutkond M on Riemanni muutkond meetrikaga g ja $G = \mathrm{SU}(2)$,

M2) baasmuutkond M on kompaktne (sel juhul ei pea me muretsema keerukust lisava integreerimise pärast).

Riemanni meetrika teeb muutkonna struktuuri rikkamaks ja võimaldab varustada diferentsiaalvormide ruumi (funktsionaalne ruum) normiga. Kõigepealt, kasutades Riemanni meetrikat, defineerime $*$-operatori, mida nimetatakse ka Hodge'i operaatoriks. Kui θ on k-vorm

$$\theta = \frac{1}{k!}\theta_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_k},$$

siis $(n-k)$-vormi $*\theta$ defineeritakse valemiga

$$*\,\theta = \frac{1}{(n-k)!}(*\theta)_{\mu_{k+1}\mu_{k+2}\cdots\mu_n} dx^{\mu_{k+1}} \wedge dx^{\mu_{k+2}} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_n}, \quad (1.17)$$

kus

$$(*\theta)_{\mu_{k+1}\mu_{k+2}\cdots\mu_n} = \frac{1}{k!}\sqrt{\det g}\; \theta^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k} \epsilon_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k\mu_{k+1}\mu_{k+2}\cdots\mu_n},$$

kus

$$\theta^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k} = g^{\mu_1\nu_1} g^{\mu_2\nu_2} \cdots g^{\mu_k\nu_k} \theta_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_k},$$

ja $\epsilon_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k\mu_{k+1}\mu_{k+2}\cdots\mu_n}$ on täielikult kaldsümmeetriline tensor. On ilmne, et valem (1.17) on rakendatav ka juhul, kui θ on $\mathfrak{su}(2)$-väärtustega vorm. Kasutades Hodge'i operaatorit, defineerime

$\mathfrak{su}(2)$-väärtustega vormide skalaarkorrutise ja normi. Olgu θ ja ρ mõlemad k-vormid. Defineerime funktsioonid $\langle\theta,\rho\rangle$ ja $|\theta|^2$ valemitega

$$\mathrm{Tr}(\theta\wedge *\rho) = \langle\theta,\rho\rangle\, dV, \quad |\theta|^2 = \langle\theta,\theta\rangle\,, \tag{1.18}$$

kus dV on muutkonna M ruumalaelement

$$dV = \sqrt{\det g}\; dx^1 dx^2 \ldots dx^n.$$

Mainime, et üldisemas situatsioonis, kus G on kompaktne poollihtne Lie rühm, kasutatakse jälje asemel Killingi vormi. Lisaks märgime, et Hodge'i operaatoril on järgmine omadus

$$*\,(*\theta) = \mathrm{sign}(\det g)(-1)^{k(n-k)}\theta. \tag{1.19}$$

Defineerime nüüd vormide skalaarkorrutise valemiga

$$(\theta,\rho) = \int_M \mathrm{Tr}(\theta\wedge *\rho). \tag{1.20}$$

Kasutades valemit (1.20), defineerime k-vormi θ normi valemiga $\|\theta\|^2 = (\theta,\theta)$.

Rakendades väljateooria mõju funktsionaalile variatsioonarvutuse meetodeid, saame tuletada väljateooria võrrandid. Kalibratsiooniväljateooria mõju funktsionaal $\mathtt{S}(A)$

A1) on kalibratsioonivälja potentsiaalide $A = (A_\mu(x))$ funktsionaal,

A2) funktsionaali väärtus on reaalarv,

A3) on invariantne kalibratsiooniteisenduste (1.13) suhtes.

On lihtne veenduda, et funktsionaal

$$\mathtt{S}(A) = \lambda^{-1}\|F_\omega\|^2 = \lambda^{-1}\int_M \mathrm{Tr}(F_\omega\wedge *F_\omega) = \lambda^{-1}\int_M \mathrm{Tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})\, dV, \tag{1.21}$$

kus λ on teooria füüsikaliste parameetritega määratud konstant, rahuldab ülalpool loetletud tingimusi. Funktsionaali $\mathtt{S}(A)$ nimetatakse Yang-Millsi teooria mõju funktsioonaliks. Rakendades variatsioonarvutust ja vähima mõju printsiipi $\delta\mathtt{S}(A) = 0$, leiame Euler-Lagrange'i võrrandi

$$\nabla_\mu F_{\mu\nu} = 0, \tag{1.22}$$

mida nimetatakse Yang-Millsi võrrandiks. Seejuures operaatorit $\nabla_\tau F_{\mu\nu} = \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\tau} + [A_\tau, F_{\mu\nu}]$ nimetatakse kovariantseks tuletiseks. Yang-Millsi võrrandi võime kirjutada Hodge'i operaatori abil kujul

$$D^*\, F_\omega = 0, \tag{1.23}$$

kus $D^* = - * D*$ on kovariantse diferentsiaali $D = d + [\omega,]$ kaasoperaator. Kõveruse 2-vorm rahuldab Bianchi samasust $DF_\omega = 0$. Sellest järeldub nüüd vahetult, et kui kõveruse vorm rahuldab tingimust $*F_\omega = \pm F_\omega$, siis on see Yang-Millsi võrrandi lahend. Tõepoolest kehtib

$$D^* F_\omega = - * D(*F_\omega) = - * D(\pm F_\omega) = \mp * DF_\omega = 0.$$

Kui kõveruse vorm rahuldab tingimust $*F_\omega = F_\omega$ ($*F_\omega = -F_\omega$), siis vastavat seostust nimetatakse eneseduaalseks (anti-eneseduaalseks) seostuseks. Füüsikas nimetatakse Yang-Millsi võrrandi selliseid lahendeid instantonideks. Saab näidata, et instantonid on Yang-Millsi mõju funktsionaali absoluutsed miinimumid.

7 Karen Uhlenbecki panus Yang-Millsi teoriasse

Milles seisneb kalibratsiooniväljateooriate iseäralikkus? Kalibratsiooniväljateooriate omapärasus tekib seoses teooria invariantsusega kalibratsiooniteisenduste suhtes (vt A3). Kui toimub kalibratsiooniteisendus (1.13, 1.16), siis kalibratsioonivälja potentsiaalid $A \to A^g$ ja tugevus $F \to F^g$, kus g on kalibratsiooniteisenduste rühma element, muutuvad, kuid mõju funktsionaali invariantsuse tõttu pole sellel teooria jaoks füüsilisi tagajärgi. Teisisõnu, katselisi mõõtmisi tegev vaatleja ei märka seda muutust mingil viisil. Järelikult on kalibratsiooniväli määratud kalibratsiooniteisenduse täpsusega ehk kalibratsiooniväljad A ja A^g on samaväärsed. Matemaatiliselt tähendab see, et me ei pea uurima kõikvõimalike (siledate) peakihtkonna $P(M,G)$ seostuste ruumi $\mathcal{A}$, vaid faktorruumi $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}/\mathcal{G}$, kus $\mathcal{G}$ on kalibratsiooniteisenduste rühm, mis toimib seostuste ruumis kalibratsiooniteisenduste abil

$$\omega \in \mathcal{A} \to g \cdot \omega = g^{-1}\omega g + g^{-1}\,dg \in \mathcal{A}, \;\; g \in \mathcal{G}.$$

Mainime, et kõikvõimalikud siledad seostused $\mathcal{A}$ moodustavad afiinse ruumi ja kalibratsiooniteisenduste rühma saab defineerida globaalselt. Sellisel juhul on $\mathcal{G}$ peakihtkonna $P(M,G)$ kõikvõimalikud siledad automorfismid, kus rühma tehteks on automorfismide kompositsioon. Lokaalselt määrab kalibratsiooniteisenduste rühma element g (peakihtkonna automorfism) kujutuse $g : x \in U \subset M \to g(x) \in G$. Juhime tähelepanu sellele, et $\mathcal{A}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}/\mathcal{G}$ on funktsionaalsed (lõpmatumõõtmelised) ruumid, millel saab määrata Banachi muutkonna struktuuri (kasutades valemiga (1.20) defineeritud normi), kusjuures $\mathcal{A}$ on peakihtkond, mille baasmuutkonnaks on kalibratsiooniekvivalentsete seostuste Banachi muutkond $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}/\mathcal{G}$, ja struktuurirühmaks on kalibratsiooniteisenduste rühm $\mathcal{G}$.

Tähistades kalibratsiooniekvivalentsete instantonide ruumi $\mathcal{M}$, saame sisalduvuse $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}_0$, kusjuures ruumi $\mathcal{M}$ nimetatakse instantonide moodulite ruumiks (moduli space of instantons). Hämmastav on asjaolu, et kui peakihtkond $P(M,G)$ rahuldab teatud topoloogilisi tingimusi, siis instantonide moodulite ruum $\mathcal{M}$ on mittetühi, ja sellel saab määrata lõplikumõõtmelise sileda muutkonna struktuuri, mille dimensiooni on võimalik leida peakihtkonna topoloogiliste invariantide abil (Euleri karakteristik ja Cherni arvud). Osutub, et S. Donaldsoni põhjapanevad ja võimsad tulemused 4-mõõtmeliste siledate muutkondade klassifitseerimisel saadi just kalibratsiooniekvivalentsete instantonide ruumi uurimisel.

Seostuse vormi ω poolt tekitatud kalibratsiooniekvivalentsete seostuste klassi tähistame $[\omega]$. Sel juhul $[\omega] \in \mathcal{A}/\mathcal{G}$ ja $[\omega] = \{g \cdot \omega \ : \ g \in \mathcal{G}\}$. Kujutus $\varpi : \omega \in \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{G}$, kus $\varpi(\omega) = [\omega]$ on peakihtkonna $\mathcal{A}$ projektsioon. Paraku selgub, et

Yang-Millsi väljateooriaga seotud arvutustes, näiteks kvantiseerides Feynmani integraali abil, on ekvivalentsiklassi $[\omega]$ kasutamine raskendatud, ja füüsikud eelistavad sooritada arvutusi vastava klassi esindajaga. See aga tähendab, et meil peab olema leitud või konstrueeritud kujutus, mis seab igale klassile $[\omega]$ vastavusse üheselt määratud seostuse sellest ekvivalentsiklassist. Vastavat kujutust $\mathfrak{s}:\mathcal{A}/\mathcal{G}\to\mathcal{A}$, mis peab rahuldama $\varpi\circ\mathfrak{s}=\mathrm{id}$, on loomulik vaadelda peakihtkonna $\mathcal{A}$ lõikena. Yang-Millsi väljateoorias nimetatakse kujutust $\mathfrak{s}$ kalibratsioonitingimuseks. Enim kasutatud kalibratsioonitingimused on järgmised:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\mu} &= 0, \quad \text{(Lorentzi kalibratsioonitingimus)},\\
\frac{\partial A_k}{\partial x^k} &= 0, \quad \text{(Coulomb'i kalibratsioonitingimus)},\\
A_0 &= 0, \quad \text{(Hamiltoni kalibratsioonitingimus)}.
\end{aligned}$$

Artiklis [6] uurib Karen Uhlenbeck Coulomb'i kalibratsioonitingimust juhul, kui $P(M,G)$ on peakihtkond, kus $M=B^n$ on n-mõõtmeline kera ning $G\subset \mathrm{SO}(l)$ on kompaktne Lie rühm. Kõigepealt defineerime seostuste Sobolevi ruumi $\mathcal{A}_1^p$. Selleks kasutame seostuste ruumi $\mathcal{A}$ afiinse ruumi struktuuri. Fikseerime ühe seostuse $\omega_0\in\mathcal{A}$. Siis suvaline seostus ω on esitatav kujul $\omega=\omega_0+\eta$, kus η on $\mathfrak{g}$-väärtustega 1-vorm ($\mathfrak{g}$ on Lie rühma G Lie algebra), mis teiseneb nii nagu kõveruse 2-vorm (1.16). Järelikult η on $\mathrm{Ad}\,P$-väärtustega 1-vorm ja võime rakendada ülalpool defineeritud normi $|\eta|=\langle\eta,\eta\rangle$, kui $\mathrm{Ad}\,P=P\times\mathfrak{g}/\mathrm{Ad}\,G$ on assotsieeritud vektorkihtkond, mille kiht on $\mathfrak{g}$ ja rühma G esituseks kasutame selle adjungeeritud esitust. See võimaldab meil Sobolevi ruumi $\mathcal{A}_1^p$ normi defineerida valemiga

$$\|\omega\|_{\mathcal{A}_1^p}=\|\eta\|_{\mathcal{A}_1^p}=\Big(\sum_{|\alpha|\le 1}\int_M |D^\alpha\eta|^p\,dV\Big)^{1/p}.$$

Defineerime $\mathcal{A}_{1,k}^p=\big\{\omega\in\mathcal{A}_1^p:\int_{B^n}|F_\omega|^{n/2}dV\le k\big\}$. Artiklist [6] leiame Karen Uhlenbecki põhitulemuse, mille võime sõnastada järgmiselt. Olgu $n/2\le p\le n$. Siis leiduvad sellised konstantsed arvud $k = k(n) > 0$ ja $c = c(n)$, et iga seostus $\omega \in \mathcal{A}^p_{1,k}$ on kalibratsiooniekvivalentne seostusega $d + \eta \in \mathcal{A}^p_1$ (kovariantne diferentsiaal assotsieeritud kihtkonnas), kus η rahuldab Coulomb'i kalibratsioonitingimust, η on risti kera kohavektoriga sfääri $S^{n-1} = \partial B^n$ igas punktis ja

$$\begin{aligned} \|\omega\|_{n/2,1} &\leq c(n)\Big(\int_{B^n} |F_\omega|^{n/2} dV\Big)^{2/n}, \\ \|\omega\|_{p,1} &\leq c(n)\Big(\int_{B^n} |F_\omega|^{p/2} dV\Big)^{1/p}. \end{aligned}$$

Artiklis [7] uurib Karen Uhlenbeck lõpliku energiaga Yang-Millsi võrrandi lahendeid. Lõpliku energiaga tähendab, et Yang-Millsi võrrandi lahend F_ω rahuldab tingimust $\|F_\omega\| < \infty$. Karen Uhlenbeck tõestab, et lõpliku energiaga Yang-Millsi võrrandi lahendi singulaarsused on eemaldatavad kalibratsiooniteisendusega, kui kalibratsioonirühm G on kompaktne. Seega, kui F_ω on Yang-Millsi võrrandi lahend neljamõõtmelisel "läbitorgatud" keral $M = B^4 \setminus \{0\}$, mis rahuldab $\|F_\omega\| < \infty$ (integreeruva ruuduga kõveruse 2-vorm), siis lahendit F_ω saab siledalt laiendada kogu kerale valides kihtkonna lokaalse struktuuri. Antud tulemuse tähtsus seisneb selles, et sellest järeldub järgmine tulemus. Kui (lõpliku energiaga) Yang-Millsi võrrandi lahend F_ω on määratud neljamõõtmelisel ruumil $\mathbb{R}^4$, siis vastavat seostust ω saab laiendada selle ruumi konformsele kompaktifikatsioonile S^4, kus S^4 on neljamõõtmeline ühiksfäär. Tulemuse tõestus tugineb Coulomb'i kalibratsioonitingimuse konstrueerimisele lõpliku energiaga lahendite juhul.

Teadustegevust Yang-Millsi võrrandi lahendite uurimisel eelmise sajandi 80. aastate lõpul stimuleeris oluliselt probleem, kas Yang-Millsi võrrandil on selliseid lahendeid, mis pole eneseduaalsed (või anti-eneseduaalsed), kui baasmuutkonnaks on ühiksfäär S^4? Vastus leidub artiklis [8], kus L. M. Sibner, R. J. Sibner ja K. Uhlenbeck andsid vastuse ülalpool esitatud küsimusele, kasutades selleks variatsioonarvutuse meetodeid. Üllatavalt selgus, et vastus antud küsimusele oli positiivne, kuigi eelnevad uurimised pigem vihjasid, et selliseid lahendid ei eksisteeri. L. M. Sibner, R. J. Sibner ja K. Uhlenbeck vaatlesid neljamõõtmelist sfääri S^4, millel toimib S^1. Selgus, et selle püsipunktide hulk on kahemõõtmeline sfäär S^2. Nad uurisid ka S^1-ekvivariantset peakihtkonda P (baasmuutkond on sfäär S^4) ja S^1-invariantseid seostuseid peakihtkonnal P. S^1 toime püsipunktid sfääril S^4 moodustavad kahemõõtmelise sfääri S^2. Variatsioonarvutuse meetodite rakendamisel tekib probleem nõndanimetatud "mullitavate punktidega" (bubbling points), aga S^1-invariantsuse tõttu asuvad kõik sellised punktid kahemõõtmelisel sfääril S^2, ja dimensionaalne redutseerimine võimaldab kolmemõõtmelisel ruumil taandada selle probleemi niinimetatud "monopolidele"(magnetlaeng).

Kui seostus ruumis $\mathbb{R}^4$ on invariantne paralleellükete suhtes fikseeritud suunas, siis see seostus on esitatav kujul (ω, ϕ), kus ω on seostus kolmemõõtmelises ruumis $\mathbb{R}^3$ ja ϕ on assotsieeritud vektorkihtkonna $\mathrm{Ad}\, P$ lõige, mida nimetatakse Higgs'i väljaks (kiht on Lie algebra $\mathfrak{g}$ ja esitus on Lie algebra adjungeeritud esitus). Yang-Millsi funktsioonali kuju sellise seostuse korral on

$$\mathtt{S}(\omega, \phi) = \int_{\mathbb{R}^3} \left(|F_\omega|^2 + |\nabla_\omega \phi|^2\right).$$

Lisaks nõutakse asümptootilise tingimuse täidetust, st et funktsiooni $|\phi|$ piirväärtus oleks 1 ruumi punkti lähenemisel lõpmatusse. C. Taubes [9] töötas välja võimsa variatsiooniteooria selliste seostuste jaoks ja näitas, et eksisteerivad funktsionaali sellised $\mathtt{S}(\omega, \phi)$ kriitilised punktid, mis ei ole miinimumpunktid. Need kriitilised punktid tekitavad seostused neljamõõtmelises ruumis $\mathbb{R}^4$, kuid nende seostuste energia ei ole lõplik. See tähendab, et kõveruse normi ruudu integraal ei koondu üle kogu ruumi $\mathbb{R}^4$. Kuid osutus, et C. Taubes'i meetodit on võimalik rakendada ka siis, kui on määratud S^1 toime. Sellisel juhul saame hulga $S^4 \setminus S^2$ faktoriseerida S^1 toime abil. Saadud faktorruumi saame samastada kolmemõõtmelise hüperboolse ruumiga H^3 ja S^1-invariantsed seostused vastavad paaridele (ω, ϕ) hüperboolses ruumis H^3. Teoorias esineb tähtis parameeter L, mis on ühelt poolt S^1 toime peakihtkonna P kihtide kaal, ja teiselt poolt saab hüperboolse ruumi kõverust K avaldada selle parameetri kaudu kujul $K = -L^{-2}$. L. M. Sibneri, R. J. Sibneri ja K. Uhlenbecki idee seisnes parameetri L väga suureks tegemisel. Selle tulemusena hüperboolse ruumi H^3 kõverus K muutuks väga väikeseks, millest omakorda hüperboolne ruum hakkaks lähenema tasasele ruumile $\mathbb{R}^3$. Nad näitasid, et C. Taubes'i meetod, mis töötab ruumis $\mathbb{R}^3$, on rakendatav ka niisuguses seades, ja ühes sellega leidsid Yang-Millsi võrrandi lahendid neljamõõtmelisel sfääril, kusjuures need lahendid ei olnud Yang-Millsi funktsionaali miinimumpunktid.

Lõpetuseks tuleb mainida, et siin artiklis on näidatud Karen Uhlenbecki silmapaistavad tulemused vaid kalibratsiooniväljateooriast, mis on ainult osa Karen Uhlenbecki panusest geomeetriasse ja matemaatilise füüsikasse. Huvitatud lugeja võib Karen Uhlenbecki ideedest, meetodidest ja tulemustest geomeetria ning matemaatilise füüsika teistes harudes rohkem informatsiooni leida artiklist [1].

Kirjandus

1. S. Donaldson, *Karen Uhlenbeck and the Calculus of Variations*, Notices of the American Mathematical Society, **66** 3 (2019), 303 – 313.

2. S. Donaldson, *The geometry of 4-manifolds*, In AM Gleason (ed.), Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Berkley 1986), vol. 1, 43–54.

3. L.D. Faddeev and A.A. Slavnov, *Gauge Fields: An Introduction To Quantum Theory*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., 1980.

4. D. S. Freed and Karen K. Uhlenbeck, *Instantons and Four-Manifolds*, Springer-Verlag, 1984.

5. J. Milnor, *On manmifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Ann. Math. **64** (1956), 399–405.

6. K. Uhlenbeck, *Connections with L^p Bounds on Curvature*, Commun. Math. Phys. **83** (1982), 31 – 42.

7. K.Uhlenbeck, *Removable singularities in Yang-Mills fields*, Commun. Math. Phys. **83** (1982), 11 – 29.

8. L.M. Sibner, R.J. Sibner, K. Uhlenbeck, *Solutions to Yang-Mills equations that are not self-dual*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **86** (1989), no. 22, 8610–8613.

9. C. Taubes, *The existence of a nonminimal solution to the SU(2) Yang-Mills-Higgs equations on* $\mathbb{R}^3$, Comm. Math. Phys. **86** (1982), 257 – 298.

10. C.N. Yang and R. Mills, *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*, Physical Review **96** (1954), 191–195.