Mittearhimeedilisest analüüsist

Toivo Leiger
Tartu Ülikool

1 Sissejuhatus

Mittearhimeedilise analüüsi sünniaastaks võib pidada aastat 1970, mil ilmus **A. F. Monna** (1909 – 1995) monograafia [4]. Viimasel kolmekümnel aastal on selle valdkonna areng olnud tähelepanuväärselt dünaamiline, seda on tugevasti motiveerinud füüsikas üles kerkinud küsimused, mis seavad kahtluse alla aegruumi reaalarvudel baseeruva mudeli universaalsuse.

Kõik mõõtmised, olgu siis teaduses, tehnikas või koduses majapidamises, tehakse ratsionaalarvudes. Nende hulk[1] $\mathbb{Q}$ on järjestatud korpus, seega suurepärase struktuuriga. Tuletame meelde, et (vähemalt kahte elementi sisaldavat) hulka K nimetatakse korpuseks, kui selles on defineeritud liitmine $(a, b) \mapsto a + b$ ning korrutamine $(a, b) \mapsto ab$, mis rahuldavad järgmisi arvutuseeskirju: kui $a, b, c \in K$, siis

- $a + b = b + a$, $ab = ba$,
- $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a\,(bc) = (ab)\,c$,
- leiduvad neutraalsed elemendid $0, 1 \in K$, et $0 + a = a$ ja $1a = a$,
- igal elemendil $a \in K$ on vastandelement $-a \in K$ (s.t. $a + (-a) = 0$), ja igal elemendil $b \in K \diagdown (0)$ on pöördelement $b^{-1} \in K$ (s.t. $bb^{-1} = 1$),
- $a\,(b + c) = ab + ac$.

Kuna ratsionaalarvud on esitatavad harilike murdudena, siis korpuses $\mathbb{Q}$ on tehted defineeritud kui harilike murdude liitmine ja korrutamine. Peale selle on selles ka lineaarne järjestus, mis võimaldab defineerida absoluutväärtuse

$$|a|_\infty := \begin{cases} a, & \text{kui } a \geq 0, \\ -a, & \text{kui } a < 0. \end{cases}$$

[1] Nagu tavaliselt tähistame tähtedega $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$ vastavalt kõigi naturaal-, täis-, ratsionaal-, reaal- ja kompleksarvude hulka.

Eesti Matemaatika Selts AR 2019

Seega on $\mathbb{Q}$ meetriline ruum kaugusega $d_\infty(a,b) := |a-b|_\infty$, lihtne on veenduda, et kujutus $d_\infty : \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \to [0,\infty)$ rahuldab meetrika aksioome

- $d_\infty(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$,
- $d_\infty(a,b) = d_\infty(b,a)$,
- $d_\infty(a,b) \le d_\infty(a,c) + d_\infty(c,b)$ (kolmnurga võrratus).

Vaatamata kõigile oma headele omadustele on absoluutväärtusega $|\ |_\infty$ varustatud korpusel $\mathbb{Q}$ üks tõsine puudus, mille tõttu ei sobi ta teoreetiliste mudelite ehitamiseks: meetriline ruum $(\mathbb{Q}, d_\infty)$ ei ole täielik. (Meeldetuletuseks: meetrilise ruumi (X,d) elementide jada (x_n) nimetatakse

- koonduvaks, kui $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$ mingi $x \in X$ korral,
- Cauchy jadaks, kui iga $\varepsilon > 0$ puhul saab leida sellise indeksi N, et $d(x_n,x_m) < \varepsilon$ kõikide $n,m \ge N$ korral.

Iga koonduv jada on Cauchy jada. Kui kehtib ka vastupidine väide, siis meetrilist ruumi (X,d) nimetatakse täielikuks.)

Ratsionaalarvude korpuse mittetäielikkus väljendub üsna proosalisel moel: leidub selliseid intervalle, mille pikkus ei ole ratsionaalarv. Näiteks ühikruudu diagonaali pikkus on $\sqrt{2}$, mis teatavasti ei ole esitatav hariliku murruna. Mittetäielikkus on puudujääk, mis teeb korpuse $\mathbb{Q}$ usaldusväärsete matemaatiliste mudelite ehitamisel kasutuskõlbmatuks. Võtme probleemist jagusaamiseks annab meetriliste ruumide täielikustamise teoreem:

- *igal meetrilisel ruumil X on* täield, *s.t. leidub niisugune täielik meetriline ruum $\widehat{X}$, milles X on tihe*[2] *alamruum.*

Täieldi konstrueerimist nimetatakse ruumi täielikustamiseks. Piltlikult öeldes tähendab täielikustamine ruumile X niisuguste elementide lisamist, et igal Cauchy jadal oleks olemas piirväärtus[3]. Kui

[2]Tuletame meelde, et alamhulka A meetrilises ruumis X nimetatakse tihedaks, kui sulund $\overline{A}$ langeb kokku ruumiga X, teisisõnu, kui iga $x \in X$ korral leidub hulgas A selline elementide jada (x_n), et $x_n \to x$.

[3]Tegelikkuses on see protsess muidugi palju keerulisem. Täield $\widehat{X}$ saadakse kui ruumi X kõigi Cauchy jadade hulgas ekvivalentsusseose $(x_n) \sim (z_n) :\Leftrightarrow d(x_n,z_n) \to 0$ järgi moodustatud ekvivalentsiklasside hulk. See osutub täielikuks meetriliseks ruumiks, milles on tihe ruumiga X isomeetriliselt isomorfne alamruum. Isomeetriline isomorfism kahe meetrilise ruumi vahel on

me rakendame seda konstruktsiooni juhul $X = (\mathbb{Q}, d_\infty)$, saame täieliku (järjestatud) korpuse $\mathbb{R}$, milles $\mathbb{Q}$ on tihe alamkorpus. Et rõhutada selle sammu – üleminek ratsionaalarvudelt reaalarvudele – keerukust ja tähtsust, märgime, et inimkonna ajaloos kulus selleks umbes kaks tuhat aastat.

Korpuses $\mathbb{R}$ (nagu ka alamkorpuses $\mathbb{Q}$) kehtib *Archimedese aksioom*

iga positiivse arvu $b \in \mathbb{R}$ *korral leidub* $n \in \mathbb{N}$, *et* $n > b$,

mille võib esitatada ka kujul

kui $0 < a < b$, *siis leidub selline* $n \in \mathbb{N}$, *et* $(n-1)\,a \leq b < na.$

Füüsikas reaalarvude baasil ehitatud aegruumi mudeli puhul tähendab viimane tingimus seda, et
• iga (kuitahes väikese) mõõtühiku korral saab suvalise intervalli pikkust mõõta etteantud ühiku täpsusega.

Reaalarve kasutatakse füüsikas aegruumi koordinaatide kirjeldamiseks enesestmõistetavalt Newtoni ja Leibnizi aegadest saadik. Sellesse enesestmõistetavusse lõi tõsise mõra kvantgravitatsiooniteoorias saadud tulemus, mille kohaselt Plancki skaalal, s.o. pikkuste puhul, mis on väiksemad Plancki pikkusest $l_P \backsim 10^{-33}$ cm, on parimaks saavutatavaks mõõtmistäpsuseks l_P. See tulemus on otseses vastuolus Archimedese aksioomiga. Niisiis ei kõlba reaalarvulised mudelid aegruumi omaduste kirjeldamiseks väikeste pikkuste korral, nende puhul läheb vaja uut arvude korpust ilma Archimedese aksioomita.

Kuna füüsikaliste mõõtmiste tulemused on ratsionaalarvud, siis uue korpuse otsimisel on mõistlik lähtuda korpusest $\mathbb{Q}$. Allpool sõnastatud Ostrowski teoreemi kohaselt on selles absoluutväärtuse $|\;|_\infty$ alternatiiviks *p-aadiline norm*

$$|a|_p := \begin{cases} \left(p^{\mathrm{ord}_p a}\right)^{-1}, & \text{kui } a \neq 0, \\ 0, & \text{kui } a = 0, \end{cases}$$

---

selline üksühene pealekujutus, mis säilitab vastavate punktide vahelise kauguse.

kus $p \in \mathbb{N}$ on mingi algarv ja täisarvu m jaoks

$$\mathrm{ord}_p m := \max \left\{ k \mid m \text{ jagub arvuga } p^k \right\}$$

ning ratsionaalarvu $a = \frac{m}{n}$ puhul

$$\mathrm{ord}_p a := \mathrm{ord}_p m - \mathrm{ord}_p n.$$

(Näiteks, kuna $\mathrm{ord}_3 \frac{13}{27} = \mathrm{ord}_3 13 - \mathrm{ord}_3 27 = 0 - 3 = -3$, siis $\left|\frac{13}{27}\right|_3 = 3^{-(-3)} = 27$.) Normiga $|\ |_p$ määratud meetrika suhtes võetud täieldit tähistatakse $\mathbb{Q}_p$, selle elemente nimetatakse *p-aadilisteks arvudeks.* Korpus $\mathbb{Q}_p$ on meie igapäevase maailma kirjeldamiseks täiesti sobimatu, kuid osutub arvestatavaks kandidaadiks uute teoreetiliste mudelite ehitamiseks matemaatilises füüsikas eelpoolkirjeldatud vastuolu ületamiseks. Niisuguse hüpoteesi esitas 1987. a. **I. V. Volovich** (sünd. 1946) oma kirjas ajakirja *Classical and Quantum Gravity* toimetajale, see kiri sai lähtepunktiks uurimissuunale nimetusega *p-aadiline matemaatiline füüsika.* Selle uue matemaatilise distsipliini esilekerkimine oli tugev motivatsioon mittearhimeedilise analüüsi arenguks.

Käesoleva kirjutise eesmärk on tutvustada matemaatilist analüüsi mittearhimeedilistes korpustes ja nendel korpustel baseeruvat normeeritud ruumide funktsionaalanalüüsi.

2 Ultrameetrilised ruumid

Meetrilist ruumi (X, d) nimetatakse *ultrameetriliseks,* kui kaugus d rahuldab nn. *tugevat kolmnurga võrratust*

$$d(x, y) \leq \max \{d(x, z), d(z, y)\} \quad (x, y, z \in X).$$

Selle võrratusega samaväärne *võrdhaarse kolmnurga tingimus*

$$\text{kui } d(x, z) \neq d(z, y), \text{ siis } d(x, y) = \max \{d(x, z), d(z, y)\}$$

näitab, kui erinev on meie igapäevane maailm ultrameetrilisest, milles kõik kolmnurgad on võrdhaarsed. Ultrameetrilise ruumi X keradel

$$B(z, r) := \{x \in X \mid d(x, z) < r\} \text{ ja } \overline{B}(z, r) := \{x \in X \mid d(x, z) \leq r\},$$

kus $z \in X$ ning $r > 0$, on rida tähelepanuväärseid omadusi, näiteks
- *kera iga punkt on tema keskpunkt,*
- *kui kahel keral on ühiseid punkte, siis üks keradest sisaldab teist,*
- *iga kera on kinnine-lahtine hulk, s.o. hulk, mis samaaegselt on lahtine ja kinnine ultrameetrikaga määratud topoloogias.*

Ultrameetrilist ruumi X nimetatakse *sfääriliselt täielikuks*, kui selles iga üksteisesse sisestatud kerade jada $B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \ldots$ korral $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \neq \varnothing$. Selle definitsiooni võrdlus (kõigis meetrilistes ruumides kehtiva) teoreemiga üksteisesse sisestatud keradest[4] näitab, et
- *iga sfääriliselt täielik ultrameetriline ruum on täielik*[5].

3 Mittearhimeedilised korpused

Olgu K korpus neutraalsete elementidega 0 ja 1 vastavalt liitmise ja korrutamise suhtes. Eeldame, et K on karakteristikuga 0, s.t. $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ liidetavat}} \neq 0$ iga naturaalarvu n korral. Siis $\mathbb{N} = \{1,\ 1+1,\ 1+1+1, \ldots\} \subset K$, järelikult $\mathbb{Q} \subset K$, täpsemalt, $\mathbb{Q}$ on korpuse K alamkorpus. Funktsiooni $|\ | : K \to [0, \infty)$, mis rahuldab tingimusi
- $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$,
- $|ab| = |a|\,|b|$ ja
- $|a + b| \leq |a| + |b| \quad (a, b \in K)$,

nimetame *normiks*, sellega varustatud korpust $K = (K, |\ |)$ *normeeritud korpuseks*. Seejuures eeldame järgnevas kõikjal, et norm $|\ |$ on *mittetriviaalne*, s.t. $|a| \notin \{0, 1\}$ mingi $a \in K$ korral. Kaugusega

$$d_K(a, b) := |a - b| \quad (a, b \in K)$$

[4]Teoreem üksteisesse sisestatud keradest väidab, et meetriline ruum X on täielik parajasti siis, kui on täidetud järgmine tingimus: kui kerad $B_n := \overline{B}(x_n, r_n)$ moodustavad sellise jada (B_n), et

$$B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \ldots \text{ ja } r_n \to 0,$$

siis $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \neq \varnothing$. Sümbol $\varnothing$ tähistab tühja hulka.

[5]Märgime veel, et ultrameetrilise ruumi täield on ultrameetriline.

on korpus K meetriline ruum.

Kui

$$|a+b| \leq \max\{|a|, |b|\} \quad (a, b \in K) \quad \text{(tugev kolmnurga võrratus)},$$

siis normeeritud korpust $(K, |\ |)$ nimetatakse *mittearhimeediliseks.* Ilmselt on normeeritud korpus $(K, |\ |)$ mittearhimeediline parajasti siis, kui (K, d_K) on ultrameetriline ruum, selle tingimusega samaväärsed on veel väited

• kui $|a-b| < |b|$, siis $|a| = |b|$ (võrdhaarse kolmnurga omadus[6]), ja

• $|n| \leq 1$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral,

mis välistab Archimedese aksioomi kehtivuse.

Tugevast kolmnurga võrratusest tulenevad mittearhimeedilises korpuses mitmed jadade ja ridadega seotud tähelepanuväärsed omadused, näiteks:

• *kui* $a_k \to a \neq 0$, *siis* $|a_k| = |a|$ *alates mingist indeksist* N. Tõepoolest, kui valime $N \in \mathbb{N}$ nii, et $|a_k - a| < |a|$ iga $k \geq N$ korral, siis (tänu võrdhaarse kolmnurga omadusele) $|a_k| = |a_k - a + a| = \max\{|a_k - a|, |a|\} = |a|$ $(k \geq N)$;

• *jada* (a_k) *on Cauchy jada parajasti siis, kui* $a_{k+1} - a_k \to 0$. See järeldub võrratusest $|a_k - a_n| \leq \max\{|a_k - a_{k+1}|, \ldots, |a_{n-1} - a_n|\}$ $(k < n)$;

• *täielikus mittearhimeedilises korpuses on rida* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *koonduv parajasti siis, kui* $a_k \to 0$. Nimelt on $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ eelmise väite kohaselt Cauchy jada – ja seega koonduv – parajasti siis, kui $a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \to 0$ $(n \to \infty)$.

Järgnevas eeldame kõikjal, et K on ***täielik mittearhimeediline*** (***lühendatult m.a.***) ***korpus***. Nende hulgas on eriline koht sfääriliselt täielikel korpustel, paljude analüüsiga seotud probleemide puhul on see tingimus määrava tähtsusega. Teine klassifitseerimistunnus on seotud normi väärtuste hulgaga

$$|K| := \{|a| \mid a \in K\}.$$

[6]Mittearhimeedilises korpuses kehtib ka üldisem väide: kui $a_1, \ldots, a_n \in K$ ja $|a_i| \neq |a_j|$ $(i \neq j)$, siis $|a_1 + \cdots + a_n| = \max\{|a_i| \mid 1 \leq i \leq n\}$.

On kaks alternatiivset võimalust: $|K| \setminus \{0\}$ on kas tihe intervallis $(0, \infty)$ või tsükliline, s.t. $|K| \setminus \{0\} = \left\{r^t \mid t \in \mathbb{Z}\right\}$ mingi $r \in (1, \infty)$ korral. Esimesel juhul öeldakse, et korpus K on *tihedalt normeeritud*, teisel juhul nimetame teda *diskreetselt normeerituks*. Osutub, et

• *iga täielik diskreetselt normeeritud korpus on sfääriliselt täielik* ning

• *iga lokaalselt kompaktne*[7] *korpus on diskreetselt normeeritud.*

4 Veel p-aadilistest arvudest

Sissejuhatuses defineeritud p-aadiline norm

$$|a|_p := \begin{cases} \left(p^{\mathrm{ord}_p a}\right)^{-1}, & \text{kui } a \neq 0, \\ 0, & \text{kui } a = 0, \end{cases}$$

korpuses $\mathbb{Q}$ on mittearhimeediline. Selle tugeva kolmnurga võrratuse kontrollimiseks võtame nullist erinevad ratsionaalarvud $a = \frac{m}{n}$ ja $b = \frac{r}{s}$, siis $a + b = \frac{ms+nr}{ns}$. Kuna kahe täisarvu summa $ms + nr$ jagub arvu p sellise astmega, millega jaguvad nii ms kui nr, saame, et

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_p\,(a+b) &= \mathrm{ord}_p\,(ms+nr) - \mathrm{ord}_p\,(ns) \\ &\geq \min\left\{\mathrm{ord}_p\,(ms), \mathrm{ord}_p\,(nr)\right\} - \mathrm{ord}_p n - \mathrm{ord}_p s \\ &= \min\left\{\mathrm{ord}_p m + \mathrm{ord}_p s, \mathrm{ord}_p n + \mathrm{ord}_p r\right\} - \mathrm{ord}_p n - \mathrm{ord}_p s \\ &= \min\left\{\mathrm{ord}_p m - \mathrm{ord}_p n, \mathrm{ord}_p r - \mathrm{ord}_p s\right\} \\ &= \min\left\{\mathrm{ord}_p a, \mathrm{ord}_p b\right\}, \end{aligned}$$

mistõttu

$$|a+b|_p = p^{-\mathrm{ord}_p(a+b)} \leq \max\left\{p^{-\mathrm{ord}_p a}, p^{-\mathrm{ord}_p b}\right\} = \max\left\{|a|_p, |b|_p\right\}$$

suvaliste $a, b \in \mathbb{Q}$ korral. Täielikustamise protsessis laiendatakse norm $|\ |_p$ täieldile, s.o. korpusele $\mathbb{Q}_p$, seejuures säilib sellega määratud meetrika ultrameetrilisus ehk normi mittearhimeedilisus.

[7] Normeeritud korpuse alamhulka nimetatakse *kompaktseks*, kui selle iga jada sisaldab selles hulgas koonduva osajada. Normeeritud korpust nimetatakse *lokaalselt kompaktseks*, kui igal selles korpuses tõkestatud jadal on koonduv osajada.

Märgime normeeritud korpuse $\left(\mathbb{Q}_p, |\ |_p\right)$ kahte tähelepanuväärset omadust:

• $\mathbb{Q}_p$ *on lokaalselt kompaktne, seega diskreetselt normeeritud,* täpsemalt, $|\mathbb{Q}_p|_p = \{0\} \cup \{p^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$,

• *iga p-aadiline arv a on esitatav kujul* $a = \sum_{k=-m}^{\infty} b_k p^k$, *kus* $b_k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$; *seejuures, kui* $a \neq 0$, *siis* $|a|_p = p^m$.

Ühikkera

$$\mathbb{Z}_p := \left\{a \in \mathbb{Q}_p \mid |a|_p \leq 1\right\} = \left\{\sum_{k=0}^{\infty} b_k p^k \mid b_k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}\right\}$$

elemente nimetatakse *p-aadilisteks täisarvudeks*[8].

Sõnastame veel sissejuhatuses mainitud ***Ostrowski teoreemi:***

• *iga mittetriviaalne norm korpuses* $\mathbb{Q}$ *on ekvivalentne*[9] *kas absoluutväärtusega* $|\ |_\infty$ *või p-aadilise normiga* $|\ |_p$ *mingi algarvu p korral*[10].

5 Elementaarne analüüs

Pidevate funktsioonide $f\colon D \to K$, kus D on korpuse K mingi mittetühi alamhulk, lähendamiseks sobivad hästi *lokaalselt konstantsed* funktsioonid. Nii nimetatakse funktsiooni $g\colon D \to K$, kui igal argumendil $x \in D$ leidub selline ümbrus, milles g on konstantne. Iga selline funktsioon on pidev ning

• *iga pidevat funktsiooni* $f\colon D \to K$ *saab hulgas D ühtlaselt lähendada lokaalselt konstantsete funktsioonidega*[11].

[8]Normi $|\ |_p$ võib jätkata korpuse $\mathbb{Q}_p$ algebralisele sulundile, saadud m.a. korpuse täieldi $\mathbb{C}_p$ elemente nimetatakse *p-aadilisteks kompleksarvudeks.* Seejuures $\mathbb{C}_p$ on näide täielikust m.a. korpusest, mis *ei ole sfääriliselt täielik.*

[9]Norme $|\ |$ ning $|\ |'$ korpuses K nimetatakse ekvivalentseteks, kui leiduvad sellised $m, M > 0$, et $m\,|a| \leq |a|' \leq M\,|a|$ iga $a \in K$ korral.

[10]Üldisemalt, iga normeeritud korpuse $(K, |\ |)$ puhul on kaks võimalust: (a) K on korpuse $\mathbb{C}$ alamkorpus ja $|a| = |a|_\infty$ iga $a \in K$ korral või (b) $|\ |$ on mittearhimeediline norm.

[11]S.t. iga $\varepsilon > 0$ korral leidub lokaalselt konstantne $g\colon D \to K$, et $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ suvalise $x \in D$ puhul.

Kompaktse hulga D korral on selles määratud lokaalselt konstantse funktsiooni väärtuste hulk lõplik. Sel juhul saame eelnevat väidet kasutades lihtsa tõestuse ***Kaplansky teoreemile*,** mille kohaselt

• *iga pidevat funktsiooni saab kompaktses hulgas D ühtlaselt lähendada polünoomidega, mille kordajad on korpuse K elemendid.*

Kui D ei sisalda isoleeritud punkte, siis lokaalselt konstantne $f\colon D \to K$ on diferentseeruv (tuletis defineeritakse formaalselt sama valemiga kui reaalsete argumentidega funktsiooni puhul) ja $f'(x) = 0$ igas punktis $x \in D$. Niisiis

• *leidub mittekonstantseid funktsioone, mille tuletis on nullfunktsioon.*

Diferentseeruvuse mõistel on vaadeldavas kontekstis rida puudusi, näiteks mitmed sellega seotud klassikalise analüüsi põhiväited (muuhulgas Lagrange'i keskväärtusteoreem ja Rolle'i teoreem) ei kehti. Kõige ilmekam näide on nn. *lokaalse pööratavuse omaduse* puudumine:

• *leidub pidevalt diferentseeruvaid funktsioone $f\colon D \to K$ omadusega $f'(a) \neq 0$, et argumendi $a \in D$ üheski ümbruses ei ole funktsioon f pööratav.*

Oluliselt paremate omadustega on rangelt diferentseeruvad funktsioonid. Öeldakse, et $f\colon D \to K$ on kohal *a rangelt diferentseeruv*, kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,a)\\ x\neq y}} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

Need funktsioonid on pidevalt diferentseeruvad ja neil on lokaalse pööratavuse omadus.

Astmerida $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-u)^k$, kus $u, a_0, a_1, \ldots \in K$, koondub korpuses K, kui $|x-u| < r := (\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|})^{-1}$, ja hajub, kui $|x-u| > r$. Täpsemalt, astmera koonduvuspiirkonnaks B on üks kahest kerast $B(u,r)$ või $\overline{B}(u,r)$. Funktsiooni

$$f\colon B \to K, \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-u)^k$$

nimetatakse *analüütiliseks* hulgas B. Kuna kera B kõik punktid on tema keskpunktid, siis funktsiooni f saab arendada astmeritta iga punkti $v \in B$ järgi: leiduvad kordajad $c_0, c_1, \dots \in K$, et $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - v)^k$ iga $x \in B$ korral. Seega

• *funktsioonide analüütiline jätkamine mittearhimeedilises korpuses ei ole võimalik.*

Vaatleme näidetena kaht analüütilist p-aadilist funktsiooni. Korpuses $\mathbb{Q}_p$ koondub rida $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$ parajasti siis, kui $|x|_p < 1$ ehk[12] $|x|_p \leq 1/p$, s.t. kui $x \in p\mathbb{Z}_p$. Muutuja vahetuse abil saame *p-aadilise logaritmfunktsiooni*

$$\ln_p : 1 + p\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p, \quad 1 + x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

omadusega $\ln_p(xy) = \ln_p x + \ln_p y$. Analoogiliselt defineeritakse *p-aadiline eksponentfunktsioon*

$$\exp_p x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

selle määramispiirkonnaks on kera $B\left(0, p^{-1/(p-1)}\right)$, milles kehtib seos

$$\exp_p(x + y) = \exp_p x \exp_p y.$$

Seejuures

$$\ln_p\left(\exp_p x\right) = x \text{ ning } \exp_p(\ln_p(1+x)) = 1+x \quad \left(x \in B\left(0, p^{-1/(p-1)}\right)\right)$$

ja

$$(\ln_p x)' = \frac{1}{x} \quad (x \in 1 + p\mathbb{Z}_p)$$

ning

$$\left(\exp_p x\right)' = \exp_p x \quad \left(x \in B\left(0, p^{-1/(p-1)}\right)\right),$$

märgime veel, et $\exp_p\left(B\left(0, p^{-1/(p-1)}\right)\right) = 1 + B\left(0, p^{-1/(p-1)}\right)$.

[12]Peame silmas, et $|\mathbb{Q}_p|_p = \left\{\dots, p^{-2}, p^{-1}, 1, p, p^2, \dots\right\}$.

Astmeridade kõrval kasutatakse pidevate funktsioonide $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ esitamiseks ka *Mahleri ridu.* Nii nimetatakse funktsionaalrida $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \binom{x}{k}$, kus $c_k \in \mathbb{Q}_p$, $c_k \to 0$ ja $\binom{x}{k} := x(x-1)\dots(x-k+1)/k!$. Kui funktsiooni $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ korral tähistada $\nabla^0 f := f$, $\nabla^1 f := \nabla f$, $\nabla^k f := \nabla\left(\nabla^{k-1} f\right)$ $(k = 2, 3, \dots)$, kus $(\nabla f)(x) := f(x+1) - f(x)$, siis

• ***(Mahleri teoreem)*** *pideva funktsiooni* $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ *korral*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\nabla^k f\right)(0) \binom{x}{k} \quad (x \in \mathbb{Z}_p) \quad (\textit{funktsiooni } f \textit{ Mahleri rida}),$$

seejuures $\nabla^k f(0) \to 0$; see *rida koondub ühtlaselt hulgas* $\mathbb{Z}_p$ *ning* $\max\left\{|f(x)|_p \mid x \in \mathbb{Z}_p\right\} = \max\left\{\left|\left(\nabla^k f\right)(0)\right|_p \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$.

Kehtivad väited

• *pidev funktsioon* $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ *on kohal* $x \in \mathbb{Z}_p$ *diferentseeruv parajasti siis, kui* $\left|\frac{(\nabla^k f)(0)}{k}\right|_p \to 0$, *seejuures* $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(\nabla^k f)(0)}{k}$,

• *pidev funktsioon* $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ *on rangelt diferentseeruv parajasti siis, kui* $k\left|\left(\nabla^k f\right)(0)\right|_p \to 0$.

Katse luua p-aadiliste funktsioonide $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ integraalarvutus klassikalise analüüsi eeskujul, ei anna rahuldavaid tulemusi. Kui lähtuda Lebesgue'i integraali ideest, vajame hulgas $\mathbb{Z}_p$ loenduv-aditiivset mõõtu[13] μ, mis igale kinnisele-lahtisele hulgale $A \subset \mathbb{Z}_p$ seab vastavusse p-aadilise arvu $\mu(A)$ nii, et $\mu(a + A) = \mu(A)$ iga $a \in \mathbb{Z}_p$ puhul (nihkeinvariantsus) ja $\sup\{|\mu(A)| \mid A \text{ on lahtine ja kompaktne}\} < \infty$ (tõkestatus). Siis hulga A karakteristliku funktsiooni[14] χ_A integraaliks võtame $I(\chi_A) := \mu(A)$, seega $I(f) = \sum_{i=1}^{m} c_i \mu(S_i)$ iga lihtsa funktsiooni $f = \sum_{i=1}^{m} c_i \chi_{S_i}$ korral, kus $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{Q}_p \setminus (0)$, $c_i \neq c_j$ ning $S_i, \dots, S_m \subset \mathbb{Z}_p$, $S_i \cap S_j = \varnothing$ $(i \neq j)$. Lihtsatelt funktsioonidelt jätkame integraali I mingile laiemale funktsioonide klassile, mis

[13] S.t. $\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)$, kui $S_k \cap S_i = \varnothing$ $(k \neq i)$.

[14] S.t. $\chi_A(t) = 1$, kui $t \in A$, ja $\chi_A(t) = 0$, kui $t \notin A$.

(soovitavalt) sisaldab kõik pidevad funktsioonid. Paraku ei ole see idee teostatav, sest ükski tõkestatud mittetriviaalne mõõt μ ei ole nihke suhtes invariantne.

Ka teine, esimesel pilgul loomulik tunduv lähtepunkt – Newton-Leibnizi valem – ei anna soovitavat tulemust. Tõsi küll, igal pideval funktsioonil $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ on (rangelt diferentseeruv) algfunktsioon G, seega saab defineerida integraali $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$, kuid sellel pole ei rakenduslikku ega teoreetilist väärtust.

Moodustame funktsiooni $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ puhul summad

$$\frac{1}{p^n}\sum_{j=0}^{p^n-1} f(j) = \sum_{j=0}^{p^n-1} f(j)\,\mu(j + p^n\mathbb{Z}_p) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

kus "mõõt"μ on defineeritud seosega $\mu(j + p^n\mathbb{Z}_p) := |p^n| = (p^n)^{-1}$ ja selle väärtust võib lugeda kera $\overline{B}(j, |p^n|) = j + p^n\mathbb{Z}_p$ "p-aadiliseks ruumalaks". Seega on põhjust vaadelda summat $(p^n)^{-1}\sum_{j=0}^{p^n-1} f(j)$ funktsiooni f integraalsummana. Kui eksisteerib piirväärtus

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty}\frac{1}{p^n}\sum_{j=0}^{p^n-1} f(j),$$

siis seda nimetatakse funktsiooni f *Volkenborni integraaliks.* Tähistame $(Sf)(0) := 0$ ja $(Sf)(k) := \sum_{j=0}^{k-1} f(j)$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral, siis pideva funktsiooni f puhul saab funktsiooni $Sf\colon \mathbb{N}\cup\{0\} \to \mathbb{N}\cup\{0\}$ pidevalt jätkata hulka $\mathbb{Z}_p$. Kuna $\frac{1}{p^n}\sum_{j=0}^{p^n-1} f(j) = ((Sf)(p^n) - (Sf)(0))/p^n$, siis $\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\,dx = (Sf)'(0)$ eeldusel, et Sf on kohal 0 diferentseeruv. Saab näidata, et viimast eeldust rahuldavad kõik rangelt diferentseeruvad funktsioonid f, niisiis

• *iga rangelt diferentseeruv funktsioon $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ on Volkenborni mõttes integreeruv ja* $\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\,dx = (Sf)'(0)$.

Märgime veel, et

• *paaritu funktsiooni f korral* $\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\,dx = -\frac{f'(0)}{2}$,

• *kui $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ $(x \in \mathbb{Z}_p)$ ja $a_k \to 0$, siis $\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k B_k$, kus B_k on Bernoulli arvud*[15],

[15] S.t. ratsionaalarvud, mis rahuldavad võrrandit $\left(e^t - 1\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}$.

• *kui* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \binom{\circ}{k}$ *on rangelt diferentseeruva funktsiooni* $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ *Mahleri rida* (s.t. $c_k = \left(\nabla^k f\right)(0)$), *siis* $\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{c_k}{k+1}$.

Kõrvuti Volkenborni tüüpi integraalidega käsitleb p-aadiline analüüs reaalsete või komplekssete väärtustega funktsioonide integreerimist. Funktsiooni $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{R}$ integraal defineeritakse (tänu korpuse $\mathbb{Q}_p$ lokaalsele kompaktsusele) üheselt määratud Haari mõõdu[16] $\mu\colon \mathbb{Z}_p \to [0,\infty)$ abil. Lihtsa funktsiooni $f = \sum_{i=1}^{m} c_i \chi_{S_i}$ korral, kus $c_1, \ldots, c_m$ on kas reaal- või kompleksarvud, defineeritakse integraal $\int_{\mathbb{Z}_p} f d\mu := \sum_{i=1}^{m} c_i \mu(S_i)$, mis jätkatakse laiemale funktsioonide klassile. Kui funktsioonil f on vaid loenduv arv väärtusi $r_1, r_2, \ldots$, siis $\int_{\mathbb{Z}_p} f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} r_i \mu(A_i)$, kus $A_i := \{a \in \mathbb{Z}_p \mid f(a) = r_i\}$.

6 Mittearhimeediline funktsionaalanalüüs

Olgu X vektorruum üle korpuse K. Kui selles on defineeritud topoloogia τ, mille suhtes vektorruumi tehted – liitmine ja skalaariga (s.o. korpuse K elemendiga) korrutamine – on pidevad, siis öeldakse, et $X = (X, \tau)$ on topoloogiline vektorruum. Seda nimetatakse *lokaalselt kumeraks ruumiks*[17], kui tal on absoluutselt kumeratest hulkadest koosnev nulliümbruste baas, s.t. kui iga nulliümbrus sisaldab absoluutselt kumerat nulliümbrust. Seejuures on absoluutse kumeruse mõiste defineeritud m.a. skalaaride jaoks sobival viisil: alamhulka $A \subset X$ nimetatakse *absoluutselt kumeraks*, kui $x+y, ax \in A$ suvaliste punktide $x, y \in A$ ning skalaari $a \in \overline{B}(0,1)$ korral.

Analoogiliselt klassikalise juhuga saab sellise lokaalselt kumera topoloogia määrata *poolnormide* abil, need on funktsioonid $p\colon X \to [0,\infty)$, mis rahuldavad tingimusi $p(0_X) = 0$, $p(ax) = |a|\, p(x)$ ja

$$p(x+y) \le \max\{p(x), p(y)\} \quad (x, y \in X,\ a \in K).$$

[16]See on loenduv-aditiivne nihke suhtes invariantne positiivsete väärtustega hulgafunktsioon, millel kompaktsetel alamhulkadel on lõplik väärtus ning $\mu(\mathbb{Z}_p) = 1$.

[17]Täpsem on öelda *m.a. lokaalselt kumer ruum*, kuid lühiduse huvides jätame siin ja edaspidi ka teiste mõistete juures täiendi *m.a.* tavaliselt lisamata.

Tingimust $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ rahuldavat poolnormi $\| \ \| : X \to \mathbb{R}$ nimetatakse *normiks*, sellega varustatud vektorruumi X aga *normeeritud ruumiks*. Kaugusega $(x,y) \mapsto \|x-y\|$ määratud meetrikas on see ultrameetriline ruum. Kui see meetrika on täielik, siis ütleme, et X on *Banachi ruum*. Näiteks kõigi tõkestatud jadade ruum

$$\ell^\infty := \left\{ x = (x_k) \mid \|x\|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < \infty \right\}$$

ja kõigi nulliks koonduvate jadade ruum

$$c_0 := \left\{ x = (x_k) \mid \lim_{k\to\infty} x_k = 0 \right\}$$

on Banachi ruumid normiga $\| \ \|_\infty$.

Ütleme, et normeeritud ruum X on *loenduvat tüüpi*[18], kui tal leidub loenduv põhihulk D, s.t. kui lineaarne kate

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k z_k \mid z_k \in D,\ a_k \in K \quad (k = 1, \dots, n)\,,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

on tihe ruumis X. Punktide jada (e_k) Banachi ruumis X nimetatakse *Schauderi baasiks*, kui igal elemendil $x \in X$ on ühene esitus $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$, kus $a_k \in K$. Arusaadavalt saab Schauderi baas olla vaid loenduvat tüüpi ruumis[19]. Seejuures klassikalise funktsionaalanalüüsi 20. sajandi suur probleem – kas igas loenduvat tüüpi (ehk separaablis) Banachi ruumis on Schauderi baas? – saab m.a. juhul (erinevalt klassikalistest Banachi ruumidest) positiivse vastuse (vt. teoreem 1.4.1 allpool).

Idee, defineerida Hilberti ruumide eeskujul skalaarkorrutisel põhinev ortogonaalsuse mõiste, mis võimaldaks käsitleda ortogonaalse

[18]Teatavasti nimetatakse topoloogilist ruumi separaabliks, kui selles on loenduv tihe alamhulk. Iga separaabel normeeritud ruum on loenduvat tüüpi, vastupidine väide on õige vaid juhul, kui korpus K ise on separaabel, näiteks kui K on $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ või $\mathbb{Q}_p$.

[19]Näiteks Banachi ruumis c_0 moodustavad baasi jadad $e_1 := (1,0,0,\dots)$, $e_2 := (0,1,0,\dots)$ ..., iga $x = (x_k) \in c_0$ puhul $\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\|_\infty = \sup_{k>n} |x_k| \to 0$, kui $n \to \infty$, s.t. $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$.

baasiga ruume, ei ole m.a. juhul realiseeritav: kui Banachi ruumis X on defineeritud selline (sobival viisil modifitseeritud) skalaarkorrutis $\langle\ ,\ \rangle : X \times X \to [0,\infty)$, et $\langle\, x, x\,\rangle = \|x\|^2$, ning igal kinnisel alamruumil on selle skalaarkorrutise suhtes ortogonaalne täiend, siis X on lõplikumõõtmeline. Küll aga saab igas normeeritud ruumis X defineerida selle punktide vahel ortogonaalsus-seose

$$x \perp y :\Leftrightarrow \inf\{\|x - ay\| \mid a \in K\} = \|x\|\,,$$

mis (erinevalt klassikalisest juhust) on sümmeetriline, s.t. $x \perp y \Leftrightarrow y \perp x$. Seetõttu $x \perp y$ parajasti siis, kui

$$\|ax + by\| = \max\{\|ax\|, \|by\|\} \quad (x, y \in X,\ a, b \in K)\,.$$

Seejuures sõltub ortogonaalsuse mõiste konkreetsest normist, ekvivalentsed normid ei pruugi määrata sama ortogonaalsus-seost[20]. Omadustelt on nii defineeritud mõiste täiesti võrreldav Hilberti ruumi skalaarkorrutise poolt määratud ortogonaalsusega, muuhulgas ka ortogonaalridade osas.

Kokkuvõtvalt kehtib järgmine teoreem.

Teoreem 1.4.1. *Kui X on loenduvat tüüpi Banachi ruum, siis on tal Schauderi baas. Seejuures leidub esialgse normiga ekvivalentne norm, mille suhtes on ruumis* ortogonaalne *Schauderi baas.*

Need klassikalise funktsionaalanalüüsi põhiprintsiibid, mis tuginevad (igas täielikus meetrilises ruumis kehtivale) Baire'i teoreemile[21] – lahtise kujutuse printsiip, teoreem kinnisest graafikust, ühtlase tõkestatuse printsiip – kehtivad ka m.a. Banachi ruumides. Neljanda printsiibi, duaalsusteooria nurgakiviks oleva Hahn-Banachi teoreemiga on olukord palju keerulisem.

[20]Norme $\|\ \|$ ja $\|\ \|^*$ vektorruumis X nimetatakse ekvivalentseteks, kui leiduvad positiivsed kordajad m ja M, et $m\,\|x\|^* \le \|x\| \le M\,\|x\|^*$ iga $x \in X$ korral. Topoloogiliselt on normeeritud ruumid $(X, \|\ \|)$ ja $(X, \|\ \|^*)$ sel juhul isomorfsed, s.t. lokaalselt kumerate ruumidena samastatavad.

[21]Baire'i teoreem väidab, et kui täielik meetriline ruum on esitatud kinniste alamhulkade loenduva ühendina, siis vähemalt üks neist alamhulkadest sisaldab kera.

Normeeritud (ja üldisemalt lokaalselt kumerate) ruumide duaalsusteooria on mõistete ja väidete süsteem, mis kirjeldab ruumi lineaar-topoloogilisi omadusi pidevate lineaarsete funktsionaalide abil. Normeeritud ruumi X puhul on sellise teooria ülesehitamiseks vajalik, et topoloogiline kaasruum X' (s.o. kõigi pidevate lineaarsete funktsionaalide $f\colon X \to K$ vektorruum[22]) eraldaks punktid[23] ruumis X. Kui D on ruumi X vektoralamruum ja $g \in D'$, siis funktsionaali $f \in X'$, mis alamruumis D langeb kokku funktsionaaliga g, nimetatakse funktsionaali g pidevaks jätkuks. M.a. juhul kehtivad järgmised väited:

• (**Hahn-Banachi teoreem**) *kui K on sfääriliselt täielik, siis igal funktsionaalil $g \in D'$ on selline jätk $f \in X'$, et $\|f\| = \|g\|$*. Kui K ei ole sfääriliselt täielik, siis see väide kehtib vaid lõplikumõõtmelise X korral. Niisuguse korpuse K puhul on näiteks Banachi ruumis $(c_0, \|\ \|_\infty)$ selline alamruum D ning selles pidev lineaarne funktsionaal g, mille ükski pidev jätk $f \in (c_0)'$ ei rahulda tingimust $\|f\| = \|g\|$;

• (**$(1+\varepsilon)$-Hahn-Banachi teoreem**) *kui normeeritud ruum X on loenduvat tüüpi ja $\varepsilon > 0$, siis igal funktsionaalil $g \in D'$ on selline jätk $f \in X'$, et $\|f\| = (1+\varepsilon)\|g\|$.*

Nendest väidetest tuleneb järgmine duaalsusteooria jaoks oluline teoreem.

Teoreem 1.4.2. *Olgu X normeeritud ruum üle täieliku m.a. korpuse K. Kui kas*

• *K on sfääriliselt täielik või*

• *X on loenduvat tüüpi,*

siis iga alamruumi $D \subset X$ korral saab iga funktsionaali $g \in D'$ pidevalt jätkata kogu ruumi X. Sel juhul kaasruum X' eraldab punktid ruumis X.

Erinevalt klassikalisest situatsioonist leidub m.a. juhul triviaalse kaasruumiga Banachi ruume. Näiteks, kui K ei ole sfääriliselt

[22]Normiga $\|f\| := \sup\{|f(x)| \mid \|x\| \leq 1\}$ on X' Banachi ruum.

[23]S.t. kui $x, y \in X$ ja $x \neq y$, siis $f(x) \neq f(y)$ mingi $f \in X'$ korral.

täielik, siis faktorruumis ℓ^∞/c_0, mis on Banachi ruum[24], on ainukeseks pidevaks lineaarseks funktsionaaliks nullfunktsionaal, s.t. $(\ell^\infty/c_0)' = \{0\}$. Samas leidub normeeritud ruume $(X, \|\ \|)$ üle mittesfääriliselt täieliku korpuse K, mis ei ole loenduvat tüüpi, kuid mille kaasruum X' ikkagi eraldab punktid ruumis X. Nende puhul garanteerib sisuka duaalsusteooria olemasolu normi $\|\ \|$ *polaarsuse* tingimus

$$\|x\| = \sup\{|f(x)| \mid f \in A\} \text{ mingi } A \subset X' \text{ korral } (x \in X).$$

See on täidetud, kui kehtib üks teoreemi 1.4.2 eeldustest, kuid ka näiteks Banachi ruumi ℓ^∞ puhul mittesfääriliselt täieliku K korral. Duaalsusteooria seisukohalt on oluline järgmine Hahn-Banachi-tüüpi teoreem:

• *norm $\|\ \|$ on polaarne parajasti siis, kui $(1+\varepsilon)$-Hahn-Banachi teoreem kehtib (ilma loenduva tüübi eelduseta) iga lõplikumõõtmelise alamruumi $D \subset X$ korral.*

Seega polaarse normiga ruumis eraldab tema kaasruum punktid.

Polaarsuse tingimusel on ilus kriteerium:

• *norm $\|\ \|$ on polaarne parajasti siis, kui iga nõrgalt tõkestatud alamhulk normeeritud ruumis X on tõkestatud*, s.t. kui iga alamhulga $C \subset X$ puhul

$$\sup\{\|x\| \mid x \in C\} < \infty \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [\sup\{|f(x)| \mid x \in C\} < \infty \text{ iga } f \in X' \text{ korral}].$$

7 Mõned järelmärkused

M.a. funktsionaalanalüüsi ülesehitus ja mõistete süsteem kopeerib klassikalist käsitlust, kusjuures paralleelid kahe teooria vahel on eriti silmatorkavad sfääriliselt täieliku korpuse K puhul. Kuid ka sel juhul on nende teooriate vahel tõsiseid erinevusi. Mitmed klassikalise alanalüüsi mõisted m.a. juhul "ei tööta",

[24]Meenutame, et kui $(Z, \|\ \|)$ on Banach ruum ja D on selle kinnine alamruum, siis faktorruum Z/D koosneb ekvivalentsiklassidest $z + D \quad (z \in Z)$, normiga $\|z + D\| := \inf\{\|z - d\| \mid d \in D\}$ on see Banachi ruum.

lisaks eespool mainitud absoluutsele kumerusele, separaablusele ja skalaarkorrutisele märgime veel klassikalises duaalsusteoorias olulist rolli mängiva *(pre)kompaktsuse* mõistet. Meenutame, et Banachi ruumi X alamhulk C on prekompaktne (ehk sulund $\overline{C}$ on kompaktne) parajasti siis, kui iga $\varepsilon > 0$ korral saab leida sellise lõpliku alamhulga $F = \{z_1, \ldots, z_n\} \subset X$, et

$$C \subset F + B(0, \varepsilon). \tag{1.35}$$

Kui korpus K ei ole lokaalselt kompaktne, siis ainuke absoluutselt kumer prekompaktne alamhulk on $\{0\}$. Seepärast asendatakse m.a. juhul definitsioonis (1.35) lõplik hulk F selle absoluutselt kumera kattega

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k z_k \mid a_k \in K, \ |a_k| \leq 1 \right\},$$

vastavat tingimust rahuldavat hulka C nimetatakse *kompaktoidiks*. See mõiste osutub duaalsusteoorias väga efektiivseks.

Laias laastus on m.a. analüüs sfääriliselt täieliku korpuse K korral vaesem ja üheülbalisem kui klassikaline teooria, mille tulemused annavad tunnistust suuremast mitmekesisusest. Üks näide sellest üheülbalisusest on teoreemist 1.4.1 tulenev fakt, et loenduvat tüüpi m.a. Banachi ruumideks on parajasti kõik ruumi c_0 kinnised alamruumid. Märgime veel teist tähelepanuväärset tõsiasja: igas m.a. normeeritud ruumis X langevad jadade koonduvus ja nõrk koonduvus kokku, s.t.

$$\|x_k - x\| \to 0 \Leftrightarrow [f(x_k) \to f(x) \text{ iga } f \in X' \text{ korral}].$$

Juhul $K = \mathbb{R}$ või $K = \mathbb{C}$ on vähesed lõpmatumõõtmelised Banachi ruumid sellise omadusega.

Mõnel juhul annab aga m.a. analüüs selgema ja avarama vaate klassikalise analüüsi probleemidele. Heaks näiteks sellest on Hahn-Banachi teoreem, mille tähtsus tavalises funktsionaalanalüüsi kursuses ei pruugi olla ilmne. Tema tegelik roll duaalsusteoorias saab hoopis paremini selgeks m.a. normeeritud ruumide juures.

Mittearhimeedilise analüüsi kodumaa on Holland. Eelmise sajandi kuuekümnendate aastate lõpupoole töötas Nijemegeni katoliku ülkooli juures väike rühm matemaatikuid, kes klassikalise analüüsi kõrval uurisid ka m.a. probleeme. Kolm kõige tuntumat sellest rühmast olid **A. F. Monna**, **A. van Rooij** (sünd. 1936) ja **W. H. Schikhof** (1937 – 2014), nende kirjutatud monograafiad [4], [6] ja [7] olid esimesed selle valdkonna süstemaatilised käsitlused. Schikhofist sai üheksakümnendatel uurimisvaldkonna liider, kelle eestvedamisel on see kiiresti arenenud ja geograafiliselt laienenud. Tema enda muljet avaldavast teaduslikust panusest märgime tema rajatud tugevalt diferentseeruvate funktsioonide teooriat ning lokaalselt kumerate ruumide teooria laiendamist ruumidele, mis on defineeritud üle mittesfääriliselt täieliku korpuse. Schikhofi ja Hispaania matemaatiku **C. Perez-Garcia** (sünd. 1956) kirjutatud monograafia [5] võtab kokku nende endi ja paljude teiste matemaatikute uurimuste tulemused. See on mittearhimeedilise funktsionaalanalüüsi kõige kaasaegsem ja ulatuslikum esitus. Muuhulgas toovad autorid lokaalselt kumerate ruumide kontekstis suurepäraselt esile normeeritud ruumide teooria mõistete ja seoste täpsema sisu ning olemuse.

Lõpuks, tulles tagasi kirjutise sissejuhatuse juurde, märgime, et praeguseks on mittearhimeediline mõtteviis tõestanud oma eluõigust rakendustega mitte ainult füüsikas, vaid ka teistes teadustes, näiteks bioloogias ja kosmoloogias. Üldise pealkirja *p-aadiline matemaatiline füüsika* all võib leida peatükid nimetustega *p-aadiline kvantmehaanika, p-aadiline väljateooria, p-aadiline stringiteooria* jt. Nende üksikasjalikumaid käsitlusi saab lugeda raamatutest [2] ja [3], ülevaadet arengutest artiklist [1].

Kirjandus

1. B. Dragovich, A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, I. V. Volovich, E. I. Zelenov, p-adic mathematical physics: the first 30 years. *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.* 9, no. 2, 87–121 2017.

2. A. Khrennikov, *Non-Archimedean analysis: quantum paradoxes, dynamical systems and biological models.* Mathematics and its Applications, 427. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

3. A. Khrennikov, *Non-Archimedean analysis and its applications.* (Russian) Fiziko-Matematicheskaya Literatura, Moscow, 2003.

4. A. F. Monna, *Analyse non-archimédienne.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 56. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

5. C. Perez-Garcia, W. H. Schikhof, *Locally convex spaces over non-Archimedean valued fields.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 119. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

6. A. C. M. van Rooij, *Non-Archimedean functional analysis.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., 51. Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.

7. W. H. Schikhof, *Ultrametric calculus. An introduction to p-adic analysis.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 4. Cambridge University Press, Cambridge, 1984.