Poolrühmade Morita ekvivalentsusest

VALDIS LAAN
Tartu Ülikool

Sissejuhatus

Selles artiklis tuleb juttu algebralistest struktuuridest, mida nimetatakse poolrühmadeks. Poolrühmateooria on suhteliselt noor algebra haru (võrreldes näiteks rühmateooria või ringiteooriaga), sellest võib rääkida alates 20. sajandi algusest. Eestis on poolrühmi uuritud viimased 50 aastat ja eelkõige on seda teinud Mati Kilp, tema õpilased ja õpilaste õpilased, aga ka teised algebraistid (näiteks Kalle Kaarli ja Peeter Puusemp) on neid oma töödes kasutanud.

Definitsioon 1.3.1. Poolrühmaks nimetatakse hulka S koos temal defineeritud kahekohalise algebralise tehtega

$$S \times S \to S, \ \ (s,t) \mapsto s * t \,,$$

mis on assotsiatiivne, s.t. rahuldab tingimust

$$(s * t) * u = s * (t * u)$$

iga $s, t, u \in S$ korral. Kui poolrühmadest räägitakse üldiselt, siis tema tehet nimetatakse harilikult korrutamiseks ja $s * t$ asemel kirjutatakse st.

Nagu näha, on poolrühma definitsioon väga lihtne ja tehtelt nõutakse ainult ühte tingimust — assotsiatiivsust. See aga tähendab, et poolrühmi (näiteks n-elemendilisi) on väga palju. Võiks isegi öelda: nad esinevad igal pool. Toome mõned lihtsad näited.

Näide 1.3.1.

1. Naturaalarvude hulk $\mathbb{N}$ on poolrühm korrutamise suhtes.

2. Hulk $\mathbb{N}$ on poolrühm ka liitmise ja vähima ühiskordse leidmise suhtes. Tegelikult võib hulgal $\mathbb{N}$ defineerida lõpmata palju assotsiatiivseid tehteid, aga muidugi mitte kõik neist ei ole sama huvitavad kui liitmine või korrutamine.

3. Kui X on mittetühi hulk, siis tema kõigi teisenduste hulk on poolrühm teisenduste järjestrakendamise suhtes.

4. Kõigi n-ndat järku ruutmaatriksite hulk on poolrühm maatriksite korrutamise suhtes.

Definitsioon 1.3.2. Olgu $(S, *)$ poolrühm. Alamhulka $U \subseteq S$ nimetatakse selle poolrühma **alampoolrühmaks**, kui iga $u, v \in U$ korral $u * v \in U$.

Näiteks positiivsete paarisarvude hulk on poolrühma $(\mathbb{N}, \cdot)$ alampoolrühm, samuti positiivsete paaritute arvude hulk. Algarvude hulk aga ei ole alampoolrühm, sest näiteks $3 \cdot 5$ ei ole algarv.

Kui poolrühm S on lõplik, ütleme n-elemendiline, siis on võimalik tema tehe anda niinimetatud **Cayley tabeli** abil. See on sisuliselt $(n \times n)$-maatriks, mille read ja veerud on märgendatud S elementidega. Elemendile s vastava rea ja elemendile t vastava veeru lõikekohta kirjutatakse korrutis $s * t$. Näiteks võime vaadelda poolrühmi $S = \{a, b, c\}$ ja $T = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$, mille Cayley tabelid on

$$\begin{array}{c|ccc} * & a & b & c \\ \hline a & a & a & a \\ b & a & b & c \\ c & a & c & b \end{array} \qquad \text{ja} \qquad \begin{array}{c|ccc} \cdot & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \hline \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{1} \end{array}.$$

Esimese tabeli esimesest reast näeme näiteks, et $a * c = a$ poolrühmas S.

Vaadake neid tabeleid veel korra. Kas näete nendes mingit sarnasust (lisaks sellele, et mõlema mõõtmed on 3×3)? Võib tähele panna, et tehes asendused

$$\begin{aligned} a &\mapsto \overline{0}, \\ b &\mapsto \overline{1}, \\ c &\mapsto \overline{2} \end{aligned}$$

saame esimesest tabelist teise. Sellises olukorras öeldakse, et vaadeldavad poolrühmad on isomorfsed. Täpne definitsioon on järgmine.

Definitsioon 1.3.3. Poolrühmi $(S, *)$ ja $(T, \circ)$ nimetatakse **isomorfseteks**, kui leidub bijektiivne kujutus $f : S \to T$ nii, et

$$f(s * s') = f(s) \circ f(s')$$

iga $s, s' \in S$ korral.

Niisiis eespool vaadeldud poolrühm $S = \{a, b, c\}$ on isomorfne poolrühmaga $T = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$, kusjuures vajalik bijektsioon $f : S \to T$ on just see, mille me eespool defineerisime. Märgime veel, et poolrühm T ei ole siin mitte midagi muud kui jäägiklassiringi $\mathbb{Z}_3$ multiplikatiivne poolrühm.

Iga algebraisti unistus on kirjeldada ära teda huvitavad algebralised struktuurid isomorfismi täpsuseni. Mõnikord on see võimalik. Näiteks iga n-mõõtmeline vektorruum üle korpuse K on isomorfne vektorruumiga K^n ja iga lõplik kommutatiivne rühm on isomorfne jäägiklassirühmade otsesummaga. Samas kõiki rühmi ja ammugi mitte kõiki poolrühmi ei ole võimalik isomorfismi täpsuseni ära kirjeldada. Siit tekib mõte, et ehk võiks defineerida kõigi poolrühmade klassil mingi ekvivalentsiseose, mis on nõrgem kui isomorfsuse seos, ja uurida siis ekvivalentsiklasse selle seose järgi. Eeldatavasti peaks samas ekvivalentsiklassis olevate poolrühmade omadused olema sarnasemad, kui erinevates klassides olevate poolrühmade omad. Üheks selliseks sobivaks ekvivalentsiseoseks on Morita ekvivalentsuse seos.

Morita ekvivalentsus

Morita teooria sai alguse jaapani matemaatiku Kiiti Morita (1915–1995) 1958. aastal ilmunud artiklist [7]. Selle kohaselt loetakse kahte ühikelemendiga ringi ekvivalentseteks, kui kõigi parempoolsete moodulite kategooriad üle nende ringide on ekvivalentsed. (Me ei hakka selles artiklis selgitama, mis on ring ja moodul või mida tähendab kategooriate ekvivalentsus.) Hiljem on seda teooriat laiendatud väga paljudele algebralistele struktuuridele, muuhulgas ühikelemendita ringidele, monoididele ja poolrühmadele.

Poolrühmade Morita ekvivalentsuse seose defineeris esimesena Sunil Talwar oma artiklis [9]. Selleks on vaja moodulite analooge, mida poolrühmade korral kutsutakse polügoonideks.

Definitsioon 1.3.4. Parempoolseks polügooniks üle poolrüma $(S, *)$ (ehk parempoolseks S-polügooniks) nimetatakse hulka A koos mingi kujutusega

$$A \times S \to A, \quad (a, s) \mapsto a \cdot s\,,$$

mis rahuldab tingimust

$$(a \cdot s) \cdot t = a \cdot (s * t)$$

iga $s, t \in S$ korral.

Poolrühmade Morita ekvivalentsus defineeritakse teatud omadusega polügoonide abil, seda omadust kutsutakse **püsivuseks** (inglise keeles *firmness*) ja see on defineeritud tensorkorrutiste abil, millest me ka siinkohal pikemalt rääkida ei taha.

Definitsioon 1.3.5. Poolrühmi S ja T nimetatakse **Morita ekvivalentseteks**, kui püsivate parempoolsete S-polügoonide kategooria on ekvivalentne püsivate parempoolsete T-polügoonide kategooriaga.

Kuna kategooriate ekvivalentsuse seos on ekvivalentsiseos, siis on kohe ilmne, et nii tekib ekvivalentsiseos kõigi poolrühmade klassil.

Kui lähtuda vahetult definitsioonist, siis on kahe poolrühma Morita ekvivalentsuse kontrollimine üldiselt väga keeruline: me peaksime näitama kahe lõpmatu kategooria ekvivalentsust. Õnneks on olemas terve rida Morita ekvivalentsusega samaväärseid tingimusi, mida teatud olukorras võib olla lihtsam kontrollida. Neist kuus tükki on ära toodud artiklites [5] ja [1]. Me ei jõua neid kõiki siin käsitleda, kuid illustratsiooniks teeme põgusalt juttu ühest tingimusest, mis on seotud poolrühmade laienditega.

Definitsioon 1.3.6. Poolrühma $(S, *)$ nimetatakse alampoolrühma U **laiendiks** (inglise keeles *enlargement*), kui $S = SUS$ ja $U = USU$, kus

$$SUS = \{s * u * s' \mid s, s' \in S, u \in U\}$$

ja

$$USU = \{u * s * u' \mid u, u' \in U, s \in S\}.$$

Definitsioon 1.3.7. Poolrühma S nimetatakse **faktoriseeruvaks**, kui iga tema element on mingi kahe elemendi korrutis.

Cayley tabeli keeles tähendab faktoriseeruvus seda, et kõik selle poolrühma elemendid peavad selles tabelis esinema. Faktoriseeruvate poolrühmade jaoks kehtib järgmine teoreem, mis järeldub artiklite [6] ja [4] tulemustest.

Teoreem 1.3.1. *Olgu poolrühm S alampoolrühma U laiend, kusjuures S ja U on faktoriseeruvad. Siis S ja U on Morita ekvivalentsed.*

See teoreem annab ühe piisava tingimuse Morita ekvivalentsuse kontrollimiseks, kusjuures siin ei ole enam vaja suurte kategooriatega mässata vaid piisab poolrühmas S elementidega arvutamisest.

Näide 1.3.2. Vaatleme poolrühmi, mis on antud Cayley tabelitega

$$U: \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad S: \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array}.$$

Kohe on näha, et U on poolrühma S alampoolrühm ja et mõlemad on faktoriseeruvad. Näitame, et S on U laiend (sellest järeldub nende Morita ekvivalentsus). Selleks peame kontrollima nelja sisalduvust. Sisalduvus $SUS \subseteq S$ on ilmne, sest kõik korrutised peavad kuuluma hulka S. Sisalduvus $USU \subseteq U$ ei ole ilmne, küll aga on selge, et $UUU \subseteq U$, sest U on alampoolrühm. Seega piisab näidata, et $u * 2 * u' \in U$ iga $u, u' \in U = \{0, 1\}$ korral. See on nii, sest

$$\begin{aligned} 0 * 2 * 0 &= 0 \in U, \\ 0 * 2 * 1 &= 0 \in U, \\ 1 * 2 * 0 &= 0 \in U, \\ 1 * 2 * 1 &= 1 \in U. \end{aligned}$$

Lisaks sellele

$$\begin{array}{ll} S \subseteq SUS, \text{ sest} & U \subseteq USU, \text{ sest} \\ 0 = 0 * 0 * 0 & 0 = 0 * 0 * 0 \\ 1 = 1 * 1 * 1 & 1 = 1 * 1 * 1. \\ 2 = 2 * 1 * 1 & \end{array}$$

Sellega oleme tõestanud, et $S = SUS$ ja $U = USU$, mis tähendab, et S on U laiend.

Viimastel aastatel on Valdis Laan ja Ülo Reimaa intensiivselt uurinud poolrühmade Morita ekvivalentsust koostöös László Márki ja Lauri Tardiga. Suuremat tähelepanu on pööratud Morita kontekstidele ja lõplikele poolrühmadele. Olulisemad tulemused on publitseeritud artiklites [2], [4] ja [3]. Muuhulgas artiklis [8] oleme tõestanud järgmise teoreemi.

Teoreem 1.3.2. *Leidub algoritm, mis suudab suvalise kahe lõpliku poolrühma korral kindlaks teha, kas nad on Morita ekvivalentsed või mitte.*

Ülo Reimaa ongi kirjutanud programmi, mis sellist algoritmi realiseerib. Kui võtta mingi naturaalarv n ja vaadelda kõiki omavahel mitteisomorfseid faktoriseeruvaid poolrühmi, kus elementide arv ei ole suurem kui n, siis piisava arvutusvõimsuse olemasolu korral suudaks see programm jagada kõik need poolrühmad Morita ekvivalentsi klassidesse. Hetkel on programmi abil leitud selline klassifikatsioon $n = 4$ jaoks ja järgmises paragrahvis toome selle ära $n = 3$ jaoks.

Klassifikatsioon

Anname siin paarikaupa mitteisomorfsete ülimalt 3-elemendiliste poolrühmade jaotuse Morita ekvivalentsi klassidesse. Poolrühmade elemente tähistame kõikjal sümbolitega $0, 1, 2$ ja korrutamistehe on antud Cayley tabeli abil. Nagu näha, neid klasse on 11 tükki.

Klass 1

	0
0	0

	0	1
0	0	0
1	0	0

	0	1
0	0	0
1	1	1

	0	1
0	0	1
1	0	1

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	0	0
2	0	0	0

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	0	0
2	0	0	1

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	0	0
2	2	2	2

	0	1	2
0	0	0	2
1	0	0	2
2	0	0	2

	0	1	2
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	2

	0	1	2
0	0	1	2
1	0	1	2
2	0	1	2

Siia klassi kuuluvad parajasti need ülimalt 3-elemendilised poolrühmad, mis rahuldavad samasust $xy = x$ või $xy = y$.

Klass 2

	0	1
0	0	0
1	0	1

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	1

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	0	0
2	0	1	2

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	0	2

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	0
2	2	2	2

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	0	0
2	0	0	2

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	2	2

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	1	2

	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	2
2	0	0	2

Selle klassi vähim esindaja on isomorfne poolrühmaga $(\mathbb{Z}_2, \cdot)$.

Klass 3

	0	1
0	0	1
1	1	0

	0	1	2
0	0	1	0
1	1	0	0
2	1	0	0

	0	1	2
0	0	0	2
1	0	0	2
2	2	2	0

Selle klassi vähim esindaja on isomorfne poolrühmaga $(\mathbb{Z}_2, +)$.

Klass 4

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	2

Klass 5

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	0
2	0	0	2

Klass 6

	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	2
2	2	2	0

Klass 7

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	2	2	2

Klass 8

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

Klass 9

	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	2
2	0	2	2

Klass 10

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

See poolrühm on isomorfne poolrühmaga $(\mathbb{Z}_3, \cdot)$.

Klass 11

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

See poolrühm on isomorfne poolrühmaga $(\mathbb{Z}_3, +)$.

Tänud

Uurimistööd on finantseerinud Eesti Teadusagentuur (PUT1519). Koostööd László Márkiga on toetanud Eesti ja Ungari Teaduste Akadeemiate vaheline teadlasvahetusprogramm. Suur tänu Ülo Reimaale, kes aitas palju kaasa artikli valmimisele.

Kirjandus

1. V. Laan, L. Márki, Strong Morita equivalence of semigroups with local units, *J. Pure Appl. Algebra*, **215** (2011), 2538–2546.

2. V. Laan, L. Márki, Ü. Reimaa, Morita equivalence of semigroups revisited: firm semigroups, *J. Algebra*, **505** (2018), 247–270.

3. V. Laan, L. Márki, Ü. Reimaa, Lattices and quantales of ideals of semigroups and their preservation under Morita contexts, *Algebra Univers.*, 81:24 (2020).

4. V. Laan, Ü. Reimaa, Morita equivalence of factorizable semigroups, *Internat. J. Algebra Comput.*, **29** (2019), 723–741.

5. M. V. Lawson, Morita equivalence of semigroups with local units, *J. Pure Appl. Algebra*, **215** (2011), 455–470.

6. M.V. Lawson, L. Márki, Enlargements and coverings by Rees matrix semigroups, *Monatsh. Math.*, **129** (2000), 191–195.

7. K. Morita, Duality of modules and its applications to the theory of rings with minimum condition, *Science Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sect. A6* (1958), 85–142.

8. Ü. Reimaa, V. Laan, L. Tart, Morita equivalence of finite semigroups, 2020, esitatud avaldamiseks.

9. S. Talwar, Morita equivalence for semigroups, *J. Austral. Math. Soc. (Series A)*, **59** (1995), 81–111.