Funktsiooniruumide/operaatorite interpolatsiooniteooria lühitutvustus

ANDI KIVINUKK
Tallinna Ülikool

1 Sissejuhatus

Kui Jaak Peetre (1935–2019) emeriteerus Lundi ülikoolis 2000. aastal - siis oli seal veel range kord, et 65. aastaseks saades peab seda tegema -, korraldasid tema lähedased erialakaaslased erinevatest asutustest (Tšehhi TA matemaatikainstituut, Luleå ülikooli matemaatika osakond, Lundi Tehnoloogia Instituudi/Lundi ülikooli matemaatika osakond, Technioni matemaatika osakond) rahvusvahelise konverentsi *Function spaces, Interpolation Theory, and Related Topics. International Conference in honour of Jaak Peetre on his 65th birthday: Lund, Sweden,* August 17-22, 2000. Konverentsi materjalid ilmusid kogumikus [1], mille artiklis *Jaak Peetre, the man and his work,* autorid Michael Cwikel, Lars-Erik Persson, Richard Rochberg ja Gunnar Sparr, kirjutatakse mh, et " paljudele meie hulgast on sõnad " interpolatsiooniruumid " ja " Jaak Peetre "peaaegu sünonüümid. "

Mälestuseks Jaak Peetrest tutvustame interpolatsiooni teemat ühel lihtsamal erijuhul populaarsel tasemel, aga püüdes anda edasi ikkagi asja olemust. Interpolatsiooniteooria tekkimise ajal 1960. aastail, peeti Peetret selles vallas nii oluliseks teadlaseks, et ta oli kutsutud esineja matemaatikute esindusfoorumil ICM Nice 1970. Peetre on senini üks kahest eestlasest, kes on saanud kutse ICM-l (International Congress of Mathematicians) ettekande pidamiseks. Teine eestlane on olnud Taivo Arak (1945 - 2007), ICM Berkeley 1986, kes töötas sel ajal Tallinna Polütehnilises Instituudis (praegu TTÜ), hiljem Göteborgi ülikoolis. Me refereerime Peetre ideid adapteeritult tema ICM Nice 1970 tehtud ettekande põhjal, mis on vormistatud artiklina [2]. Vahemärkusena ütleme, et Peetre esimene artikkel interpolatsiooni alal ilmus 1960. a. Järgnevas esituses kasutame osaliselt ka monograafiat [3] ning Mikko Salo (Helsingi ülikool) 2008. a peetud loengute materjale [4].

2 Ruumide/operaatorite interpolatsioon Fourier' ridade näitel

Operaatorite interpolatsiooniteooria on oluliselt teise tähendusega kui interpolatsioonipolünoomi määramine etteantud sõlmede abil. R. Kleisi jt " Võõrsõnade leksikon " Tln, 2000, annab " interpoleerima "(ld *interpolāre* uuendama, muutma) vasteks " vahele lükkima. " Matemaatika keeles tähendab siis, et kui mingis mõttes otspunktides on teatud info olemas, siis otspunktide vahele jääv info on ka kuidagi määratud (interpolatsioonipolünoom määrab info etteantud sõlmede vahel). Veidi täpsemalt, mõeldes operaatoritele: olgu meil operaator T mingis (Banachi) ruumis ja me teame selle operaatori kahte omadust, kuidas siis antud kahest omadusest tuletada uusi omadusi, mis mingis mõttes asuvad nende teadaolevate omaduste vahel. Operaatorite interpolatsiooniteooria klassikaline näide pärineb Fourier' analüüsist.

Olgu meil integreeruv funktsioon $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ ja vaatleme operaatorit T, mis seab funktsioonile f vastavusse selle Fourier' kordajad

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \tag{1.24}$$

On teada, et Fourier' kordajate jada $\{\hat{f}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ koondub (nulliks). Kui tähistame koonduvate jadade ruumi tähega c ja lõigul $[-\pi, \pi]$ integreeruvate funktsioonide ruumi sümboliga L^1, siis oleme saanud operaatori $T : L^1 \to c$. Nimetatud ruumid c ja L^1 on Banachi ruumid vastavalt normidega

$$\|\{a_n\}\|_c := \sup_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|, \quad \{a_n\} \in c,$$

$$\|f\|_p := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad f \in L^p; \tag{1.25}$$

L^1 norm on siin juhtum, kui $p = 1$.

Jada või funktsiooni norm on arvu absoluutväärtuse või ka vektori pikkuse üldistus, seda kasutatakse jada/funktsiooni iseloomustamiseks, kui jada üksikud indeksid või funktsiooni argumendid pole tähtsad. Vektorruumi A (erijuhul Banachi ruumi) elemendi $f \in A$ norm on defineeritud aksioomidega:

$$\begin{aligned} &1. \quad \|f\| \geq 0; \quad \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0, \\ &2. \quad \|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|, \quad \lambda \in \mathbb{R} (\in \mathbb{C}), \\ &3. \quad \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|, \quad f, g \in A. \end{aligned}$$

Kui aksioomi 1 asemel on

$$1'. \ \|f\| \geq 0,$$

siis on tegemist poolnormiga, kui 3. asemel on

$$3'. \ \|f + g\| \leq c(\|f\| + \|g\|), \quad c > 1, \tag{1.26}$$

siis on tegemist kvaasinormiga (c-kvaasinormiga). Näiteks ruumi L^p norm (1.25) on kvaasinorm, kui $0 < p < 1$ ja norm, kui $1 \leq p < \infty$, isegi juhul $p = \infty$ norm (1.25) vastava modifikatsiooniga on norm ja tekitab Banachi ruumi L^∞.

Fourier' kordaja võrdusest (1.24) järeldub vahetult (matemaatikaüliõpilaste I kursuse matemaatilise analüüsi materjal) võrratus

$$\|Tf\|_c = \|\{\hat{f}_n\}\|_c \leq \|f\|_1, \quad f \in L^1. \tag{1.27}$$

Võrratus (1.27) on operaatori $T : L^1 \to c$ n-ö ühe " otspunkti " info. Järgmise võrratuse jaoks defineerime ruumiga L^p analoogilise ruumi jadade jaoks:

me ütleme, et jada $\{a_n\}$ kuulub ruumi ℓ^p, kui (kvaasi)norm

$$\|\{a_n\}\|_p := \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^p \right)^{1/p}, \quad \{a_n\} \in \ell^p, \ 0 < p < \infty$$

on lõplik.

Järgmine, nn Besseli võrratus (II-III kursuse materjal)

$$\|Tf\|_2 = \|\{\hat{f}_n\}\|_2 \leq \|f\|_2, \quad f \in L^2 \tag{1.28}$$

on operaatori $T : L^2 \to \ell^2$ n-ö teise "otspunkti" info. Märgime, et esialgu defineeritud operaatorit $T : L^1 \to c$ saab tõesti käsitleda operaatorina $T : L^2 \to \ell^2$, sest kehtivad sisalduvused $L^q \subset L^p$ ja $\ell^p \subset \ell^q \subset c$, kui $1 \le p \le q$. Populaarselt kõneldes: kui operaator toimetab mingites suurtes ruumides, praegu ruumides L^1 ja c, siis ta peaks suutma toimetada ka nende alamruumides $L^2 \subset L^1$ ja $\ell^2 \subset c$.

"Otspunktide"vahepealne info sisaldub nn Hausdorffi-Youngi võrratuses (tavaliselt seda ei käsitleta matemaatilise analüüsi kursuses)

$$\|Tf\|_q = \|\{\hat{f}_n\}\|_q \le \|f\|_p, \quad f \in L^p, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad 1 < p \le 2. \tag{1.29}$$

Siit näeme, et need meie nimetatud "otspunktid" on määratud võrratustega $1 < p \le 2$. Tõesti, kui $p = 2$, siis Hausdorffi-Youngi võrratusest järeldub Besseli võrratus (kui $p = 2$, siis ka $q = 2$). Kui $p = 1$, siis loetakse tinglikult, et $q = \infty$ ja piirväärtusest $\lim_{q\to\infty} \|Tf\|_q = \|Tf\|_c$ saadakse siis võrratus (1.27). Kokkuvõtvalt, ainult valemitega:

kui

$$T : L^1 \to c \quad korral \quad \|Tf\|_c = \|\{\hat{f}_n\}\|_c \le \|f\|_1, \quad f \in L^1,$$

$$T : L^2 \to \ell^2 \quad korral \quad \|Tf\|_2 = \|\{\hat{f}_n\}\|_2 \le \|f\|_2, \quad f \in L^2,$$

siis

$$T : L^p \to \ell^q \quad jaoks \quad \|Tf\|_q = \|\{\hat{f}_n\}\|_q \le \|f\|_p, \;\; f \in L^p,$$
$$kusjuures \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \;\; 1 < p \le 2.$$

Siin on olemas operaatorid $T : L^1 \to c$ ja $T : L^2 \to \ell^2$ ning nende n-ö interpolatsioonioperaator $T : L^p \to \ell^q$, $1 < p \le 2$ (märgime, et kui $1 < p \le 2$, siis $2 \le q < \infty$); muuhulgas ka interpolatsiooniruumid on olemas, sest kehtivad sisalduvused

$$L^2 \subset L^p \subset L^1 \quad ja \quad \ell^2 \subset \ell^q \subset c.$$

Võrratused (1.27), (1.28) ja nende n-ö vahepealne võrratus (1.29) kokkuvõtvalt annab kirjeldada abstraktse skeemina, mis ongi interpolatsiooniruumide ja -operaatorite teooria põhisisu.

Olgu $A_0, A_1 \subset \mathcal{A}$ ja $B_0, B_1 \subset \mathcal{B}$ n-ö sobivad Banachi ruumide paarid, sisestatud mingisse suuremasse ruumi, näiteks Hausdorffi topoloogilisse vektorruumi, siin tähistatud siis tähtedega $\mathcal{A}, \mathcal{B}$. Siis võib püstitada probleemi:

iga $\theta \in (0,1)$ jaoks leida ruumide A_0, A_1 n-ö interpolatsiooniruum $A_\theta\,(A_1 \subset A_\theta \subset A_0)$ ja ruumide B_0, B_1 interpolatsiooniruum $B_\theta\,(B_1 \subset B_\theta \subset B_0)$ selliselt, et kui mingi pideva lineaarse operaatori korral kehtivad

$$T : A_0 \to B_0, \quad T : A_1 \to B_1,$$

siis kehtib ka

$$T : A_\theta \to B_\theta.$$

Esitatud probleemil on erinevad üldistuse astmed (nt Banachi ruumide asemel võib vaadata kvaasi-Banachi ruume, meetrilisi ruume, normeeritud Abeli rühmi, isegi lokaalselt kumeraid vektorruume jne) ja erinevad lahendamise teed. Jaak Peetre (ja tema õpilased-koolkond) on tegelenud mitmete üldistustega, aga tema suur teene selles vallas on, et ta leiutas nn (Peetre) K-funktsionaali (ja mitte ainult!), mis võimaldab üsna laiadel eeldustel lahendada efektselt interpolatsiooni probleemi.

3 Peetre K-funktsionaal

Meie teemaga seotud ideede selgitamiseks saame vältida abstraktseid ruume nagu Hausdorffi ruum, normeeritud Abeli rühmad vmt mõisted. Me oleme juba kasutanud sõnapaari Banachi ruum (III kursuse funktsionaalanalüüs), kuid selle definitsiooni me ei anna, vaid mõtleme nii, et iga meie antud teemaga seotud "mõistlik" ruum on selline või on see vähemalt kvaasi-Banachi ruum. Kvaasi-Banach erineb "päris"-Banachist selle poolest, et kolmnurga võrratuse aksioom on seal asendatud võrratusega (1.26). Käsitluse tehniliseks lihtsustamiseks eeldame edaspidi, et vaadeldavate ruumipaaride $(A_0, A_1), (B_0, B_1)$ jaoks kehtivad $A_1 \subset A_0, B_1 \subset B_0$. Sel juhul need eespool nimetatud Hausdorffi ruumid on A_0, B_0 ise. Toodud lihtsustus ei sega põhiideede selgitamist, küll aga ahendab oluliselt interpolatsiooniruumide rakendamisvõimalusi.

Definitsioon 1.2.1. *Olgu kvaasi-Banachi ruumide paari* (A_0, A_1) *elementide normid vastavalt* $\| \cdot \|_{A_0}, \| \cdot \|_{A_1}$. *Öeldakse, et kehtib ruumide* A_0, A_1 *pidev sisestus* $A_1 \subset A_0$, *kui lisaks hulkade sisaldavusele leidub konstant* $M > 0$, *et iga* $f \in A_1$ *korral kehtib võrratus* $\|f\|_{A_0} \leq M\|f\|_{A_1}$.

Vaatleme näidet, mis on ka edaspidi illustreerimas meie ideid.

Näide 1.2.1. *Olgu meil (fikseeritud lõigul* I *määratud) pidevate funktsioonide ruum* C *ja üks kord pidevalt difentseeruvate funktsioonide ruum* C^1, *mis on* C *alamruum (I kursuse matemaatiline analüüs: iga diferentseeruv funktsioon on pidev).* C *on Banachi ruum supreemum-normiga* $\|f\|_C := \sup_{x \in I} |f(x)|$ *(II-III kursuse funktsionaalanalüüs) ja* C^1 *on Banachi ruum normiga* $\|f\|_{C^1} := \|f\|_C + \|f'\|_C$. *Siin tuleb rõhutada, et mitte iga norm ei sobi (kvaasi-)Banachi ruumi jaoks, aga siintoodud* $\|f\|_{C^1}$ *on just väga hea. Ilmselt* $\|f\|_C \leq \|f\|_{C^1}$ *ja seega sisestus* $C^1 \subset C$ *on pidev.*

Liigume nüüd abstraktse interpolatiooniteooria suunas.

Definitsioon 1.2.2. *Olgu* $A_1 \subset A_0$, *mõlemad kvaasi-Banachi ruumid. Ütleme, et* (A_0, A_1) *on interpolatsiooniruumide paar, kui leidub kvaasi-Banachi ruum* $A_\theta, 0 < \theta < 1$, *nii et kehtib* $A_1 \subset A_\theta \subset A_0$ *pideva sisestusega.*

Tähistuste pärast esitame lineaarse operaatori normi definitsiooni.

Definitsioon 1.2.3. *Olgu* A *ja* B *kvaasi-Banachi. Siis operaatori (lineaarse teisenduse)* $T : A \to B$ *kvaasinormiks nimetatakse suurust*

$$\|T\| := \|T\|_{[A,B]} := \sup_{0 \neq f \in A} \frac{\|Tf\|_B}{\|f\|_A}.$$

Kui $\|T\| < \infty$, *siis nimetatakse operaatorit* T *tõkestatuks.*

Definitsioonist järeldub, et iga $f \in A$ korral kehtib võrratus $\|Tf\|_B \leq \|T\|\|f\|_A$, seega võrratustes (1.27), (1.28), (1.29), esinevate operaatorite normid on kõik ≤ 1.

Definitsioon 1.2.4. *Olgu $A_1 \subset A_0, B_1 \subset B_0$, ja kõik on kvaasi-Banachi ruumid. Olgu $(A_0, A_1), (B_0, B_1)$ kaks interpolatsiooniruumide paari ja leidugu tõkestatud operaator, mille korral $T: A_0 \to B_0$ ning $T: A_1 \to B_1$. Kui operaator $T: A_\theta \to B_\theta$ $(0 < \theta < 1)$ on tõkestatud, siis seda nimetatakse interpolatsioonioperaatoriks. Kui peale selle, mingi $C_\theta > 0$ korral, kehtib*

$$\|T\|_{[A_\theta, B_\theta]} \leq C_\theta \|T\|^{1-\theta}_{[A_0,B_0]} \|T\|^{\theta}_{[A_1,B_1]},$$

siis nimetatakse operaatorit T θ-tüüpi olevaks.

Interpolatsiooniruumide leidmiseks on meetod, mille põhisisu seisneb nn (Peetre) K-funktsionaali kasutamises.

Definitsioon 1.2.5. *Kvaasi-Banachi ruumide paari (A_0, A_1) $(A_1 \subset A_0)$ elemendi $f \in A_0$ K-funktsionaaliks nimetatakse reaalarvu*

$$K(f,t) := K(f,t; A_0, A_1) := \inf_{g \in A_1} (\|f - g\|_{A_0} + t\|g\|_{A_1}), \quad t \geq 0.$$

Edaspidiseks toome eraldi välja definitsioonist järelduva võrratuse. Olgu fikseeritud $f \in A_0$ ja $t > 0$, siis iga $g \in A_1$ jaoks kehtib

$$K(f,t) \leq \|f - g\|_{A_0} + t\|g\|_{A_1}, \quad g \in A_1. \tag{1.30}$$

Funktsionaali mõte on, et $K(\cdot, t)$ on iga $t > 0$ korral ruumi A_0 kvaasinorm ja ekvivalentne esialgse kvaasinormiga $\|\cdot\|_{A_0}$, mis tähendab, et iga $f \in A_0$ jaoks kehtivad võrratused

$$\min(1, \frac{1}{M}) \min(1,t)\|f\|_{A_0} \leq K(f,t) \leq \|f\|_{A_0}, \tag{1.31}$$

kus konstant $M > 0$ on ruumide $A_1 \subset A_0$ sisestuse võrratusest $\|g\|_{A_0} \leq M\|g\|_{A_1}$.

Siin (1.31) parempoolne võrratus järeldub võrratusest (1.30), kui seal võtta $g = 0$. Vasakpoolse võrratuse tõestuseks kasutame normi kohta käivat üldist võrratust

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x \pm y\|$$

ja sisestuse võrratust. Kui näiteks $0 < t \leq 1, M \geq 1$ (teised juhud tõestatakse analoogiliselt), siis saame

$$t\|f\|_{A_0} \leq t\|f-g\|_{A_0} + tM\|g\|_{A_1} \leq M(\|f-g\|_{A_0} + t\|g\|_{A_1}), \quad g \in A_1.$$

Nüüd paremal võtame $\inf_{g \in A_1}$, mis annab

$$\frac{1}{M} t\|f\|_{A_0} \leq K(f,t).$$

■

Funktsionaali nimetus seletub asjaoluga, et Peetrel olid kasutusel veel J-funktsionaal ja L-funktsionaal. Naljana võime kommenteerida, et poptäheks osutus K-funktsionaal, Peetre ise ütles kuskil intervjuus, et K-funktsionaalist on kujunenud tõeline "hitt". Nt monograafias [3], mille 6. pt on täielikult pühendatud K-funktsionaalile, on kirjutatud, et K-funktsionaali rakendamine interpolatsiooniruumide konstrueerimisel on peamiselt Jaak Peetre teene.

Lause 1.2.1. *(K-funktsionaali omadused) Olgu antud kvaasi-Banachi interpolatsiooniruumide paar* (A_0, A_1) $(A_1 \subset A_0)$.

1) Kui $f \in A_0$ *on fikseeritud, siis* $K(\cdot, t)$ *on positiivne, mittekahanev, pidev, kumer üles funktsioon argumendist* $t > 0$.

2) Kui ruumid A_0, A_1 *mõlemad on c-kvaasinormiga, siis* $K(\cdot, t)$ *on c-kvaasinorm ruumis* A_0.

Tõestus. 1) $K(\cdot, t)$ positiivsus ja mittekahanevus on definitsiooni põhjal ilmsed, pidevus on intuitiivselt usutav. Tõestame üles kumeruse. Kui korrutada võrratust (1.30) arvuga $0 < \lambda < 1$ ja teine kord sama võrratust, aga juhul $t = u$, arvuga $1 - \lambda$ ning tulemused liita, siis saame võrratuse

$$\lambda K(f,t) + (1-\lambda)K(f,u) \leq \|f-g\|_{A_0} + (\lambda t + (1-\lambda)u)\|g\|_{A_1}, \; g \in A_1.$$

Kuna see kehtib iga $g \in A_1$ korral ja vasakpool ei sõltu elemendist g, siis võttes paremal $\inf_{g\in A_1}$, saame K-funktsionaali definitsiooni põhjal

$$\lambda K(f,t) + (1-\lambda)K(f,u) \leq K(f, \lambda t + (1-\lambda)u),$$

mis tõestabki kumeruse üles.

2) Normi aksioomi 1 jaoks saame $f = 0 \in A_1 \subset A_0$ korral $K(0,t) = \inf_{g\in A_1}(\|g\|_{A_0} + t\|g\|_{A_1})$, kus infiimum saavutatakse väärtusega $K(0,t) = 0$ juhul $g = 0$. Kui $K(f,t) = 0$, $t > 0$, siis võrratuste (1.31) vasaku osa tõttu saame $\|f\|_{A_0} = 0$, aga kuna viimane on norm, siis seega $f = 0$. Aksioomi 2 tõestuseks võtame võrratuses (1.30) elemendi $\lambda g \in A_1$, st saame

$$K(\lambda f,t) \leq (\|\lambda f - \lambda g\|_{A_0} + t\|\lambda g\|_{A_1}) = |\lambda|(\|f-g\|_{A_0} + t\|g\|_{A_1}),\ g \in A_1.$$

Võttes siin paremal $\inf_{g\in A_1}$, saame

$$K(\lambda f, t) \leq |\lambda| K(f,t),$$

millest $\lambda \neq 0$ korral tuleneb

$$K(f,t) = K(\frac{1}{\lambda}\lambda f, t) \leq \frac{1}{|\lambda|}K(\lambda f, t).$$

Seega tõesti aksioom 2 kehtib. c-kvaasinormi kolmnurga võrratuse tõestuseks eeldame üldisemalt, et olgu ruumid A_j vastavalt c_j-kvaasinormiga ($j = 0,1$). Võtame võrratuses (1.30) funktsionaali $K(f_0 + f_1, t)$ uurimiseks elemendid $g = g_0 + g_1, g_0, g_1 \in A_1$. Saame

$$\begin{aligned} & K(f_0 + f_1, t) \leq \|f_0 + f_1 - (g_0 + g_1)\|_{A_0} + t\|g_0 + g_1\|_{A_1} \\ \leq \quad & c_0(\|f_0 - g_0\|_{A_0} + \frac{c_1 t}{c_0}\|g_0\|_{A_1} + \|f_1 - g_1\|_{A_0} + \frac{c_1 t}{c_0}\|g_1\|_{A_1}), \end{aligned}$$

kus $g_0, g_1 \in A_1$. Siin paremal pool infiimumit võttes saame

$$K(f_0 + f_1, t) \leq c_0 \left(K(f_0, \frac{c_1 t}{c_0}) + K(f_1, \frac{c_1 t}{c_0}) \right), \tag{1.32}$$

millest juhul $c = c_0 = c_1$ järeldub $K(\cdot, t)$ c-kvaasinormi võrratus. ■

K-funktsionaali üks tõhusus on selles, et seda saab paljude funktsiooniruumide paaride (A_0, A_1) korral täpselt välja arvutada või vähemalt konstandi täpsusega hinnata. Toome siin ühe illustratiivse näite.

Näide 1.2.2. *Olgu* $A_0 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *elemendi* $f = (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *norm* $\|f\|_0 = \|(u, v)\|_0 = |u| + |v|$ *(võrdle normiga ruumis* ℓ^p *juhul* $p = 1$*) ja* $A_1 = \mathbb{R} \times \{0\}$ *normiga* $\|(s, 0)\|_1 = |s|, (s, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$. *Siis*

$$\begin{aligned} K(f,t) := K(f,t;A_0,A_1) : &= \inf_{s\in\mathbb{R}} (\|(u,v)-(s,0)\|_{A_0} + t\|(s,0)\|_{A_1}) \\ &= \inf_{s\in\mathbb{R}} (|u-s| + |v| + t|s|). \end{aligned}$$

Kuna funktsioon $I(s) := |u - s| + |v| + t|s|$ *on pidev ja kumer alla, siis selle miinimum võib olla punktides* $s = 0, s = u$. *Nii saame, et*

$$K(f,t;\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R}\times\{0\}) = \min(1,t)|u| + |v|, \quad f = (u,v) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}.$$

4 Ruumide/operaatorite intepoleerimine

Osutub (selle "osutumise" taga on suur teooria, me vaatame lihtsat erijuhtu, kus kvaasi-Banachi ruumide paari (A_0, A_1) jaoks eeldame pidevat sisestust $A_1 \subset A_0$), et sobivaks interpolatsiooniruumiks on järgmises definitsioonis esitatav ruum.

Definitsioon 1.2.6. *Määrame paari* (A_0, A_1), $A_1 \subset A_0$, *jaoks ruumi* $A_{\theta,q} := (A_0, A_1)_{\theta,q}$, $0 < \theta < 1$, $0 < q \le \infty$, *mis koosneb elementidest* $f \in A_0$, *mille jaoks suurus*

$$\begin{aligned} \|f\|_{\theta,q} &:= \left(\int_0^\infty [t^{-\theta}K(f,t)]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}, \quad 0 < q < \infty, \\ &:= \sup_{0\le t<\infty} t^{-\theta}K(f,t), \qquad q = \infty \end{aligned} \tag{1.33}$$

on lõplik.

Siin θ on peamine interpolatsiooni parameeter, q on selleks mängus, et funktsiooniruumide L^q vajadusi rahuldada. Käesolevas populaarses ülevaates käsitleme ainult juhtumit $q = \infty$. Funktsiooniruumide L^q käsitlemine on vajalik nn Besovi ruumide uurimiseks, viimased on tähtsad osatuletistega diferentsiaalvõrrandite teoorias.

Teoreem 1.2.1. *(Ruumide interpolatsioonist) (vrd [3], pt 6, teoreem 7.1) Olgu* (A_0, A_1) *interpolatsiooniruumide paar,* $0 < \theta < 1$ *ja* $0 < q \leq \infty$. *Siis* $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ *on kvaasi-normeeritud ruum ja kehtivad pidevate sisestustega sisalduvused*

$$A_1 \subset (A_0, A_1)_{\theta,q} \subset A_0.$$

Tõestus. Tõestame ainult juhtumi $q = \infty$, kui $0 < q < \infty$, siis on vaja kasutada ruumi L^q spetsiifilisi omadusi.

1) Näitame, et

$$\|f\|_{\theta,\infty} = \sup_{0\leq t<\infty} t^{-\theta} K(f, t)$$

on kvaasinorm nagu aksioomidega 1, 2 ja 3' nõutud. Võrratus $\|f\|_{\theta,\infty} \geq 0$ on ilmne, samuti on selge, et $\|0\|_{\theta,\infty} = 0$, sest $K(0, t) = 0$. Vastupidi, kui $\|f\|_{\theta,\infty} = 0$, siis ka $K(f, t) = 0$, viimane on aga lause 1.2.1 põhjal kvaasinorm ning seega $f = 0$. Homogeensuse aksioomi 2 rahuldab K-funktsionaal lause 1.2.1 põhjal, seega ka $\|\cdot\|_{\theta,\infty}$ on homogeenne. Kvaasi-normi võrratuse tõestuseks kasutame võrratust (1.32), mistõttu saame

$$\begin{aligned}
\|f_1 + f_2\|_{\theta,\infty} &= \sup_{0\leq t<\infty} t^{-\theta} K(f_1 + f_2, t) \\
&\leq c_0 \sup_{0\leq t<\infty} t^{-\theta} K(f_1, \frac{c_1 t}{c_0}) + c_0 \sup_{0\leq t<\infty} t^{-\theta} K(f_2, \frac{c_1 t}{c_0}) \\
&= c_0 \sup_{0\leq u<\infty} (\frac{c_0}{c_1} u)^{-\theta} K(f_1, u) + c_0 \sup_{0\leq u<\infty} (\frac{c_0}{c_1} u)^{-\theta} K(f_2, u).
\end{aligned}$$

Siit järeldub

$$\|f_1 + f_2\|_{\theta,\infty} \leq c_0 (\frac{c_1}{c_0})^{\theta} (\|f_1\|_{\theta,\infty} + \|f_2\|_{\theta,\infty}).$$

2) Näitame pideva sisestusega sisalduvuse $A_1 \subset (A_0, A_1)_{\theta,\infty}$. Võtame $g \in A_1$, siis definitsioonist 1.2.5 järeldub $K(g,t) \leq t\|g\|_{A_1}$ ja kvaasi-normide üldisest võrratusest (1.31) ning sisestusest $A_1 \subset A_0$ järeldub $K(g,t) \leq \|g\|_{A_0} \leq M\|g\|_{A_1}$. Saadud $K(g,t)$ hinnangutest hindame normi

$$
\begin{aligned}
\|g\|_{\theta,\infty} &= \sup_{0\leq t<\infty} t^{-\theta}K(g,t) \\
&= \max\left(\sup_{0\leq t\leq 1} t^{-\theta}K(g,t), \sup_{1<t<\infty} t^{-\theta}K(g,t)\right) \\
&\leq \max(\|g\|_{A_1}, M\|g\|_{A_1}) = \max(1,M)\|g\|_{A_1}.
\end{aligned}
$$

Tõestatud võrratusega on näidatud, et kui $g \in A_1$, siis $\|g\|_{\theta,\infty}$ on lõplik, st $g \in (A_0, A_1)_{\theta,\infty}$ ja toimib pidev sisestus $A_1 \subset (A_0, A_1)_{\theta,\infty}$.

3) Hulgateoreetiline sisalduvus $(A_0, A_1)_{\theta,\infty} \subset A_0$ on selge ruumi $(A_0, A_1)_{\theta,\infty}$ definitsiooni 1.2.6 põhjal. Pideva sisestuse tõestuseks võtame $f \in (A_0, A_1)_{\theta,\infty} \subset A_0$ ja (kvaasi)normi $\|f\|_{\theta,\infty}$ alt hindamiseks kasutame võrratuste (1.31) osa $\min(1, 1/M)\min(1,t)\|f\|_{A_0} \leq K(f,t)$. Nii saame

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{\theta,\infty} &= \max\left(\sup_{0\leq t\leq 1} t^{-\theta}K(f,t), \sup_{1<t<\infty} t^{-\theta}K(f,t)\right) \\
&\geq \min(1,1/M)\max\left(\sup_{0\leq t\leq 1} tt^{-\theta}\|f\|_{A_0}, \sup_{1<t<\infty} t^{-\theta}\|f\|_{A_0}\right) \\
&= \min(1,1/M)\|f\|_{A_0},
\end{aligned}
$$

millest järeldub $\|f\|_{A_0} \leq \max(1,M)\|f\|_{\theta,\infty}$. ■

Teoreem 1.2.2. *(Operaatorite interpolatsioonist) (vrd [3], pt 6, teoreem 7.1) Olgu* (A_0, A_1) *interpolatsiooniruumide paar ja* (B_0, B_1) *täielike kvaasi-normeeritud ruumide paar. Kui on operaator* $T : A_i \to B_i$ *normidega vastavalt* M_i, $(i = 0, 1)$, *siis operaator* T *teisendab ruumi* $A_{\theta,q}$ *ruumi* $B_{\theta,q}$ *normiga* $\leq M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}$ *iga* $0 < q \leq \infty$ *ja iga* $0 < \theta < 1$ *korral.*

Tõestus. Olgu $f \in (A_0, A_1)_{\theta,\infty} \subset A_0$, siis teoreemi eelduse ja teoreem 1.2.1 põhjal $Tf \in (B_0, B_1)_{\theta,\infty} \subset B_0$. K-funktsionaali definitsioonis

$$K(Tf,t) = \inf_{g\in B_1}(\|Tf-g\|_{B_0} + t\|g\|_{B_1}), \quad t \geq 0$$

kasutame B_1 alamruumi $B' := \{g \in B_1 \mid Th = g, h \in A_1\}$. Seega saame, arvestades veel operaatori normi mõistet,

$$\begin{aligned} K(Tf,t) &\leq \inf_{h\in A_1}(\|Tf-Th\|_{B_0} + t\|Th\|_{B_1}) \\ &\leq \inf_{h\in A_1}(M_0\|f-h\|_{A_0} + tM_1\|h\|_{A_1}) \\ &= M_0 \inf_{h\in A_1}(\|f-h\|_{A_0} + t\frac{M_1}{M_0}\|h\|_{A_1}) = M_0K(f, M_1t/M_0). \end{aligned}$$

Niisiis ülal tõestatud võrratusest järeldub

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{(B_0,B_1)_{\theta,\infty}} &= \sup_{0\leq t<\infty} t^{-\theta}K(Tf,t) \leq M_0 \sup_{0\leq t<\infty} t^{-\theta}K(f, M_1t/M_0) \\ &= M_0 \sup_{0\leq u<\infty}(M_0u/M_1)^{-\theta}K(f,u) \\ &= {M_0}^{1-\theta}{M_1}^{\theta}\|f\|_{(A_0,A_1)_{\theta,\infty}}. \end{aligned}$$

■

5 Pidevate ja pidevalt difentseeruvate funktsioonide ruumide interpoleerimine

Toodud abstraktsete teoreemide rakendusena vaatame pidevate funktsioonide (mis määratud fikseeritud lõigul I) ruumi C ja üks kord pidevalt difentseeruvate funktsioonide ruumi $C^1 \subset C$, nagu on kirjeldatud näites 1.76. C on Banachi ruum supreemum-normiga $\|f\|_C$ ja C^1 on Banachi ruum normiga $\|f\|_{C^1} := \|f\|_C + \|f'\|_C$. Meie eesmärk on kirjeldada paari (C, C^1) interpolatsiooniruume eelmise teoreemi valguses. Paari (C, C^1) K-funktsionaal definitsioonist 1.2.5 (pärast väikest modifikatsiooni, eriti arvestades, et $C^1 \subset C$) on kujul

$$K(f,t) := K(f,t;C,C^1) := \inf_{g\in C^1}(\|f-g\|_C + t\|g'\|_C), \quad t \geq 0.$$

Paari (C, C^1) uurimiseks on vaja teha eeltööd, mis ühtlasi selgitab, milles seisneb K-funktsionaali tähelend. Matemaatilises analüüsis (funktsioonide lähendusteooria, diferentsiaalvõrrandid, funktsionaalanalüüs jne) on tähtis Lipschitzi klassi funktsioonid.

Definitsioon 1.2.7. *Öeldakse, et funktsioon* $f \in C$ *kuulub Lipschitzi klassi* $Lip\,\theta$, $(0 < \theta \leq 1)$, *kui leidub konstant* $M > 0$, *et iga* $x, x+t \in I$, $t > 0$ *korral kehtib võrratus*

$$|f(x+t) - f(x)| \leq Mt^{\theta}.$$

Definitsiooni põhjal selge, et $Lip\,\theta \subset C$. Lipschitzi ja teisi sellega sarnaseid klasse aitab kirjeldada matemaatilise analüüsi oluline mõiste pidevusmoodul.

Definitsioon 1.2.8. *Funktsiooni* $f \in C$ *pidevusmooduliks nimetatakse suurust*

$$\omega(f, \delta) := \sup_{|t| \leq \delta, x, x+t \in I} |f(x+t) - f(x)|, \quad \delta > 0.$$

Definitsioonide 1.2.7 ja 1.2.8 võrdlemisel näeme, et

$$f \in Lip\,\theta \quad \text{parajasti siis, kui} \quad \omega(f, t) \leq Mt^{\theta}. \tag{1.34}$$

Et edaspidi mitte tegeleda liiga palju erinevate konstantidega, siis loeme kahte funktsiooni f, g ekvivalentseteks konstandi täpsusega, kirjutame $f \asymp g$, kui leiduvad argumendist $x \in I$ sõltumatud konstandid $M, m > 0$, et

$$m|f(x)| \leq |g(x)| \leq M|f(x)|.$$

K-funktsionaali suur populaarsus seisneb järgmises teoreemis: selles on toodud kõige lihtsam erijuhtum paljudest seni teadaolevatest ekvivalentsustest, kus käsitletakse tohutul arvul erinevaid pidevusmooduli ja K-funktsionaali variante (vt nt [3], pt 6, teoreemid 2.4, 6.2). Pidevusmooduli definitsioonist näeme, et see nõuab argumendi nihkeoperaatori mõistet $\tau_t f(x) := f(x+t)$, $x, x+t \in I$, aga K-funktsionaal toimib ilma nihkeoperaatorita, mis on suur eelis abstraktses ruumis töötamiseks.

Teoreem 1.2.3. *([3], pt 6, teoreem 2.4) Iga $f \in C$ ja iga $t > 0$ korral kehtib ekvivalentsiseos*

$$K(f, t; C, C^1) \asymp \omega(f, t),$$

kusjuures ekvivalentsis esinevad konstandid ei sõltu funktsioonist f ega parameetrist t.

Teoreemi 1.2.1 rakendamiseks paarile (C, C^1) on vaja uurida normi (1.33). Kuna C norm on teatud mõttes suguluses L^∞ normiga, mis esineb normi (1.33) definitsioonis juhul $q = \infty$, siis uurime (kvaasi)normi $\|f\|_{\theta,\infty} = \sup_{0 \leq t < \infty} t^{-\theta} K(f, t)$. See on lõplik, kui $K(f, t) \asymp t^\theta$, ehk teoreem 1.2.3 põhjal, kui $\omega(f, t) \asymp t^\theta$. Nüüd aga seose (1.34) tõttu on viimane ekvivalentsiseos õige parajasti siis, kui $f \in Lip\,\theta$.

Sellega oleme teoreem 1.2.1 järeldusena saanud, et paari (C, C^1) interpolatsiooniruumid on $Lip\,\theta$, $0 < \theta \leq 1$ ja sisalduvusena

$$C^1 \subset Lip\,\theta \subset C \quad (0 < \theta \leq 1).$$

Tulemus ühtib hästi Lipschitzi klassi kohta teadaoleva võrdusega $Lip\,1 = C^1$, mis järeldub Lagrange'i keskväärtusteoreemi rakendamisest definitsioonis 1.2.7 (I kursuse matemaatiline analüüs). Sõnadega öelduna: Lipschitzi klass $Lip\,\theta$ iseloomustab funktsioone pidevuse skaalal $0 < \theta \leq 1$, mida suurem on θ, seda pidevam on funktsioon, ja kõige pidevamad neist on pidevalt diferentseeruvad.

6 Lõpetuseks

Me oleme näidanud ühe üldise skeemi, kuidas antud ruumide paari (A_0, A_1) $(A_1 \subset A_0)$ jaoks saab konstrueerida nn interpolatsiooni ruume $(A_0, A_1)_{\theta,q}$, nii et $A_1 \subset (A_0, A_1)_{\theta,q} \subset A_0$. Skeemi tähtsus on selles, et üldiselt ruum $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ kirjeldab uuritavat olukorda täpsemini, kui antud ruumide paar (A_0, A_1). Ilmekas näide on

$$C^1 \subset Lip\,\theta \subset C \quad (0 < \theta \leq 1).$$

Interpolatsiooniteooria antud lühitutvustuses pole võimalik esitada sisukamaid rakendusi. Mitmesuguste funktsiooniruumide käsitlemise üks oluline vajadus on osatuletistega diferentsiaalvõrrandite lahendite omaduste uurimises - keegi klassik on ütlenud: "Looduse raamat on kirjutatud diferentsiaalvõrrandite keeles." Ainult märksõnadena mainime siin üliolulisi ruume, mida saab käsitleda interpolatsiooniruumidena. Nimetame nt [3,4] Hölderi, Zygmundi, (murrulised) Sobolevi, Triebeli, (murrulised) Besovi jmt ruumid.

Kirjandus

1. *Function spaces, Interpolation Theory, and Related Topics. Proc. Intern. Conf. in honour of Jaak Peetre on his 65th birthday : Lund, Sweden, August 17-22, 2000* (Editors Michael Cwikel *et al*), Walter de Gruyter: Berlin, New York, 2002.

2. J. Peetre, Interpolation functors and Banach couples. In: *ACTES du CONGRÈS INTERNATIONAL des MATHÉMATICIENS (Nice, 1970)*, GAUTHIER-VILLARS, Paris, **2** (1971), 373–378.
https://www.mathunion.org/fileadmin/ICM/Proceedings/ICM1970.2/ICM1970.2.ocr.pdf

3. R. A. DeVore, G. G. Lorentz, *Constructive Approximation.* Springer-Verlag, 1993.

4. Mikko Salo, *Function Spaces.* (Loengukonspekt, Helsingi Ülikool) Sügissemester, 2008.
`http://users.jyu.fi/~salomi/lecturenotes/fsp08_lectures.pdf`