

Geomeetria-alastest temaatilistest ja rahvusvahelistest sidemetest Tartu Ülikoolis läbi aegade (In memoriam akad. Ülo Lumiste 1929–2017)

ELTS ABEL, KAARIN RIIVES-KAAGJÄRV
Tartu Ülikool, Eesti Maaülikool

Sissejuhatuseks

Oma elutöö Tartu ülikoolis teinud professor Ülo Lumiste sünnist möödus 30. juunil 2019. aastal 90 aastat. Tähistamaks akadeemik Ü. Lumiste sünniaastapäeva, korraldasid tema akadeemilised lapsed ja kolleegid ning lähisugulased mälestusürituse 28. juunil Tartus. Päev algas küünalde süütamisega Ü. Lumiste ning geomeetrite-eelkäijate ja juba lahkunud õpilaste haudadel Tartus Raadi kalmistul. Hiljem koguneti ettekandekoosolekule matemaatikute majja Liivi 2, kus möödusid Ülo Lumiste viimased tööaastad. Nii teadusringkondades kui Tartu ülikoolis tuntakse akadeemik Ülo Lumistet valdavalt tema põhilise uurimisvaldkonna – diferentsiaalgeomeetria alal tehtu ja oma sellealase koolkonna rajamise järgi. Vähem teatakse tema suurest panusest matemaatika arengu uurimisse Tartu ülikoolis alates juba selle rajamisest XVII sajandil. Seetõttu pööras põhiettekandja Kaarin Riives-Kaagjärv seekord põhilise tähelepanu geomeetria teaduse arengule Tartu ülikoolis läbi aegade ning Ülo Lumiste tegevusele selle ajaloo uurimisel ja arendamisel. Ü. Lumiste suurt panust Eesti matemaatikute ühendamiseks Eesti Matemaatika Seltsi (taas)loomise kaudu ning seltsi töö korraldamisel rõhutas oma lühiettekandes Mati Abel, geomeetria õppekavade arengust kesk- ja ülikoolides ning Ü. Lumiste mõjust nende reformimisele kõneles Rein Kolde, Ülo Lumistet kui armastatud õppejõudu ja austatud juhendajat meenutas Viktor Abramov. Mitmekesiste teadushuvide ja ühiskondlike kohustuste kõrvalt suutis Ü. Lumiste olla ka hoolitsev perekonnapea. Ettekandekoosolek lõppes Ü. Lumiste pere poolt koostatud pildiprogrammiga, mida täiendas

Ü. Lumiste pojapoeg Kaur Lumiste oma isiklike mälestustega vanaisast. Mälestusi ja meenutusi jagus mitmeks tunniks veel ka kohvilauas.



I rida vasakult: Silvia Lumiste, Reet Samel, Tunne Närep, Mati Abel, Inno Maasikas, Ellen Redi, Elts Abel

II rida vasakult: Kaarin Riives-Kaagjärv, Mati Väljas, Kalle Kaarli, Mart Abel, Rein Kolde, Viktor Abramov, Andi Kivinukk

Tuginedes Ü. Lumiste uurimustele ([1–2], [4–6]), pöörame alljärgnevas põhilise tähelepanu

- a) geomeetrilise mõtte arengu rahvusvaheliselt olulisematele momentidele Tartus;
- b) Tartus geomeetria alal koos Ülo Lumistega tegutsenud matemaatikute sidemetele teiste omaaegsete teaduskeskustega ja püüame näidata, kuidas nii probleemid kui uurimismeetodid ajaloost on leidnud olulise jätku aastakümneid hiljem nii Ülo Lumiste enda kui ka tema õpilaste töodes. Nüüdsetes oludes on siinsete kolleegide tööd leidnud ikka ja jälle rahvusvahelist tunnustust.

J. M. C. Bartels ja tema õpilased

Kahjuks on tänapäeval teadmiste valdkond, mida matemaatikaks nimetatakse, üsna ebapopulaarne. Ilmselt on raske teadvustada, kuivõrd matemaatilised teadmised ja teadussaavutused selles vallas on seotud meie igapäevaeluga. Kuid vajadus loendamise, olemasoleva jaotamise ja mõõtmisega seotu järele on viinud selle inimteadmiste valdkonna arenguni, mida me tänapäeval tunneme matemaatikana selle üsna hoomamatutes probleemides ja rakendustes. **Mõõtmisülesannetega** seotud tulemusi tunneme süstematiseerituna **Eukleidese** poolt juba III sajandist. Tänapäeval moodustab see nn Eukleidese geomeetria olulise osa kooligeomeetriast. Üheks meetodiks selle valdkonna kirjeldamisel on nn **aksiomaatiline meetod**, mille käigus fikseeritakse teatud laused-aksioomid kui faktid, mis tõestust ei vaja, ja tuletatakse neist loogiliste mõttekäikude abil terviklik teooria. Küsimuseks jääb, millised aksioomid seda mõistlikul viisil võimaldavad. Eukleidese geomeetria aksioomide süsteemi üheks murekohaks sai nn **viies aksioom**: *läbi punkti, mis asub väljaspool tasandil asuvat sirget, saab tõmmata ainult ühe antud sirgega paralleelse sirge*. Pikka aega püüti seda lauset tõestada. Kõik katsed ebaõnnestusid. Alles XVIII saj. lõpul selgus, et selle aksioomi eituse võimaldab samuti üles ehitada mõistliku geomeetrilise süsteemi. Seda ideena saksa matemaatiku **C. F. Gaussi** (1777–1855) ja realiseerituna 1826ndal aastal Venemaal Kaasanis **N. I. Lobatševski** (1792–1856) poolt. Pääegu samal ajal jõudis uue geomeetria ni ungari matemaatik **J. Bolyai** (1802–1860), kelle töö ilmus 1832. aastal. Algas nn mitte-eukleidiliste geomeetria ajastu. Tähelepanuväärne on, et nii C. F. Gauss kui ka N. I. Lobatševski olid 1821. aastal **Kaasanis** Tartu ülikooli matemaatika professori kohale asunud **J. M. C. Bartelsi** (1769–1836) õpilased. Nendega jäi Bartels suhtlema praktiliselt oma elu lõpuni. Kahjuks ei suutnud Bartels kaasa minna Lobatševski uuenduslike ideedega, kuid tema enda uurimistulemused Tartu perioodil on samuti märkimisväärsed. Bartelsi tööd käsitlevad matemaatilise analüüsi küsimusi ja nende rakendusi geomeetrias, mehaanikas ja tõenäosusteoorias. Kuigi ta valdavalt kirjeldas analüütilist geomeet-

riat tasandil ja ruumis, väärrib märkimist tema *suunakoosinuste süstemaatiline kasutamine* ja hästi läbimõeldud sümboolika neis töödes. Neid Bartelsi poolt nimetatud suunakoosinusi tunneme kaasaegses vektorkäsitluses ühikvektoritena. Oma oluliste ideede laiema tunnustatuse võlgneb Bartels oma Tartu õpilastele **C. J. Senffile** (1804–1832) ja eriti tema nooremale vennale **C. E. Senffile** (1810–1850). Vennad Senffid esitasid Bartelsi ideed ja nende omapoolsed edasiarendused oma töödes.

Vahemärkusena olgu lisatud, et vendade Senffide isa C. A. Senff (1770–1838) oli Tartu ülikooli joonestamise ja graveerimise professor. Tema raamat „Geomeetriline joonestamisõpetus“ sisaldab kujutava geomeetria elemente. See eriti tehnikavaldkondi puudutav geomeetria haru oli sel ajal just kujunemisejärgus. Selle sisuks on võimalikud projitseerimise meetodid ühest ruumist teise. Lihtsaimal juhul ruumist tasandile, nagu näiteks kunstis oluline tsentraal- või tehnikas vajalik paralleelprojektsioon. Tartus pöördusid vastavate probleemide lahendamise juurde sadakond aastat hiljem Jaan Sarv (1877–1954), Arnold Humal (1908–1988), Alma Ruubel (1899–1990).

Pöördudes tagasi Bartelsi ja eriti tema õpilase C. E. Senffi juurde, on oluline nimetada 1830. aastal viimase poolt esitatud ülikooli lõputööd „Kõverate ja pindade teooria põhiteoreemid“. See Bartelsi juhendamisel valminud töö on esimene *diferentsiaalgeomeetria* tervikliku süstemaatilise esituse katse. Vastav ainevaldkond oli eraldunud matemaatilise analüüsi geomeetriliste rakenduste hulgast alles XIX sajandi alguses mitmete prantsuse matemaatikute tööde tulemusena. Uuele matemaatilisele distsipliinile andis kindlamad kontuurid C. F. Gaussi 1827. aastal ilmunud töö. Selles sõnastas ta pinna sisegeomeetria idee ja tõestas teoreemi täiskõveruse invariant-susest pinna painutamisel. C. E. Senffi tööle järgnevad diferentsiaalgeomeetria õpikud ilmusid alles aastakümnete pärast. Kuid Senffi pikka aega kasutusel olnud diferentsiaalgeomeetria õpiku tõelist *teaduslikku väärtust* ei osatud hinnata veel isegi D. J. Struiki ajal [3]. Selle on oma uurimistöös esile tõstnud alles Ülo Lumiste [2, 4]. Tänu temale räägitakse nüüd jooneteoorias *Bartels-Frenet*´

valemitest (avaldatud vastavalt 1831/1847. a.). Nimelt on C. E. Senff oma lõputöö baasil 1831. aastal trükitud raamatus kasutanud Bartelsi uuenduslikku joonte uurimismeetodit. Ruumilisi kõveraids kirjeldas Bartels nendega seotud liikuva teljestiku abil, uurides teljestiku muutumist punkti liikumisel mööda joont. Bartels oli leidnud jooneteooria põhivalemid, milleni Frenet jõudis alles 1847. aastal. Kirjeldatud meetodit nimetame tänapäeval *liikuva reeperi meetodiks* ja see meetod on olnud valdavaks **Ülo Lumiste** ja tema paljude õpilaste uurimistöös, kes alustasid tegevust XX sajandi teisel poolel.

Pärast ülikooli lõpetamist täiendas Senff end Saksamaal ja naasis Tartusse 1834. aastal. Peale Bartelsi surma jäi ta mõneks ajaks ainsaks matemaatika lektoriks ülikoolis ja kinnitati erakorraliseks professoriks 1837. aastal. Senffi enda põhilised teadustulemused kuuluvad geomeetrilise optika valdkonda.

Äramärkimist väärib veel üks Bartelsi õpilane **A. Kotelnikov** (1809–1879). Tema saabus Tartusse **Harkovist**. Aastal 1831 esitas ta Bartelsile kolm tööd, nende hulgas lõputöö „Pinna kõverusjoonest, kooldumisraadiustest, aga samuti kõverusmöödust“. Pärast mõningast täiendusperioodi Berliinis siirdus Kotelnikov **Kaasanisse**, kus jätkas 1838. aastast rakendusmatemaatika professorina. Temast sai Lobatševski lähim kolleeg. Ta oli üks vähestest, kes oskas hinnata Lobatševski loomingut viimase eluajal. Geograafilises mõttes oli ring täis saanud – Bartels saabus Tartusse Kaasanist ja tema õpilane suundus tööle Kaasanisse. Veidi rohkem kui sajand hiljem sõlmusid uued tugevad teadussidemed Kaasanis tegutsenud ja Tartus tekkinud geomeetria koolkondade vahel juba temaatilisel tasemel. Ülo Lumiste kaitses Kaasanis 1968. aastal ka oma doktoritöö „Homogeensete kihtkondade seostuste teooria rakendustega homogeensete alamruumide geomeetrias“. Oponentideks olid sealsed professorid A. P. Širokov (1926–1998) ja B. L. Laptev (1905–1989) ning G. F. Laptev (1909–1972) Moskvast.

E. F. A. Minding ja tema õpilased

Üks silmapaistvamatest ja tunnustatumatest Tartu ülikoolis töötanud geomeetritest on 1843. aastal **Berliinist** Tartusse saabunud **E. F. A. Minding** (1806–1885). Ta oli juba Berliini perioodil avaldanud mitmeid olulisi töid pinnateooria alalt. Nende hulgas väärib märkimist uurimuste tsükkel 1840. aastast, millega ta rajas pindade painutamise teooria alused. Ta selgitas, millistel tingimustel ja mitmel viisil on üks pind painutatav teisele. Oma elu lõpuperioodil Tartus pöördus Minding tagasi noorusea probleemi juurde lühimast joonest pinnal, mis piirab antud pindala. Ta jõudis huvitavate tulemusteni *minimaalpindade* kohta. Minimaalpindade üldistustest – *semiparalleelsetest pindadest* enda ja oma õpilaste poolt saadud tulemused on **Ülo Lumiste** võtnud kokku monograafias „*Semiparallel Submanifolds in Space Forms*“, mis ilmus 2009. aastal [5]. Nii minimaalpindade kui ka mitut teist tüüpi eriomadustega pindade uurimine on Tartus jätkunud paljudes üldistatud ruumides (ruumivormides) nii **Ülo Lumiste** enda kui mitmete tema õpilaste töödes (**Rünno Mullari** (1931–1968), **Vano Mirzojan** (1948), **Kaarin Riives-Kaagjärv** (1942), **Aivo Parring** (1940–2015), **Inno Maasikas** (1944), **Mati Väljas** (1958), **Tõnis Virovere** (1957), **Elena Safiulina** (1972)). Tänapäevases terminoloogias on nimetatud autorid uurinud teatud *muutkondade eriomadustega alammuutkondi*. Huvitaval moel seostuvad sarnaste teemadega ka Eesti juurtega Ameerikas tegutsenud geomeetriaprofessori **Jaak Vilmsi** (1937) tulemused. Isiklik tutvus Jaak Vilmsiga sai Tartu seltskonnal teoks alles 1990ndatel aastatel, kuigi tema tööd olid siin tuntud juba varem. [Jaak Vilms sündis Viljandis Albert ja Else Vilmsi pojana. Ta kasvas üles Seabrooke’is ja pärast kõrgkooli töötas palju aastaid matemaatikaprofessorina Colorado riiklikus ülikoolis. Jaak kolis abikaasa Liiaga 2010. aastal Bostoni piirkonda ja elab nüüd Chestnut Hill’is, Massachusettsis – toimetaja märkus.]

Märkimist väärib ka Mindingu 1864. aastal välja antud töö, milles on käsitletud *diferentsiaalruutvormide* lihtsustamise võimalusi. Need puudutasid sisuliselt küsimusi Riemanni ruumidest

ajal, mil Riemanni ruumide ulatuslikumat teooriat polnud veel olemaski ja diferentsiaalvorme hakkasid sügavamalt uurima alles E. Beltrami 1869. aastal ja R. Lipschitz 1871. aastal teadmata midagi Mindingu tööst.

Tartus geomeetria vallas tuule tiibadesse saanud tunnustatud teadlaseks on **läti** päritolu Senffi ja Mindingu õpilane **K. Peterson** (1828–1881). Ta õppis Tartus aastail 1847–1852. Kuulanud Senffi ja Mindingu loenguid, koostas ta 1853. aastal uurimuse „Pindade painutamisest“, mis sisaldab pinnateooria olulisi tulemusi. Olude tõttu jäid need tähelepanuta, kuigi neid võib lugeda Tartu diferentsiaalgeomeetria keskuse silmapaistvaimate saavutuste hulka. Peterson siirdus tööle **Moskvasse**. Tema seal avaldatud uurimused äratasid laia tähelepanu ja nendega seoses pöörati teatavat tähelepanu ka sellele Tartus valminud tööle, kuid alles 1952. aastal avaldati see töö J. Sarve ja **Jaan Depmani** (1885–1970) venekeelses tõlkes. Siis selgus, et Peterson oli jõudnud pinnateooria kahe puuduva põhivõrrandi ja pinnateooria põhiteoreemini palju varem kui selleks ajaks klassikutena tunnustatud G. Mainardi, D. Codazzi ja O. Bonnet. Praegu nimetatakse neid olulisi võrrandeid **Peterson-Codazzi võrranditeks** (avaldatud vastavalt 1853/1868. a). Oma tegevusega Moskva Matemaatika Seltsi asutajaliikmena ja töödega seltsi väljaannetes võib Petersoni lugeda **Moskva diferentsiaalgeomeetria koolkonna** rajajaks. Selle koolkonna järeltulijaks on ka Ülo Lumiste ja tema õpilased, sest aastal 1953 siirdus Ülo Lumiste geomeetria-alasele täiendõppele Moskvasse, kus ta tutvus uute uurimismeetodite, nende hulgas **liikuva reeperi meetodiga**. Ülo Lumiste kandidaaditöö „ n -mõõtmelistest pindadest p -mõõtmeliste kaas- või asümptootiliste sihtide väljadega“ valmis 1958. aastal A. M. Vassiljevi (1923–1987) juhendamisel. Moskvast sai Vassiljevi juhendatavaks kümnekond aastat hiljem veel **Helgi Kilp** (1942–2019), kes jäi Tartusse naasnuna kogu oma tööajaks aktiivseks Tartu geomeetria koolkonna liikmeks.

Tagasi kaugemasse ajalukku. Mindingu juhendamisel Tartus oma lõputööd geomeetria alal teinud, kuid hiljem mujal teiste teemadega töötades tunnustust leidnud teadlastest võib nimetada

A. Harnackit (1851–1888) ja **P. Kadikut** (1857–1923). Harnack esitas oma lõputöö „Ellipsi pindala maksimumist ja miinimumist koonuslõigete kimpudes ja sidumites“ 1872. aastal. Suundunud tööle Erlangenisse, jätkas ta teiste teemadega. Aastal 1875 käsitles ta algebraliste joonte topoloogiat, kuid arvestatava tunnustuse saavutas Fourier´ ridade teooria vallas. Kadiku kandidaaditöö 1882. aastal oli pühendatud Eukleidese paralleelide aksioomile. Pärast enesetäiendust Peterburis leidis ta töökoha **Tomskis**. Seal ta teadaolevalt teadusega eriti ei tegelenud. Küll aga võib nimetada, et geomeetria huvilisi Tomski ülikoolis leidis ja 1960. aastal saabus sealt Tartusse aspirantuuri **Maido Rahula** (1936–2017). Tema juhendajaks sai Ü. Lumiste ja temast kujunes laias ilmas tunnustatud teadlane. Töötanud pikemat aega Alžeerias, Odessas ja viimased ligi 30 aastat Tartus, on tema õpilastest nii Odessas kui Tartus kujunenud väike koolkond.

Geomeetritest XIX sajandi teises pooles ja XX sajandil

Tartu diferentsiaalgeomeetria keskuse ühe olulise liikmena tuleb nimetada **T. Clausenit** (1801–1885), kes oli **Münchenist** Tartusse saabunud 1842. aastal. Ta on leidnud lahendusi mitmetele pinnateooria küsimustele. Nende hulgas on ta 1847. aastal esitanud seoseid pinnal defineeritud erinevate kõveruste vahel. Vastavad tulemused on tänapäeval nimetatud **Clausen-Bonnet´** teoreemideks (*avaldatud vastavalt 1847/1848. a*). Clauseni huvid olid mitmekülgsed, kuid üldiselt ei tegelenud ta püsivamalt kindla probleemi kallal, vaid pakkus teravmeelseid tõestusi mõnele teoreemile või lahendusi tema tähelepanu pälvinud ülesandeile. Palju lahendas ta konstruktsiooniülesandeid klassikalises seades, st pakkus välja ülesannete lahendusi sirkli ja joonlaua abil.

XIX sajandi lõpupoole vaheldusid matemaatika õppejõud Tartu ülikoolis sagedamini kui varem, aga geomeetrilise mõtte arengu seisukohalt võiks nende hulgast veel nimetada **O. Staudet** (1857–1928) ja **A. Kneserit** (1862–1937). Nad mõlemad saabusid Tartusse **Wroclavist**, Staude 1886. ja Kneser 1889. aastal. Staude

huvialaks olid II järku pindade niitkonstruktsioonid, mille kohta on ta avaldanud mitmeid töid (1882, 1886, 1895, 1896). Vastavad mudelid olid Tartu ülikoolis olemas veel eelmise sajandi 90ndail aastail. Kneser aga käsitles oma 1888.–1892. aastail avaldatud töödes *iseäraseid punkte* joonel, mis tekivad ruumilise joone projitseerimisel tasandile. Vastav temaatika kaasaegses käsitluses, see nn *katastroofide teooria* oli **Maido Rahula** jaoks põhiliseks uurimisobjektiks.

XIX sajandi lõpus Tartus uudseid küsimusi uurinud ja olulisi tulemusi saanud geomeetritest nimetagem siinkohal **F. Schuri** (1856–1932), kes kutsuti siia **Leipzigist** 1888. aastal. Tema töötas siin vaid 4 aastat ja oli juba Tartusse saabudes tunnustatud teadlane Riemanni ruumide uurimise alal. Kuid Tartus avaldas ta uurimused *pidevate teisenduste rühmade* teooria alustest, osutudes seega uue ainevaldkonna rajajaks. Mitmete ruumide teisenduste rühmade alamrühmi ja nende orbiite on käsitlenud ka **Ülo Lumiste** õpilased 1970ndatel aastatel (**K. Riives-Kaagjärv**, **Aleksander Fleischer** (1948)). Suuremaid üldistusi selles vallas on teinud Ülo Lumiste juhendamisel doktoritöö „Primitiivne toime ja Sophus Lie ülesanne“ Tartus 1991. aastal kaitsnud **Boris Komrakov** (1948).

Schuri teine huvide valdkond, mis Tartus alguse sai, oli *geomeetria aluste* uurimine. Selle kohta 1892. aastal avaldatud töös vaatles ta hulknurkade pindalade võrdsuse küsimust ja sellega seotud pidevuse aksioomi. Sellesse valdkonda kuulus juba eelpool nimetatud P. Kadiku töö 1882. aastast ja ka mõned Schuri õpilased, nagu näiteks **K. R. Kupffer** (1872–1935) jätkasid uuringuid sellel alal. Eesti Vabariigi Tartu ülikoolis XX sajandi 20–30ndail aastail ja hiljemgi tulid geomeetria aluseid puudutavate küsimuste juurde **Jaan Sarv**, **Jüri Nuut** (1892–1952), **Arnold Humal** ja omakorda **Ülo Lumiste** alates 1960ndaist. Tema pööras erilist tähelepanu vahelsuse mõistele ja liikumistele [6].

Sajandivahetusel XIX–XX olid Tartu ülikoolis matemaatika õppejõud peamiselt vene rahvusest. Geomeetria arengu seisukohalt võib ära märkida **V. Aleksejevit** (1866–1943), kes juba 1896. aastal **Moskvast** Tartusse saabununa oli huvitunud geomeetriast. Tal oli

avaldatud töid *joonteparvede geomeetriast* ja pärast lähetust Euroopasse kirjutas ta 1897. aastal töö *sirgjoonekongruentside* teooriast. Neil teemadel on hiljem uuringuid jätkanud Ülo Lumiste ise ja mitmed tema õpilased (**Leida Tuulmets** (1933), **Rein Kolde** (1938), **Els Abel** (1947)).

Tartu geomeetrite rahvusvahelistest sidemetest alates XX sajandi teisest poolest

Ülo Lumiste ümber kujunes Tartu Ülikoolis alates 1960ndate algusest väike geomeetria huviliste rühm – mõned aspirandid ja mõned üliõpilased, mis pikema aja jooksul üha laienes, tekitades nii väikese koolkonna. Tavatöö käis seminaride vormis, mille käigus tutvuti tol ajal arvukalt välja antavate välisautorite venekeelsete tõlgetega, mis aitasid kursis olla kaasaja uusimate uurimissuundade ja -meetoditega, arutati läbi oma uued tulemused teaduse vallas. Järjepanu kaitsti kandidaadidissertatsioone, osaleti nii Balti riikide (Eesti, Läti, Leedu) kui üleliidulistel konverentsidel, suvekoolides, Moskvast toimuvatel seminaridel. Sel viisil tekkis nn **Moskva–Kaasani koolkond**. Tartlased tegid selle piires tihedat koostööd vastavalt oma uurimissuundadele. See koostöö Moskva ja teiste geomeetriasse süvenenud kolleegidega **Leedust, Valgevenest, Armeenias, Gruusias** ja mujaltki kogu Nõukogude Liidust kestis kuni 1990ndate aastate alguseni, mil poliitilised olud selle praktiliselt katkestasid. Seni toimusid ühised konverentsid ja seminarid vähemalt kord aastas, sageli enamgi. Ilmusid mitmed ühistööna valminud kapitaalsed kogumikud seerias „Kokkuvõtte teadusest ja tehnikast. Küsimusi geomeetriast“ VINITI (keskse teadusliku informatsiooni instituudi) egiidi all.

Uutes tingimustes 1990ndate algusest alates avanes teadussidemeteks uus ja lai maailm. Tekkisid uued sidemed teiste maade teadlastega vastavalt individuaalsetele uurimisteedele. Koostöötoimus ja toimub siiani mitmes vormis – kas viibides pikemas komandeeringus külalislektorina või täiendusel, või osaledes konverentsidel, rääkimata tööde avaldamisest erialastes väljaannetes.

Siinkohal võib riikidest näiteks nimetada **Saksamaad** (Ü. Lumiste, A. Parring), **Belgiat** (Ü. Lumiste, M. Rahula, K. Riives-Kaagjärv), **Kreekat** (Ü. Lumiste, M. Rahula, E. Abel, K. Riives-Kaagjärv), **Itaaliat** (Ü. Lumiste, M. Rahula), **Slovakkia** (M. Rahula, K. Riives-Kaagjärv). Olulisel kohal on sidemed **Prantsusmaa** teadlastega, mis said kunagi alguse M. Rahula kontaktidest ja on jätkunud **Viktor Abramovi** (1956) ja tema õpilase, praeguse kolleegi **Olga Liivapuu** (1980) aktiivsel tegutsemisel senini. Neil on nüüd mõttekaaslasi nii **Rootsis** kui ka mitmeski eksootilises ja kauges riigis nagu **Hiina, Tuneesia, Brasiilia**.

Kokkuvõtteks

Umbes XIX sajandi 30ndaist aastaist töötas Tartus mitmeid matemaatikuid, kelle tööde tulemusena kujunes Tartu ülikool üheks teadusilmas tunnustatud diferentsiaalgeomeetria arengu keskuseks [3]. Tollaste kitsaste kommunikatsiooniolude tõttu jäid mitmed olulised siinsed saavutused siiski omal ajal laiemale teadusüldsusele tundmatuks. Seda enam tuleb olla tänulik Ülo Lumistele, kes need tulemused XX sajandi 60ndail aastail taasavastas ja spetsialistide ringkonnale sedavõrd teatavaks tegi, et nii mõnigi seni tunnustatud tulemus sai senise tuntud autori nime kõrval kandma ka Tartus tegutsenud autori nime nagu **Bartels-Frenet**´ valemid, **Clausen-Bonnet**´ teoreemid ja **Peterson-Coddazi** võrrandid.

Ülo Lumiste õpilaste hulgast on oma koolkonna rajanud Armeenias semiparalleelsete struktuuride üldistustega tegelev **Vano Mirzojan**, juba nimetatud **Maido Rahula** ja koostöös Ülo Lumistega *geomeetria rakendustest füüsikas* alustanud **Viktor Abramov**. Tema ja ta kaastöötajate uurimisvaldkonnaks on *mittekommutatiivne geomeetria ja sellega seotud probleemid: ternaarsed Lie algebrad ja superalgebrad, Nambu mehaanika superruumis*. Nagu eelpool mainitud, on neil praegu tihedad teadussidemed paljude maade teadlastega üle laia ilma.

Kirjandus

1. *Teaduse ajaloo lehekülgi Eestis I.* Kogumik, ENSV TA Loodusuurijate Selts, Valgus, Tallinn, 1968, 73–93.
2. *Teaduse ajaloo lehekülgi Eestis II.* Kogumik, ENSV TA Eesti Loodusuurijate Selts, Valgus, Tallinn, 1976, 36–66.
3. D. J. Struik, *Outline of a History of Differential Geometry.* Isis, v.19, 1933, 92–120, v. 20, 1934, 161–191, vene k.1941.
4. Ü. Lumiste, *Martin Bartels as Researcher: His Contribution to Analytical methods in Geometry.* Historia Mathematica, **24** (1997), 46–65.
5. Ü. Lumiste, *Semiparallel Submanifolds in Space Forms.* Springer, New-York, 2009.
6. Ü. Lumiste, *Foundations of geometry based on betweenness and flag-movements.* Mathematics studies 5, Estonian Mathematical Society, Tartu, 2009.