

Algebra Eestis 2014–2018

KALLE KAARLI

Tartu Ülikool

Käesolev ülevaade põhineb ettekandel, mille tegin 23. novembril 2018. aastal professor Gunnar Kangro 105. sünniaastapäevale pühendatud konverentsil *Algebra ja analüüsi meetodid IX*.

Pealkirjas toodud ajavahemik on Eesti algebra ajaloos märgiline, sest selle jooksul emeriteerusid kolm algebraprofessorit, kes olid oma karjääri alustanud dotsent JAAK HIONI õpilastena ja ligemale poole sajandi jooksul kujundanud algebraelu Eestis. MATI KILP innustus algebrast Hioni seminaris, aga jätkas haridusteed Moskva Riiklikus Ülikoolis, kus kaitses kandidaadikraadi professor L. Skornjakovi juhendamisel. PEETER PUUSEMP ja K.K. (nende ridade autor) kirjutasid oma kandidaadiväitekirjad Hioni juhendamisel Tartus. 2014. aasta algul emeriteerus ka Hioni õpilane TLÜ dotsent ELLEN REDI.

Samas võime nentida, et algebra on Eestis jätkuvalt elujõuline. Selleks annab alust 2016. a algul ametisse asunud professor VALDIS LAANE energiline ja viljakas tegevus.

Jätkusid traditsiooniks saanud rahvusvahelised kevadseminarid *Algebra ja tema rakendused* (2014 Mokko Jõgevamaal, 2015 Marguse Valgamaal, 2017 Taevaskoja, 2018 Tartu). Tõsi, viimane neist toimus erandina südasuvel. Jätkuvalt toimus ka koostöö Eesti ja Ungari teaduste akadeemiate teadlaste vahetusprogrammi raames. Osa võtsid Eesti poolt V. Laan, K.K., O. Košik ja Ü. Reimaa ning Ungari poolt L. Márki, T. Waldhauser ja S. Radeleczki. Märkin, et see koostöö sai alguse juba 1996. a K.K. ja LÁSZLÓ MÁRKI algatusel. Leping on pikendatud aastateks 2019–2021.

Järelkasvust rääkides tuleb mainida kahte uut doktorikraadiga algebraisti. OLEG KOŠIK kaitses 2015. a K.K. juhendatud väitekirja *Categorical equivalence in algebra* ning ÜLO REIMAA 2017. a V. Laane juhendatud väitekirja *Non-unital Morita equivalence in a*

bicategorical setting. Tõsi, esimene neist kahest noorest mehest on leidnud endale rakenduse väljaspool algebrat.

Kui jätame kõrvale ülalnimetatud emeriteerunud, kes loodetavasti pole oma viimast sõna uurijatena veel öelnud, siis hetkel on Eesti tegevalgebraistideks Valdis Laan (TÜ professor), ALAR LEIBAK (TTÜ dotsent), LAURI TART (TÜ teadur), Ülo Reimaa (TÜ teadur) ja PIRET PUUSEMP (TTÜ lektor).

Alustuseks teen kaks terminoloogilist kokkulepet. Esiteks, järjestuse all mõtlen alati seda, mida paljud matemaatikud nimetavad osaliseks järjestuseks. Teiseks, rääkides algebrast algebralise struktuuri tähenduses pean silmas universaalalgebrat.

Ülevaade uurimistulemustest võiks olla isikupõhine või teemapõhine. Käesolevas eelistan segavarianti, alustades vanema generatsiooni esindajatega isikupõhiselt ja lõpetades Valdis Laane uurimiserühmaga teemapõhiselt.

Mati Kilbi praktiliselt kogu uurimistöö saab paigutada ühisnimetaja *Monoidide homoloogiline klassifikatsioon* alla. Sealjuures on teda eriti paelunud monoidide klassifitseerimine polügoonide nn lamedusomaduste abil. Millalgi uue aastatuhande algul laiendas Kilp oma uurimistööd järjestatud monoididele. Aastal 2015 ilmus ajakirjas *Semigroup Forum* tema seni viimane teadusartikkel [4], milles ta kirjeldab järjestatud Cliffordi monoidid, üle mille kõik Rees'i faktorpolügoonid on teatud lamedusomadusega \mathbf{P}_w .

Peeter Puusemp on alates kandidaaditööst uurinud rühmade endomorfismipoolrühmi. Viimastel aastakümnetel on ta peamiselt huvitunud küsimusest, kuivõrd on rühma ehitus määratud tema endomorfismipoolrühma poolt. Erijuhul tähendab see küsimust, kas endomorfismipoolrühm määrab antud rühma (isomorfismi täpsuseni).

Vaadeldaval perioodil ilmus Puusempi sulest seitse teadusartiklit, neist kolm koos Alar Leibakuga ja kolm koos tütre Piretiga. Toome siin välja mõned tähtsamad tulemused.

Seni oli teada, et rühmade seas, mille järk alla 36, kuid mitte 32, on ainult üks paar mitteisomorfseid rühmi, mille

endomorfismipoolrühmad on isomorfsed. Need on alternatiivne rühm A_4 ja binaarne tetraeedrirühm. Puusemp ja Leibak näitasid artiklis [13], et kõik rühmad, mille järk on 37 kuni 47, on määratud oma endomorfismipoolrühmadega. Artiklis [12] tõestasid nad aga, et 36. järku rühmade seas on täpselt kolm, mis ei ole määratud oma endomorfismipoolrühma poolt kõigi rühmade klassis.

32. järku rühmi uuris Puusemp koos tütre Piretiga. Neil õnnestus tõestada, et need kõik on määratud oma endomorfismipoolrühma poolt kõigi rühmade klassis. Enamus tõestustest on ilmunud artiklites [16, 17, 18], kuid osa on veel publitseerimata.

Lisaks avaldas Puusemp artikli [11], milles tõestas, et iga itereeritud põimikkorrutis $(\dots(G \text{ wr } G) \text{ wr } \dots) \text{ wr } G$, kus G on algarvu astmelist järku tsükliline rühm, on määratud oma endomorfismipoolrühma poolt kõigi rühmade klassis. Üldisest suunast veidi kõrvale jääb Leibaku ja Puusempi artikkel [11], milles uuritakse mõnede mediaalsete kvaasirühmade määratavust endomorfismipoolrühmade poolt.

K.K. avaldas vaadeldaval perioodil kolm artiklit, mille temaatikad on suhteliselt erinevad. Viimane neist oli 2018 ilmunud ühisartikkel [2] ALDEN PIXLEYGA, kellega koostöö algas juba üle 30 aasta tagasi. Initsiatiiv tuli Pixley poolt, kel nüüd juba turjal 90 eluaastat. Artiklis käsitletakse lõplikku tüüpi aritmeetilisi afinselt täielikke muutkondi. On leitud valem, mille abil sellise muutkonna igas algebras saab arvutada kahe peakongruentsi alumise raja, mis ise osutub ka peakongruentsiks. Kongruentsregulaarsel erijuhul on analoogiline tulemus saadud ka peakongruentside ülemise raja jaoks.

2018. a ilmus ka K.K. koostööartikkel [3] ungari kolleegi SÁNDOR RADELECZKIGA, milles käsitletakse integraalsete kvantaa-lide esitamist tolerantside abil.

Lõpuks, 2016. a ilmus K.K., O. Košiku ja ungari kolleegi TAMÁS WALDHAUSERI ühisartikkel [1], milles uuritakse lõplike ringide kateoorset ekvivalentsi. Probleem lahendati täielikult poollihtsate ringide erijuhul.

Selle ülevaate lõpuosas vaatleme **Valdis Laane** uurimisrühma tulemusi. Sinna kuuluvad teadurid L. Tart ja Ü. Reimaa ning doktorandid LAUR TOOMING ja KRISTO VÄLJAKO. Lisaks kuulus sinna ka Pakistani päritolu järeldoktorant NASIR SOHAIL, kes töötas Tartus 2011–2014. N. Sohaili viibimine Tartus oli kahtlemata edukas, sest ta kirjutas koos Tartu matemaatikutega viis ühisartiklit, neist üks koos bakalaureuseõppe üliõpilase KRISTIINA RAHKEMAGA, kelle juhendajaks ta oli. Laane rühma uurimistemaatika on olnud kaunis mitmekesine, aga laias laastus võib selle kokku võtta märksõnadega *Morita teooria*, *poolrühm*, *järjestus*, *kategooria*.

Alustame **Morita teooriaga**. Üldiselt on tänamatu töö võrrelda teadusartikleid: milline neist on parem, huvitavam või tähtsam. Siiski tahan väga selgelt esile tõsta Laane, Márki ja Reimaa ajakirjas *Journal of Algebra* ilmunud ühisartiklit [7], mis on jätkuks Laane ja Márki varem ilmunud artiklile [6]. Põhjus on lihtne: selles ajakirjas, mis on kahtlemata prestiižseim algebra ajakiri üldse, ei ole varem ilmunud ükski eesti algebraisti artikkel. Tõsi, 1994 ilmus seal Eestis õppinud ja teadlase karjääri alustanud Vladimir Fleischeri artikkel.

Artikli esimese versiooni kirjutasid Laan ja Márki. Kui Reimaa tutvus sellega, nägi ta võimalusi materjali paremaks esitamiseks oskuslikult kaasfunktooreid kasutades. Tulemusena selgus, et reas teoreemides oli osa eeldusi tarbetud. See tähendab, et kokkuvõttes mitte ainult ei paranenud materjali esitus, vaid tugevnesid ka tulemused. Artikli põhitulemusena üldistati seni teada olevad teoreemid poolrühmade Morita ekvivalentsusest nn püsivate poolrühmade juhule. Autorid arvavad, et püsivate poolrühmade klass ongi mõistlik üldsuse tase poolrühmade Morita teooria arendamiseks.

Laane artiklis [5] uuritakse järjestatud monoidide Morita invariante, st omadusi, mis säilivad Morita-ekvivalentsi korral.

Artiklis [26] leiab Tart uudseid iseloomustusi lokaalsete ühikelementidega järjestatud poolrühmade tugevale Morita-ekvivalentsusele. Näiteks tõestab ta, et lokaalsete ühikelementidega

järjestatud poolrühmad S ja T on tugevalt Morita-ekvivalentsed siis ja ainult siis, kui leidub faktoriseeruv järjestatud Rees'i maatrikspoolrühm R üle S ja sürjektiivne range lokaalne isomorfism $R \rightarrow T$.

Tooming tõestab oma artiklis [27], et kui poolringid S ja T omavad lokaalseid ühikelemente ja nad sisalduvad mingis Morita kontekstis, siis nende ideaalikvantaalid ja kongruentsivõred on isomorfsed.

On teada, et ühikelemendiga ringide korral tuleneb Morita kontekstis sisalduvate homomorfismide sürjektiivsusest nende bijektiivsus, kusjuures seda saab tõestada puhtalt kategooriateooria vahenditega. Reimaa kasutas artiklis [20] samal eesmärgil teist kategooriateoreetilist formalismi, mis on rakendatav ka näiteks ühikelemendita ringide puhul.

Injektiivsed objektid teatud kategooriates. Olgu M kategooria K mingi morfismide klass. Kategooria K objekti Q nimetatakse M -injektiivseks, kui iga klassi M kuuluva morfismi $f: X \rightarrow Y$ ja iga kategooria K morfismi $g: X \rightarrow Q$ jaoks leidub morfism $h: Y \rightarrow Q$, nii et $g = hf$. Klassikalistel juhtudel on M üksühete homomorfismide klass. Selles kontekstis on objekt Q injektiivne parajasti siis, kui mistahes morfism objekti Y mistahes alamobjektist X objekti Q on jätkatav objektile Y . Näiteks Abeli rühmade kategooria injektiivseteks objektideks on parajasti jaguvad Abeli rühmad.

On teada, et klassikalises mõttes on kõik injektiivsed poolrühmad triviaalsed, st üheelemendilised. Tulemus jääb samaks, kui lisame poolrühmadele järjestuse, loeme morfismideks kõik monotoonsed homomorfismid ning võtame M rolli kõigi üksühete monotoonsete homomorfismide klassi. Olukord muutub, kui lubame rohkem morfisme ehk, täpsemalt, vaatleme homomorfismide asemel nn subhomorfisme, st tingimust $f(x)f(y) \leq f(xy)$ rahuldavaid kujutusi. Seda tegi rühm matemaatikuid (J. Lambek jt) 2012. a monoidide juhul. Nad näitasid, et sellisel lähenemisel on injektiivsed järjestatud monoidid kenasti kirjeldatavad ja moodustavad huvitava, heade omadustega klassi. Nüüd üldistasid Laan ja Zhang selle

tulemuse esmalt poolrühmade juhule [22], seejärel tõestasid analoogilised tulemused järjestatud polügoonide jaoks [24] ning lõpuks näitasid, et sama saab teha järjestatud algebrate korral [25]. Kirjeldame viimast tulemust. On selge, kuidas poolrühmade subhomomorfismi mõiste üldistub suvalistele järjestatud algebratele. Vaatleme nüüd kõigi järjestatud Ω -algebra klassi, kus Ω on mingi fikseeritud signatuur. Olgu OAlg_Ω kategooria, mille objektideks on järjestatud Ω -algebrad ja morfismideks subhomomorfismid ning olgu M kategooria OAlg_Ω kõigi nende morfismide hulk, mis ühtlasi on järjestus-sisestused.

Artikli [25] ühe põhitulemuse kohaselt on järjestatud Ω -algebra M -injektiivne kategoorias OAlg_Ω parajasti siis, kui ta on nn sup-algebra. Kasutades seda tulemust andsid Zhang ja Laan ka injektiivse ümbrise konstruktsiooni mistahes järjestatud algebra jaoks.

Sup-algebra mõiste, mis võeti 1998. a kasutusele portugali matemaatiku Resende poolt, üldistab kvantaali mõistet. Sisuliselt on kvantaalid sup-algebrad üle poolrühma. Tõsi, tavaliselt nõutakse täiendavalt, et see poolrühm oleks monoid. Laan ja Zhang leidsid õigustatult, et sup-algebrad väärivad tähelepanu kui omaette uurimisobjekt. Nad avaldasid artikli [23], milles uurisid sup-algebrate alamalgebraid ja homomorfisme.

Järjestatud algebrate kongruentsid. Järjestatud algebra A järjestuskongruentsiks nimetatakse algebra A kongruentsi ρ , mille korral A järjestus indutseerib faktorhulgal A/ρ sellise järjestuse, et loomulik kujutus $A \rightarrow A/\rho$ on monotoonne. Analoogiliselt tavaliste (st järjestuseta) algebrate juhuga saab järjestatud algebrate jaoks defineerida kongruentside laiendamise omaduse CEP. Veidi tugevamat omadust tähistame lühendiga SCEP. Kui jätta kongruentsi definitsioonist ära sümmeetria nõue, saame (kooskõlalise) kvaasi-järjestuse. Sarnaselt kongruentsidega saab vaadelda kvaasijärjestuste laiendamise omadust QEP ning selle tugevamat analoogi SQEP. Artiklis [9] uurisid Laan, Tart ja Sohail omadusi CEP, SCEP, QEP ja SQEP järjestatud algebrate korral. Nad näitasid, et kõik neli on kategoorised, st defineeritavad kategooriateooria vahenditega

ning selgitasid, kuid võrd varem järjestuseta algebrate korral saadud tulemused laienevad järjestusega juhule.

Algebrat A nimetatakse Hamiltoni algebraks, kui tema iga alamalgebra on algebra A mingi kongruentsi klass. On teada, et kui $A \times A$ on Hamiltoni algebra, siis algebral A on omadus SCEP. Artiklis [10] uurisid Laan, Tart ja Sohail, mil määral see tulemus kandub üle järjestatud algebratele.

Järjestatud algebrate morfismid. Sellele teemale on pühendatud kaks artiklit. Artiklis [8] uurivad Laan ja Sohail mono- ja epimorfisme järjestatud algebrate muutkondades. Teine on Sohaili ja Tarti artikkel [21], mille kohta ütleme vaid seda, et selles tõestatakse Isbelli hästi tuntud siksak-teoreemi analoog järjestatud poolrühmade jaoks, mida kasutatakse epimorfismide kirjeldamiseks absoluutselt kinniste järjestatud poolrühmade muutkondades.

Tulles tagasi artikli [8] juurde, selgitame esmalt, mis on järjestatud algebrate muutkond. Teatavasti defineeritakse järjestuseta algebrate muutkonnad samasuste abil. Järjestusega algebrate muutkond defineeritakse üsna sarnaselt, ainult samasuste asemele astuvad võrratused.

Rõhutame, et monomorfisme ja epimorfisme mõistetakse siin rangelt kategooriateooria mõttes. Märgime veel, et morfismi nimetatakse regulaarseks monomorfismiks (regulaarseks epimorfismiks), kui ta on mingi morfismide paari võrdsustaja (kovõrdsustaja).

Artikli põhitulemustena tõestatakse: 1) järjestatud algebrate muutkonna monomorfismid on parajasti üksühesed homomorfismid ning 2) järjestatud algebrate muutkonna iga regulaarne monomorfism on järjestus-sisestus, kuid vastupidine väide ei kehti.

Uuritakse ka probleemi, kas epimorfismid ühtivad surjektiivsete homomorfismidega. Selgub, et üldjuhul mitte, kuid surjektiivsed epimorfismid on siiski kirjeldatavad kategooriateooria keeles. Nimelt on nad parajasti nn subregulaarsed epimorfismid.

Varia. Artiklis [14], mille autoriteks on Laane kõrval Liang (Hiina), Luo (Hiina) ja Khosravi (Iraan) tuuakse sisse nõrgalt väändeta järjestatud S -polügoonide klass ning kasutatakse seda edukalt

järjestatud monoidide homoloogiliseks klassifitseerimiseks. Nimelt kirjeldatakse järjestatud monoidid, üle mille kõik parempoolsed järjestatud polügoonid on nõrgalt väändeta. Huvitav on märkida, et samas konstrueeritakse rida näiteid, mis lükkavad ümber mõned teiste autorite kahes varasemas artiklis avaldatud tulemused.

Sohail ja Rahkema leidsid artiklis [19] tarvilikke ja piisavaid tingimusi täielikult regulaarsete poolrühmade amalgaamide sisetamiseks.

Kirjandus

- [1] K. Kaarli, O. Košik, T. Waldhauser, On categorical equivalence of finite rings. *J. Algebra Appl.* 15 (2016), 1650154, 12 pp.
- [2] K. Kaarli, A. Pixley, Congruence computations in principal arithmetical varieties. *Algebra Universalis*, published online 21 November 2018.
- [3] K. Kaarli, S. Radeleczki, Representation of integral quantales by tolerances. *Algebra Universalis* 79 (2018), Art. 5, 20 pp.
- [4] M. Kilp, On the homological classification of pomonoids: Clifford pomonoids. *Semigroup Forum* 91 (2015), 663–674.
- [5] V. Laan, On Morita equivalence of partially ordered monoids. *Appl. Categ. Structures* 22 (2014), no. 1, 137–146.
- [6] V. Laan, L. Márki, Fair semigroups and Morita equivalence. *Semigroup Forum* 92 (2016), 633–644.
- [7] V. Laan, L. Márki, Ü. Reimaa, Morita equivalence of semigroups revisited: firm semigroups. *J. Algebra* 505 (2018), 247–270.
- [8] V. Laan, N. Sohail, On mono- and epimorphisms in varieties of ordered algebras. *Comm. Algebra* 43 (2015), 2802–2819.
- [9] V. Laan, N. Sohail, L. Tart, On congruence extension properties for ordered algebras. *Period. Math. Hungar.* 71 (2015), 92–111.
- [10] V. Laan, N. Sohail, L. Tart, Hamiltonian ordered algebras and congruence extension. *Math. Slovaca* 67 (2017), 819–830.

- [11] A. Leibak, P. Puusemp, On determinability of some classes of medial quasigroups by their endomorphisms. *Journal of Physics: Conference Series*, 532 (2014), 1–9.
- [12] A. Leibak, P. Puusemp, On endomorphisms of groups of order 36. *Proc. Est. Acad. Sci.*, 65 (2016) 237–254.
- [13] A. Leibak, P. Puusemp, On endomorphisms of groups of orders 37–47. *Proc. Est. Acad. Sci.* 66 (2017), 137–150.
- [14] X. Liang, V. Laan, Y. Luo, R. Khosravi, Weakly torsion free S -posets. *Comm. Algebra* 45 (2017), 3340–3352.
- [15] P. Puusemp, On the endomorphism semigroup of a multiple wreath product of groups. *Comm. Algebra* 45 (2017), 247–261.
- [16] P. Puusemp, Piret Puusemp, On endomorphisms of groups of order 32 with maximal subgroups $C_4 \times C_2 \times C_2$. *Proc. Est. Acad. Sci.*, 63 (2014), 105–120.
- [17] P. Puusemp, Piret Puusemp, On endomorphisms of groups of order 32 with maximal subgroups $C_8 \times C_2$. *Proc. Est. Acad. Sci.*, 63 (2014), 355–371.
- [18] P. Puusemp, Piret Puusemp, On endomorphisms of groups of order 32 with maximal subgroups C_2^4 or C_4^2 . *Proc. Est. Acad. Sci.*, 65 (2016), 1–14.
- [19] K. Rahkema, N. Sohail, A note on embedding of semigroup amalgams. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* 18 (2014), 261–263.
- [20] Ü. Reimaa, Wide right Morita contexts in lax-unital bicategories. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* 20 (2016), 67–82.
- [21] N. Sohail, L. Tart, Dominions, zigzags and epimorphisms for partially ordered semigroups. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* 18 (2014), 81–91.
- [22] X. Zhang, V. Laan, Injective hulls for posemigroups. *Proc. Est. Acad. Sci.*, 63 (2014), 372–378.
- [23] X. Zhang, V. Laan, Quotients and subalgebras of sup-algebras. *Proc. Est. Acad. Sci.*, 64 (2015), 311–322.

- [24] X. Zhang, V. Laan, On injective hulls of S -posets. *Semigroup Forum* 91(2015), 62–70.
- [25] X. Zhang, V. Laan, Injective hulls for ordered algebras. *Algebra Universalis* 76 (2016), 339–349.
- [26] L. Tart, Characterizations of strong Morita equivalence for ordered semigroups with local units. *Math. Slovaca* 64 (2014), 789–808.
- [27] L. Tooming, Morita contexts, ideals, and congruences for semirings with local units. *Proc. Est. Acad. Sci.* 67 (2018), 252–259.