Simpleksmeetodi esimesest faasist

Evald Übi[11]

Tallinna Tehnikaülikool

Selles referatiivses töös on uuritud alamääratud lineaarse võrrandisüsteemi mittenegatiivse lahendi leidmist ja selle olemasolu. Põhjalikumalt on vaadeldud simpleksmeetodi ja vähimruutude meetodi kasutamist. On kirjeldatud baasi toodava muutuja määramist normaalvõrrandite süsteemi abil. Üht esitatud algoritmi on kasutatud lineaarse planeerimise (lühidalt LP) ülesande ligikaudseks lahendamiseks. Toodud teoreeme ja algoritme on selgitatud lihtsate näidete abil.

1. Sissejuhatus. Vaatleme alamääratud lineaarset võrrandisüsteemi $Ax = b$, kus A on $m \times n$ maatriks, b on m-vektor ja x on n-vektor. Eeldame, et $m \leq n$ ja $b \geq 0$. Ülesandel

$$Ax = b, \quad x \geq 0, \tag{1}$$

on triviaalne lahend $b = 0$ korral.

Üldjuhul võib ülesandel (1) olla lõpmata palju lahendeid. Matemaatilises planeerimises tuleb selle ülesande lubatavate lahendite hulgast leida parim mingi sihifunktsiooni järgi, mis võib olla lineaarne või mittelineaarne. Lahendades ülesande (1), saame optimeerimise alustamiseks vajaliku alglahendi. Paljude LP ülesannete jaoks ongi kõige töömahukam osa lubatava alglahendi määramine. Praktikas leiab kõige rohkem rakendust kaheetapiline simpleksmeetod, kus pärast ülesande (1) lahendamist algab sihifunktsiooni optimeerimine. Lisaks simpleksmeetodile saab seda ülesannet lahendada ka mittelineaarse algoritmiga, näiteks vähimruutude meetodi abil, vt [2, 10, 8].

[11] Evald.Ubi@ttu.ee

Nii lineaarne kui ka mittelineaarne planeerimine peaks algama lihtsamast ülesandest – kitsendusi rahuldava alglahendi määramisest. Vahel on alglahendi leidmisel võimalik arvesse võtta ka lähteülesande sihifunktsiooni, aga üldjuhul pole seda lihtne teha.

Käesoleva töö teises osas vaatleme selle ülesandega seotud teoreetilisi küsimusi. Kolmandas osas lahendame ülesannet (1) simpleksmeetodiga, neljandas vähimruutude meetodiga. Viiendas osas vaatleme LP ülesande ligikaudset lahendamist, taandades selle ülesandeks (1). Kuuendas osas kirjeldame lühidalt mittelineaarseid algoritme.

2. Ülesande lahenduvuse tingimused. Ülesande (1) jaoks on olemas selle üldlahendi arvutamise algoritm.

Näide 2.1. Vaatleme ülesannet

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Kerge on kontrollida, et selle süsteemi mittenegatiivne üldlahend on kujul

$$x_1 = c_1 + 1,\ x_2 = c_1,\ x_3 = 0.5c_2 + 0.5,\ x_4 = c_2,$$

kus c_1 ja c_2 on mis tahes mittenegatiivsed konstandid. Mittenegatiivse üldlahendi arvutamise algoritmi on kirjeldatud töös [1].

Kahjuks ei saa üldlahendi abil optimeerida ei lineaarset ega mittelineaarset sihifunktsiooni. Süsteemi lahenduvuse uurimiseks kasutame m-mõõtmelist duaalmuutujate vektorit y, mille komponendid vastavad lähteülesande kitsendustele ja võivad omada ka negatiivseid väärtusi.

Järgnev alternatiivide teoreem on toodud töös [2].

Teoreem 2.1 (Farkas). *Võrrandisüsteemi $Ax = b$ korral kehtib ainult üks kahest järgnevast väitest:*
1) *eksisteerib selline vektor $x \geq 0$, et $Ax = b \neq 0$,*
2) *eksisteerib selline vektor y, et $yA \geq 0$, $(y, b) \leq -1$.*

Näide 2.2. Vaatleme ülesannet

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\
&x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\
&x \geq 0.
\end{aligned}
$$

Sellel süsteemil on lahend $x = (4, 0, 0)^T$. Kui aga teise kitsenduse parem pool $b_2 = 5$, siis süsteemil pole mittenegatiivset lahendit, $y = (1, 1)$ korral kehtib teine väide.

Töös [2] on kirjeldatud ülesande (1) lahenduvuse tingimusi duaalsusteooria abil.

Teoreem 2.2 (Stiemke). *Võrrandisüsteemi $Ax = b$ korral kehtib vaid üks kahest järgnevast väitest:*
1) *ülesandel $Ax = b$, $x > 0$ on lahend,*
2) *eksisteerib vektor y omadusega $0 \leq yA \neq 0$.*

Teoreem 2.3. *Kui võrratus $(b, y) < 0$ kehtib iga sellise y korral, mis rahuldab võrratuste süsteemi $yA \leq 0$, siis esimene võrratus on saadud võrratuste süsteemist, korrutades neid võrratusi mittenegatiivsete arvudega ja liites kokku.*

Näiteks näites 2.2 korrutame võrratusi

$$y_1 + y_2 \leq 0, \quad y_1 + y_2 \leq 0, \quad y_1 - y_2 \leq 0$$

vastavalt arvudega 2, 2 ja 0 ning saame võrratuse

$$4y_1 + 4y_2 \leq 0.$$

3. Võrrandisüsteemi lahendamine simpleksmeetodiga. *Esimene* klassikaline võte lahendab LP ülesannet kujul

$$z = v_1 + \cdots + v_m \to \min, \quad Ax + vz = b, \quad x, v \geq 0, \qquad (2)$$

kus v on m-mõõtmeline kunstlike muutujate vektor. Selles klassikalises kunstliku baasiga ülesandes võrdub sihifunktsiooni miinimum nulliga parajasti siis, kui ülesandel (2) on lahend.

Teine, samuti simpleksmeetodil põhinev variant kasutab kunstlike muutujate summa nulliks tegemiseks lisakitsendust. Vaatleme ülesannet

$$\begin{aligned} z = t \to \max, \quad v_1 + \cdots + v_m + t = 1 \\ Ax + v - tb = 0, \quad x, v \geq 0, \end{aligned} \tag{3}$$

kus t on mittenegatiivne arv, vt [10]. Ülesanne (1) lahendub parajasti siis, kui maksimum $z^* = 1$. Algbaasi moodustavad $v_i = tb_i$, kus $t = 1/(1 + \sum b_i)$ on esimesele kitsendusele vastav baasimuutuja.

Ülesande (1) asendamist ülesandega (2) on kirjeldatud igas lineaarse planeerimise õpikus. Ülesande (3) kasutamist on esmakordselt kirjeldatud käesoleva artikli autori töös [10]. Neid kahte meetodit pole omavahel veel võrreldud.

Kolmas, originaalne variant erineb esimesest selle poolest, et baasi toodav muutuja määratakse vähimruutude meetodil. Selleks tuleb igal sammul arvutada maatriksi A veergude skalaarkorrutised uue parema poolega $bn = b - \sum A_j x_j$, kus summeeritakse nende põhimuutujate järgi, mis on baasis. Esimesena tuleb baasi see muutuja x_j, millele vastav veerg A_j moodustab minimaalse nurga parema poolega b. Ülesanne võib lahenduda ühe sammuga, kui maatriksil on selline veerg A_j, mille korral $A_j x_j = b$, $x_j > 0$. See minimaalse nurga meetod sobib degenereerunud juhul, kui ülesandes (1) on baasimuutujaid vähem kui kitsendusi. Baasi toodava muutuja määramiseks arvutame baasiväliste muutujate jaoks skalaarkorrutised

$$\begin{aligned} F_j &= (A_j, bn) \\ G_j &= \sqrt{(A_j, A_j)} \\ RE &= max(F_j/G_j). \end{aligned} \tag{4}$$

Igal sammul toome baasi maksimumile vastava muutuja. Kui parem pool $bn = 0$, siis ülesanne on lahendatud, $RE = 0$. Kui $RE < 0$, siis süsteem (1) on vastuoluline. Baasist väljaviidav muutuja määratakse sarnaselt simpleksmeetodiga minimaalse jagatise abil. Seetõttu igal sammul $bn \geq 0$. Valemis (4) pole tingimata vaja leida miinimumi, hälvete ruutude summa süsteemis (1) hakkab vähenema ka siis, kui baasi toodava veeru ja parema poole bn skalaarkorrutis on positiivne.

Näide 3.1. Vaatleme ülesannet

$$\begin{aligned} -x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 1.5 \\ x_2 &= 1 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Järgnevad tabelid kirjeldavad selle lahenduskäiku.

1	2	3	4	b	bn
0	-1	1	0	0	0
1	1	1	-1	1.5	0
0	1	0	0	1	1
1.5	2.5	1.5	-1.5	F	.
1	1.73	1.41	1	G	.

Tabel 1. Näite 3.1 lahenduse esimene samm.

1	2	3	4	b	bn
0	0	1	0	1	1
1	0	1	-1	0.5	0
0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	F	.
1	1	1.41	1	G	.

Tabel 2. Näite 3.1 lahenduse teine samm.

1	2	3	4	b	bn
-1	0	0	1	0.5	0,5
1	0	1	-1	0.5	0
0	1	0	0	1	0
-0.5	0	0	0.5	F	.
1.41	1	1	1.41	G	.

Tabel 3. Näite 3.1 lahenduse kolmas samm.

1	2	3	4	b	bn
-1	0	0	1	0.5	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	F	.
1	1	1	1	G	.

Tabel 4. Näite 3.1 lahenduse neljas samm.

Esimesel sammul moodustab minimaalse nurga parema poolega esimene veeruvektor, $x_1 = 1.5$. See veerg on juba ühikvektor, seetõttu tabel jääb samaks. Teisel sammul moodustab teine veerg minimaalse nurga uue parema poolega $bn = b - 1.5A_1 = (0, 0, 1)^T$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$. Need väärtused on saadud tabelist 2. Seal moodustab teravnurga parema poolega bn vaid kolmas veerg. Tabelis 3 on baasi tulnud x_3 ja minimaalse jagatise testi põhjal lahkub x_1. Neljandas tabelis on baasi tulnud x_4. Ülesande lahend on $x = (0, 1, 1, 0.5)^T$.

Märkus. Esitatud meetod on rakendatav ka siis, kui ülesandes on väga palju muutujaid ja kitsendusi. Siis me kasutame modifitseeritud simpleksmeetodit, ei teisenda maatriksit A, selle veergude norme arvutame vaid üks kord. Pärast uue parema poole bn arvutamist saab leida baasi tuleva muutuja valemi (4) abil. Selle muutuja määramine ongi ainuke erinevus võrreldes klassikalise simpleksmeetodiga. Kokkuvõtvalt on see modifitseeritud simpleksmeetodi uus variant.

4. Võrrandisüsteemi lahendamine vähimruutude meetodil.

4.1. Davis-Dantzigi meetod. Selles 1992. a avaldatud meetodis tuuakse esimesena baasi veerg, mis moodustab minimaalse nurga parema poolega, vt [2]. Vaatleme baasimaatriksi B moodustamist.

1. $B := A_s$, $s = argmax(A_j, b)/G_j$, $j = 1, \ldots, n$.

2. Leida vähimruutude ülesande $Bx = b,\ x > 0$ lahend x_B.
3. Kui $Bx_B \neq b$, siis valida järgmine baasi tulev muutuja x_k, lahendades kahe muutujaga vähimruutude ülesande

$$\|b - \alpha Bx_B - \beta A_k\|^2 \to \min,$$

kus minimeeritud on α ja β järgi.
4. Sisemine tsükkel, mille käigus kõrvaldatakse baasist need veerud, millele vastav $x_j \leq 0$.
5. Kui leitud lahend x_B ei rahulda süsteemi $Ax = b$, minna täitma sammu 3.
6. Vektor x_B on ülesande lahend.

Märgime, et punktis 1 on B baasimaatriks, mis esimesel sammul koosneb vaid ühest veerust, teisel sammul kahest veerust jne. Seejuures tähistab s selle veeru indeksit, mille korral toodud avaldis on maksimaalne.

4.2. Übi meetod. See 1989. a avaldatud minimaalse nurga meetod põhineb vähimruutude ülesande lahendamise teisel variandil, vt [8, 5]. Viimase töö 24. peatükis kasutatakse valemit $A = QR$, kus Q on ortogonaalne ja R kolmnurkne maatriks. Sealjuures eeldatakse, et maatriksit A saab säilitada arvuti operatiivmälus. Nagu eelmises punktis võetakse esimesena baasi see veerg, mis moodustab parema poolega minimaalse nurga ja lahendatakse ühe muutujaga vähimruutude ülesanne. Selleks tehakse süsteemi $Ax = b$ veergudele ja paremale poolele Householderi peegeldus, mille käigus saavad nulliks kõik peadiagonaali all asuvad elemendid. Igal sammul leitakse uus parem pool $bn = b - \sum A_j x_j$, kus summeeritakse baasimuutujate järgi. Järgmine baasiveerg peab moodustama minimaalse nurga uue parema poolega bn. Baasimuutjate uued väärtused leitakse kolmnurksest süsteemist maatriksiga R. Kui mõni baasimuutja pole positiivne, siis vastav veerg kõrvaldatakse baasist ja maatriks R teisendatakse uuesti kolmnurksele kujule. Erinevalt simpleksmeetodist kasutatakse vaid rangelt positiivseid otsustusmuutujaid. Teisenduste ortogonaalsuse tõttu saab suurusi F_j ja G_j arvutada rekurrentselt.

Järgnevates tabelites on toodud ülesande 3.1 lahendus ortogonaalse meetodiga.

1	2	3	4	b	bn
0	-1	1	0	0	0
1	1	1	-1	1.5	0
0	1	0	0	1	1
1.5	2.5	1.5	-1.5	F	.
1	1.73	1.41	1	G	.

Tabel 5. Näite 3.1 algtingimused.

1	2	3	4	b	bn
-1	-1	-1	1	-1.5	0
0	1	-1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	F	.
0	1.41	1	0	G	.

Tabel 6. Näite 3.1 lahenduse esimene samm.

1	2	3	4	b	bn
-1	-1	-1	1	-1.5	0
0	-1.41	0.7	0	-0.7	0
0	0	0.7	0	0.7	0
0	0	0.5	0	F	.
0	0	0.7	0	G	.

Tabel 7. Näite 3.1 lahenduse teine samm.

1	2	3	4	b	bn
0.58	1.73	0	-0.58	1.44	0
0.7	0	1.41	-0.7	1.06	0
0.41	0	0	-0.41	-0.2	0
-0.08	0	0	0.08	F	.
0.41	0	0	0.41	G	.

Tabel 8. Näite 3.1 lahenduse kolmas samm.

Tabel 6 määrab esimese baasimuutuja $x_1 = 1.5$. Järgmises tabelis me ei muuda esimest võrrandit, vaatleme kahemõõtmelisi veeruvektoreid, baasi tuleb x_2. Kolmnurkse süsteemi lahend on $x_2 = 0.5$, $x_1 = 1$. Kolmandal sammul tuleb baasi $x_3 = 1$, $x_2 = 1$, $x_1 = -0.5$. Negatiivse baasimuutuja kõrvaldamisel tuleb teisendada teine ja kolmas veerg kolmnurksele kujule, vt tabelit 8. Selles tabelis tuleb baasi $x_4 = 0.5$, $x_3 = 1$, $x_2 = 1$.

Suuremõõtmeliste ülesannete korral maatriksit A ei teisendata, valemit (4) ei saa rekurrentselt ümber arvutada. Siis arvutatakse esmalt uus parem pool bn ja selle järgi skalaarkorrutised valemis (4). Ortogonaalsed teisendused peetakse meeles korrutiste kujul, vt [5, 9]. Baasimuutujate väärtused leitakse rekurrentsete valemite abil.

4.3. Normaalvõrrandite süsteemi koostamine. Vaatleme funktsiooni

$$\varphi(x) = 0.5 \|Ax - b\|^2 .$$

Eeldades, et

$$\operatorname{grad} \varphi(x) = A^T Ax - A^T b = 0,$$

koostame normaalvõrrandite süsteemi näite 3.1 jaoks.

Algoritmi igal sammul toome baasi ühe muutuja või viime ühe negatiivse muutuja baasist välja. Alglahendiks võtame $x^0 = 0$. Baasi toome muutuja, mille korral on vastava normaalvõrrandi parem pool (A_j, b) positiivne ja maksimaalne, juhtelemendid valime ainult peadiagonaalilt. Näite 3.1 puhul on esimesel sammul teine rida juhtrida ja juhtelement 3:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 1.5 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 &= 2.5 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 &= 1.5 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= -1.5 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Arvutuste tulemused on toodud järgnevates tabelites.

1	2	3	4	b
2/3	0	1	-2/3	2/3
1/3	1	0	-1/3	5/6
1	0	2	-1	3/2
-2/3	0	-1	2/3	-2/3

Tabel 9. Näite 3.1 lahenduse esimene samm.

1	2	3	4	b
1/6	0	0	-1/6	-1/12
1/3	1	0	-1/3	5/6
1/2	0	1	-1/2	3/4
-1/6	0	0	1/6	1/12

Tabel 10. Näite 3.1 lahenduse teine samm.

1	2	3	4	b
0	0	0	0	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
-1	0	0	1	1/2

Tabel 11. Näite 3.1 lahenduse kolmas samm.

Teisel sammul tuleb baasi x_3 ja kolmandal sammul x_4. Ülesande lahend on leitud, kui kõigile baasivälistele muutujatele vastavate normaalvõrrandite paremad pooled võrduvad nulliga.

Kui süsteem $Ax = b$ on liiakas, siis kõik baasilahendid on degenereerunud, baasimuutujate arv on väiksem võrrandite arvust. Degenereerunud baasilahend võib esineda ka siis, kui kitsenduste maatriksi astak võrdub kitsenduste arvuga.

Kehtib järgmine *vastuolulisuse kriteerium:* teisendatud normaalvõrrandite süsteemis on negatiivse parema poolega rida, mille vasaku poole kõik kordajad on mittenegatiivsed.

Märkus 4.1. Kuna normaalvõrrandeid on sama palju kui lähtemuutujaid, siis äsja kirjeldatud võte on vahetult rakendatav vaid väikese arvu muutujate korral. Praktilisel lahendamisel võib koostada normaalvõrrandite süsteemi vaid ainult osa muutujate kohta, valides kitsenduste arvust m oluliselt rohkem baasi jaoks tõenäoliselt sobivaid muutujaid.

Märkus 4.2. Praktilisel lahendamisel, sarnaselt punktis 4.2 vaadeldud meetodiga on negatiivseks muutunud baasimuutujaid esinenud harva, mõnes näites isegi rohkem kui 100 kitsenduse korral pole neid üldse olnud.

Märkus 4.3. Suuremõõtmelise ülesande korral tuleb kasutada ortogonaalset meetodit, teisendades maatriksi A veergude normid eelnevalt võrdseks ühega. Baasimuutujate väärtused leiame kolmnurksest süsteemist maatriksiga R, $A = QR$, mis on saadud ristkülikukujulise maatriksiga süsteemist, kus on k baasimuutujat ja m võrrandit. Selle süsteemi maatriks viiakse ortogonaalsete teisendustega kolmnurksele kujule R, mille peadiagonaali all hoitakse Householderi peegelduste normaale, vt [5]. Kui mõne baasimuutuja x_s väärtus tuli negatiivne, siis algab sisemine tsükkel negatiivse baasimuutuja kõrvaldamiseks. Muutujale x_s vastav ja sellele järgnevad veerud maatriksis R asendatakse originaalidega maatriksist A, seejärel teisendatakse see osa samuti kolmnurksele kujule, vt [5, 9]. Tähtis on rõhutada, et uue baasimuutuja tulekul saab kasutada eelmistel sammudel tehtud arvutusi. Selleks leiame igal sammul kolmnurkse maatriksi R pöördmaatriksi, mida saab rekurrentselt arvutada. Uue muutuja baasi tulekul lisandub pöördmaatriksile vaid üks veerg.

5. LP ülesande ligikaudne lahendamine. Tellijat rahuldava matemaatilise mudeli koostamine pole lihtne ülesanne. Esialgne mudel ei tarvitse anda kvantitatiivseid tulemusi, vahel võime teha vaid kvalitatiivseid järeldusi. Vajalikuks võib osutuda kogu protsessi kirjeldava mudeli jaotamine osadeks ja hilisem osade ühendamine terviklikuks mudeliks. Veel võib tekkida vajadus muutujaid või kitsendusi lisada, mittelineaarseid funktsioone kasutada jne. Eespool vaadeldud mittenegatiivse lahendi määramise meetod võib osutuda kasulikuks LP ülesande esialgse püstituse koostamisel. Reaalelust pärit ülesandes on tavaliselt teada, kas sihifunktsiooni optimaalne väärtus on positiivne või negatiivne.

Koostame ülesande $Ax = b$, $x \geq 0$ puhul näiteks kitsenduse sihifunktsiooni miinimumi kohta eeldusel, et see võrdub ligikaudu etteantud parameetriga z_0, mis on meid rahuldav sihifunktsiooni esialgne väärtus:

$$(c, x) + s = z_0, \tag{5}$$

Sihifunktsioonile vastav lisamuutuja s võib saada nii positiivseid kui ka negatiivseid väärtusi. Samuti võib parameeter z_0 olla negatiivne, seetõttu tuleb artikli kolmandas osa kirjeldatud algoritmi muuta. Lisamuutuja s peab jääma alati baasi ja võib olla ka negatiivne. Sihifunktsioonile vastavat rida arvestame uue muutuja baasi toomisel valemis (4).

Näide 5.1. See on H. Kuhni poolt koostatud ülesanne, kus simpleksmeetodis võib tekkida tsükkel. Ülesande sihifunktsioon on kujul

$$z = -2x_2 - 3x_3 + x_4 + 12x_5 \to \min .$$

Järgnevas tabelis toodud kitsenduste korral on selle sihifunktsiooni miinimum -2. Kui *a priori* me ei tea miinimumi märki, võtame parameetri $z_0 = 0$. Nii teeme ka selles ülesandes ja kasutame sihifunktsiooni jaoks lisamuutujat s.

1	2	3	4	5	6	b
0	-2	-3	1	12	1	0
1	-2	-9	1	9	0	0
0	1/3	1	-1/3	-2	0	0
0	2	3	-1	-12	0	2

Tabel 12. Näite 5.1 lahenduse esimene samm.

1	2	3	4	5	6	b
0	0	3	-1	0	1	0
1	0	-3	-1	-3	0	0
0	1	3	-1	-6	0	0
0	0	-3	1	0	0	2

Tabel 13. Näite 5.1 lahenduse teine samm.

1	2	3	4	5	6	b
0	0	0	0	0	1	2
1	0	-6	0	-3	0	2
0	1	0	0	-6	0	2
0	0	-3	1	0	0	2

Table 14. Näite 5.1 lahenduse kolmas samm.

Tabelis 12 moodustab minimaalse nurga parema poolega teine veerg, baasi tuleb x_2. Tabelis 13 on vaid neljanda veeru ja parema poole skalaarkorrutis positiivne. Viimases tabelis võrdub baasimuutujate arv kitsenduste arvuga, optimaalne lahend $x^* = (2, 2, 0, 2, 0)$, $z^* = -2$, $s^* = 2$.

Suuremõõtmelise ülesande korral tuleb lähtuda märkusest 4.3.

Märkus 5.1. Valemi (5) lisamisel süsteemile $Ax = b$ võib üldjuhul tulla $m + 1$ baasimuutujat. Kui aga suurused z_0 ja z^* erinevad teineteisest vähe, siis saadud vähemruutude lahend võib võrduda lähteülesande optimaalse lahendiga.

Märkus 5.2. Kui me näites 5.1. oleksime võtnud $z_0 = -3$, oleksime saanud sama optimaalse lahendi $x^* = (2, 2, 0, 2, 0)$, aga $s^* = -1$. Juhul $z_0 = 1$ on $s^* = 3$.

Märkus 5.3. Kui lineaarse planeerimise ülesanne kujul (5) on lahendatud ja $z_0 \neq z_{min}$, siis võib olla võimalik leida veel teisi baasilahendeid, asendades mõne baasimuutuja baasivälise muutujaga. Sel viisil võib saada rohkem sobivaid lahendeid.

Märkus 5.4. Sihivektori norm tuleks valida suurusjärgu võrra v'iksem maatriksi A ridade normidest. Esmalt on tähtis lahendi lubatavus, siis optimaalsus.

6. Iteratiivsed meetodid. Käesoleval ajal kasutatakse suuremõõtmeliste lineaarse planeerimise ülesannete lahendamiseks sisepunkti meetodit, vt [2]. Seda meetodit saab rakendada ka ülesandes (1). Pärast lahendamist tuleb veenduda, et võrrand $Ax = b$ kehtib kasutatava täpsuse piires. Osa nullilähedastele baasimuutujatele vastavatest veergudest võivad olla baasivälised.

Stabiilsuse saavutamiseks võime lahendada regulariseeritud ülesannet

$$z = \|Ax - b\|^2 + \varepsilon_k \|x\|^2 \to \min$$

$$x \geq 0,\ \varepsilon_k > 0,$$

kus $\varepsilon_k \to 0$, kui $k \to \infty$. Lihtsaim klassikaline võte seisneb selle funktsiooni koordinaadikaupa minimeerimises. Teine liidetav sihifunktsioonis stabiliseerib arvutusprotsessi. Alglahendi $x_0 = 0$ korral saavad baasivälised muutujad kohe sobiva väärtuse. Kogemuste põhjal võib öelda, et lahendamise kiirus sõltub olulisel määral muutujate valimise järjekorrast.

Töös [4] koostatakse ülesande (1) duaalülesanne, mis teisendatakse vaba miinimumi ülesandeks, mille sihifunktsioon on tükati ruutfunktsioon. See maksimeeritakse Newtoni meetodi abil.

Põhimõtteliselt saab igat lineaarse planeerimise algoritmi kasutada ülesande (1) lahendamiseks, vt [2, 6].

Kirjandus

[1] S. N. Chernikov, *Lineare Ungleichungen.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1971.

[2] G. B. Dantzig, M. N. Thapa, *Linear programming. 2. Theory and extensions.* Springer Series in Operations Research. Springer-Verlag, New York, 2003.

[3] J. Farkas, Theorie der einfachen Ungleichungen. *J. Reine Angew. Math.* 124 (1902), 1–27.

[4] B. V. Ganin, A. L. Golikov, Yu. G. Evtushenko, Projective-dual method for solving systems of linear equations with nonnegative variables. *Comput. Math. Math. Phys.* 58 (2018), 159–169.

[5] C. L. Lawson, R. J. Hanson, *Solving least squares problems. Revised reprint of the 1974 original.* Classics in Applied Mathematics, 15. SIAM, Philadelphia, 1995.

[6] O. L. Mangasarian, A Newton method for linear programming. *J. Optim. Theory Appl.* 121 (2004), 1–18.

[7] E. Stiemke, Über positive Lösungen homogener linearer Gleichungen. *Math. Ann.* 76 (1915), 340–342.

[8] E. Übi, Use of the method of least squares in mathematical programming. (Russian) *Eesti NSV Tead. Akad. Toimetised Füüs.-Mat.* 38 (1989), 423–432.

[9] E. Übi, On stable least squares solution to the system of linear inequalities. *Cent. Eur. J. Math.* 5 (2007), 373–385.

[10] E. Übi, J. Übi, Theorems of alternative and feasibility/infeasibility in mathematical programming. *Asian J. Math. Comput. Res.*, 12 (2016), 233–242.