Murruliselt diferentseeruvate funktsioonide klassi kirjeldusi[9]

Gennadi Vainikko

Tartu Ülikool

Käesolev ülevaade tugineb publikatsioonile

G. Vainikko, Which Functions are Fractionally Differentiable?, *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, **35**, No. 4 (2016), 465-487.

PROBLEEMI SEADE

Olgu $C[0,T]$ reaal- või kompleksväärtustega pidevate funtsioonide ruum ning $J^\alpha\colon C[0,T] \to C[0,T]$, $\alpha > 0$, Riemann-Liouville'i operaator, s.t.

$$(J^\alpha u)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} u(s) \mathrm{d}s, \;\; 0 \le t \le T,$$

kus $\Gamma(\alpha)$ on Euleri gammafunktsioon. Ilmselt $(J^1 u)(t) = \int_0^t u(s)\mathrm{d}s$ ning teatavasti $\alpha > 0, \;\beta > 0$ korral

$$J^\alpha J^\beta = J^\beta J^\alpha = J^{\alpha+\beta}.$$

See võimaldab käsitleda $J^\alpha u$ α-järku **murrulise integraalina** funktsioonist u. Funtsiooni v **murrulist järku tuletist** $D_0^\alpha v$ on loomulik definerida valemiga

$$D_0^\alpha v = (J^\alpha)^{-1} v, \;\; v \in J^\alpha C[0,T].$$

Seega murruliselt diferentseeruvate funktsioonide klassi kirjeldus on samaväärne operaatori $J^\alpha : C[0,T] \to C[0,T]$ väärtuste piirkonna $J^\alpha C[0,T]$ kirjeldusega. See näiliselt lihtne ülesanne osutub tegelikult üsnagi tõsiseks.

[9]Käesolev töö on valminud Eesti Teadusagentuuri projekti PRG864 abil.

Paneme tähele, et täisarvulise $\alpha = m \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ korral

$$\begin{aligned} J^m C[0,T] &= \{v \in C^m[0,T] : \, v^{(k)}(0) = 0, \; k = 0, \dots, m-1\} \\ &=: C_0^m[0,T], \end{aligned}$$

J^m on pööratav oma väärtuste hulgal $J^m C[0,T]$, ning $(J^m)^{-1} v = D_0^m v$, kus $D_0^m \colon C_0^m[0,T] \to C[0,T]$ on (täisarvulist) järku diferentseerimise operaatori $D^m = (d/dt)^m \colon C^m[0,T] \to C[0,T]$ kitsend alamruumile $C_0^m[0,T]$. Siit võime järeldada, et J^α on oma väärtuste hulgal $J^\alpha C[0,T]$ pööratav ka murruliste $\alpha > 0$ korral: kui $J^\alpha u = 0$ mingi $u \in C[0,T]$ korral, siis, võttes $m \in \mathbb{N}$, $m > \alpha$, saame $J^m u = J^{m-\alpha} J^\alpha u = 0$, $u = 0$.

Paneme tähele, et $\alpha > m \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ korral rahuldavad operaatori D_0^α määramispiirkonda kuuluvad funktsioonid $v \in J^\alpha C[0,T]$ algtingimusi $v^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, \dots, m$. Murruliste diferentsiaalvõrrandite käsitlemisel muudab see D_0^α kasutamise ebamugavaks ning murrulise tuletise mõiste modifitseeritakse nii, et see kitsendus algtingimustele kaoks. Siin on erinevaid võimalusi. Allpool piirdume **Caputo** murrulise tuletisega $D_{\mathrm{Cap}}^\alpha v$, mis on peamine modifikatsioon murrulist järku diferentsiaalvõrrandite käsitlemisel. Tähistame $v \in C^m[0,T]$, $m \in \mathbb{N}_0$ korral

$$(\Pi_m v)(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{v^{(k)}(0)}{k!} t^k.$$

Caputo murruline tuletis $D_{\mathrm{Cap}}^\alpha v$ defineeritakse valemiga

$$D_{\mathrm{Cap}}^\alpha v = D^{m+1} J^{m+1-\alpha} (v - \Pi_m v);$$

murruline tuletis $D_{\mathrm{Cap}}^\alpha v$ eksisteerib, kui

$$J^{m+1-\alpha} (v - \Pi_m v) \in C^{m+1}[0,T].$$

Seega lisanduvad D_0^α-diferentseeruvate funktsioonide klassile m-järku polünoomid, need moodustavad operaatori D_{Cap}^α nullruumi, ning $\Pi_m v = 0$ korral $D_{\mathrm{Cap}}^\alpha v = D_0^\alpha v$.

Lause. *Funktsioonil* $v \in C^m[0,T]$ *on olemas Caputo murruline tuletis* $D^\alpha_{\mathrm{Cap}} v \in C[0,T]$, $m < \alpha < m+1$, $m \in \mathbb{N}_0$, *parajasti siis, kui* $D^\alpha_0(v - \Pi_m v) \in C[0,T]$. *Sealjuures* $D^\alpha_{\mathrm{Cap}} v = D^\alpha_0(v - \Pi_m v)$.

PÕHITULEMUSED

Kõigepealt esitame tähistusi:

$\mathcal{H}^\beta[0,T]$, $0 < \beta \leq 1$, on Hölderi ruum normiga

$$\|v\|_{\mathcal{H}^\beta} := \max_{0 \leq t \leq T} |v(t)| + \sup_{0 \leq s < t \leq T} \frac{|v(t) - v(s)|}{(t-s)^\beta} < \infty;$$

$\mathcal{H}^\beta_0[0,T]$, $0 < \beta < 1$, on ruumi $\mathcal{H}^\beta[0,T]$ **kinnine** alamruum funktsioonidest $v \in \mathcal{H}^\beta[0,T]$, mille korral

$$\sup_{0 \leq s < t \leq T,\ t-s \leq \varepsilon} \frac{|v(t) - v(s)|}{(t-s)^\beta} \to 0, \ \ \textit{kui } \varepsilon \to 0.$$

Põhitulemuseks on

Teoreem 1. *Järgmised kolm tingimust* (i), (ii) ja (iii) *on* $v \in C^m[0,T]$, $m < \alpha < m+1$, $m \in \mathbb{N}_0$, *korral samaväärsed:*

(i) $v \in J^\alpha C[0,T]$, *s.t. eksisteerib murruline tuletis* $D^\alpha_0 v := (J^\alpha)^{-1} v \in C[0,T]$;

(ii) $v^{(m)} = \gamma_m t^{\alpha - m} + v_m$, *kus* $\gamma_m = \mathrm{const}$, $v_m \in \mathcal{H}^{\alpha-m}_0[0,T]$, $v_m(0) = 0$ *ning päratu integraal* $\int_0^t (t-s)^{m-\alpha-1}\big(v_m(t) - v_m(s)\big)\mathrm{d}s =: w_m(t)$ *koondub iga* $t \in (0,T]$ *korral, defineerides koos väärtusega* $w_m(0) = 0$ *funktsiooni* $w_m \in C[0,T]$;

(iii) *eksisteerib lõplik piirväärtus* $\gamma_m := \lim_{t \to 0} t^{m-\alpha} v^{(m)}(t)$ ning

$$\lim_{\theta \uparrow 1} \sup_{0 < t \leq T} \left| \int_{\theta t}^t (t-s)^{m-\alpha-1}\big(v^{(m)}(t) - v^{(m)}(s)\big)\mathrm{d}s \right| = 0.$$

Tingimuse (i), (ii) *või* (iii) *täidetuse korral*

$$(D^\alpha_0 v)(0) = \Gamma(\alpha + 1 - m)\gamma_m,$$

$$(D_0^\alpha v)(t) = \frac{1}{\Gamma(m+1-\alpha)}\Big(t^{m-\alpha}v^{(m)}(t) + (\alpha - m)\cdot$$
$$\cdot \int_0^t (t-s)^{m-\alpha-1}\big(v^{(m)}(t) - v^{(m)}(s)\big)\mathrm{d}s\Big), \ \ 0 < t \le T.$$

Näide. Funktsioon $u(t) = t^\beta$ on D_0^α-diferentseeruv parajasti siis, kui $\beta = \alpha$ või $\mathrm{Re}\beta > \alpha$.

Järgnev teoreem 2 Caputo diferentseeruvuse kohta on lihtne järeldus teoreemist 1.

Teoreem 2. *Järgmised tingimused* (i), (ii) *ja* (iii) *on* $v \in C^m[0,T]$, $m < \alpha < m+1$, $m \in \mathbb{N}_0$, *korral samaväärsed:*

(i) *funktsioonil* v *on Caputo murruline tuletis* $D_{\mathrm{Cap}}^\alpha v \in C[0,T]$;

(ii) $v^{(m)} - v^{(m)}(0) = \gamma_m t^{\alpha-m} + v_m$, *kus* $\gamma_m = \mathrm{const}$, $v_m \in \mathcal{H}_0^{\alpha-m}[0,T]$; *päratu integraal*

$$\int_0^t (t-s)^{m-\alpha-1}\big(v_0^{(m)}(t) - v_0^{(m)}(s)\big)\mathrm{d}s =: w_m(t)$$

koondub iga $t \in (0,T]$ *korral,* $w_m(t)$ *on pidev poollõigul* $(0,T]$ *ning eksisteerib lõplik piirväärtus* $w_m(0) := \lim_{t\downarrow 0} w_m(t)$ *(seega* $w_m \in C[0,T]$*);*

(iii) *eksisteerib lõplik piirväärtus* $\gamma_m := \lim_{t\to 0} t^{m-\alpha}(v^{(m)}(t) - v^{(m)}(0))$ *ning*

$$\lim_{\theta\uparrow 1} \sup_{0<t\le T}\left|\int_{\theta t}^t (t-s)^{m-\alpha-1}\big(v^{(m)}(t) - v^{(m)}(s)\big)\mathrm{d}s\right| = 0.$$

Tingimuse (i), (ii) *või* (iii) *täidetuse korral korral*

$$(D_{\mathrm{Cap}}^\alpha v)(0) = \Gamma(\alpha+1-m)\gamma_m,$$

$$(D_{\mathrm{Cap}}^\alpha v)(t) = \frac{1}{\Gamma(m+1-\alpha)}\Big(t^{m-\alpha}(v^{(m)}(t) - v^{(m)}(0)) + (\alpha - m)\cdot$$
$$\cdot \int_0^t (t-s)^{m-\alpha-1}\big(v^{(m)}(t) - v^{(m)}(s)\big)ds\Big), \ 0 < t \le T.$$

Koostöös Britt Kalamiga on käsil funktsioonide $v \in L^p(0,T)$ murrulise diferentseeruvuse uurimine, mis tehniliselt on samaväärne operaatori $J^\alpha \colon L^p(0,T) \to L^p(0,T)$ väärtuste hulga kirjeldamisega.