Tõkestatud aproksimatsiooniomaduste ülekandumine Banachi ruumide kaasruumidesse

Silja Veidenberg[1]
Tartu Ülikool

1. Sissejuhatus

Aproksimatsiooniomaduste süstemaatilised ja aktiivsed uuringud algasid 1955. aastal, mil Grothendieck [G] aproksimatsiooniomaduse ja meetrilise aproksimatsiooniomaduse mõisted kasutusele võttis. Aproksimatsiooniomadustega on seotud mitmeid siiani lahendamata probleeme. Kuulsaim neist on järgmine: kas Banachi ruumi kaasruumi puhul on aproksimatsiooniomaduse ning meetrilise aproksimatsiooniomaduse mõisted erinevad? Seoses antud probleemi võimalike lahendusteede uurimisega on võetud kasutusele mitmeid uusi aproksimatsiooniomaduste versioone. Aastal 2011 toodi artiklis [FJP] sisse tõkestatud aproksimatsiooniomaduse versioon paaride jaoks, mis koosnevad Banachi ruumist ja tema kinnisest alamruumist. Käesolevas artiklis uuritakse süstemaatiliselt seda uut aproksimatsiooniomadust ning selle üldisemat versiooni artiklist [LisO] – tõkestatud kumerat aproksimatsiooniomadust. Vaatluse all on artiklite [OT, OV, V1] olulisemad tulemused.

Artiklis kasutatakse järgmisi tähistusi. Olgu X ja Y Banachi ruumid, mõlemad üle reaal- või kompleksarvude korpuse. Kõikide ruumist X ruumi Y tegutsevate pidevate lineaarsete operaatorite Banachi ruumi tähistame $\mathcal{L}(X,Y)$ ja lõplikumõõtmeliste operaatorite alamruumi $\mathcal{F}(X,Y)$. Me kirjutame $\mathcal{L}(X,X)$ ja $\mathcal{F}(X,X)$ asemel lühidalt vastavalt $\mathcal{L}(X)$ ning $\mathcal{F}(X)$. Kui A ja B on ruumi $\mathcal{L}(X)$ alamhulgad, siis $A \circ B := \{ST \colon S \in A,\ T \in B\}$. Ruumi X kaasruu-

[1]Silja Veidenberg on Eesti Matemaatika Seltsi 2016. a Arnold Humala preemia ja 2017. aasta publikatsiooniauhinna laureaat. Kaitses filosoofiadoktori kraadi matemaatikas 30.08.2017.

miks nimetatakse ruumi $X^* := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ ning teiseks kaasruumis ruumi $X^{**} := (X^*)^*$. Kanooniline sisestus $j_X : X \to X^{**}$ defineeritakse eeskirjaga

$$(j_X x)(x^*) = x^*(x), \quad x^* \in X^*, \ x \in X.$$

Ruumi X ühikoperaatorit tähistame I_X ning kinnist ühikkera B_X. Ruumi X kinnise alamruumi Y annulaatorit tähistame

$$Y^\perp = \{x^* \in X^* \colon x^*(y) = 0 \ \ \forall y \in Y\}$$

ning selle annulaatorit teises kaasruumis tähistame $Y^{\perp\perp} := (Y^\perp)^\perp$.

2. Tõkestatud aproksimatsiooniomadused

Olgu A ruumi $\mathcal{L}(X)$ alamhulk. Öeldakse, et Banachi ruumil X on A-*aproksimatsiooniomadus*, kui leidub pere $(S_\nu) \subset A$ nii, et $S_\nu \to_\nu I_X$ ühtlaselt ruumi X kompaktsetel alamhulkadel. Ruumil X on *duaalne aproksimatsiooniomadus*, kui pere $(S_\nu) \subset A$ saab valida nii, et lisaks $S_\nu^* \to_\nu I_{X^*}$ ühtlaselt kaasruumi X^* kompaktsetel alamhulkadel. Olgu $1 \leq \lambda < \infty$. Ruumil X on λ-*tõkestatud* (*duaalne*) A-*aproksimatsiooniomadus*, kui pere (S_ν) saab leida nii, et $\|S_\nu\| \leq \lambda$ iga ν korral (st ruumil X on (duaalne) $(A \cap \lambda B_{\mathcal{L}(X)})$-aproksimatsiooniomadus). Öeldakse, et Banachi ruumil on *tõkestatud* (*duaalne*) A-*aproksimatsiooniomadus*, kui tal on λ-tõkestatud (duaalne) A-aproksimatsiooniomadus mingi λ korral. Banachi ruumil on *meetriline* A-*aproksimatsiooniomadus*, kui tal on 1-tõkestatud A-aproksimatsiooniomadus. Kaasruumil X^* on *kaasoperaatoritega tõkestatud* A-*aproksimatsiooniomadus*, kui tal on tõkestatud $\{S^* \colon S \in A\}$-aproksimatsiooniomadus.

Kui hulk A on kumer ning sisaldab nulloperaatorit, siis räägitakse *kumeratest aproksimatsiooniomadustest*. Tõkestatud kumera aproksimatsiooniomaduse mõistesse on haaratud järgmised tuntud aproksimatsiooniomadused: Banachi ruumi X tõkestatud aproksimatsiooniomadus (kui $A = \mathcal{F}(X)$); paari (X, Y), kus Y on ruumi X kinnine alamruum, tõkestatud aproksimatsiooniomadus (kui $A =$

$\{S \in \mathcal{F}(X) \colon S(Y) \subset Y\}$); Banachi võre X tõkestatud positiivne aproksimatsiooniomadus (kui $A = \mathcal{F}(X)_+$ – kõik positiivsed lõplikumõõtmelised operaatorid). Ilmselt on ruumi X λ-tõkestatud aproksimatsiooniomadus samaväärne nii paari (X, X) kui ka paari $(X, \{0\})$ λ-tõkestatud aproksimatsiooniomadusega.

Tänu Enflo, Jamesi ja Lindenstraussi töödele teame (vt nt [LT, lk 34]), et Banachi ruumi aproksimatsiooniomadus ei kandu üle tema kaasruumile. Teisalt, kaasruumi tõkestatud aproksimatsiooniomadus kandub alati lähteruumi. Viimase väite tõestus meetrilise aproksimatsiooniomaduse kohta pärineb Grothendieckilt (vt [G, lause 40, lk 180]). Üldisel juhul järeldub see väide järgmisest Johnsoni [J] olulisest teoreemist.

Teoreem 1 (Johnson)**.** *Olgu X Banachi ruum. Olgu $1 \leq \lambda < \infty$. Kui kaasruumil X^* on λ-tõkestatud aproksimatsiooniomadus, siis on tal kaasoperaatoritega λ-tõkestatud aproksimatsiooniomadus.*

Vaatleme nüüd järgmisi väiteid:

(a) paaril (X, Y) on λ-tõkestatud aproksimatsiooniomadus;

(a*) paaril $(X^*, Y^\perp)$ on λ-tõkestatud aproksimatsiooniomadus.

Eelneva põhjal implikatsioon (a) $\Rightarrow$ (a*) üldjuhul ei kehti. Implikatsiooni (a*) $\Rightarrow$ (a) kehtivus erijuhul, kui $Y = \{0\}$ (või $Y = X$), on lihtsasti järeldatav Johnsoni teoreemist. Artiklis [OT] näidatakse, et implikatsioon (a*) $\Rightarrow$ (a) kehtib alati. Selleks üldistatakse Johnsoni teoreem kaasruumilt X^* paarile $(X^*, Y^\perp)$ järgmiselt.

Teoreem 2 (vrd [OT, teoreem 1.2])**.** *Olgu X Banachi ruum ja Y tema kinnine alamruum. Olgu $1 \leq \lambda < \infty$. Kui paaril $(X^*, Y^\perp)$ on λ-tõkestatud aproksimatsiooniomadus, siis on tal kaasoperaatoritega λ-tõkestatud aproksimatsiooniomadus.*

Teoreemi 2 tõestus artiklis [OT] tugineb lõplikumõõtmeliste operaatorite ruumi kaasruumi kirjeldusele integraalsete operaatorite kaudu, mis on antud Grothendiecki [G] poolt, ning Oja [O1] A-aproksimatsiooniomaduse kirjeldusele. Oja näitas (vt [O1, teoreem

2.1]), et erijuhul, kui A on operaatorideaali komponent (st $A = \mathcal{A}(X,X)$, kus $\mathcal{A}$ on operaatorideaal), saab tõkestatud A-aproksimatsiooniomadusi kirjeldada elementaarfunktsionaalide abil, mis on defineeritud hulgal A. Artikli [O1] teoreemi 2.1 tõestuse põhjal kehtib antud tulemus ka siis, kui A on ruumi $\mathcal{L}(X)$ vektoralamruum. Artiklis [V1] on töötatud välja tõkestatud kumera aproksimatsiooniomaduse kriteerium, mis laiendab artiklis [O1] saadud kirjeldust (vt teoreem 3).

Meenutame, et kui A on ruumi $\mathcal{L}(X)$ vektoralamruum, $x^{**} \in X^{**}$ ning $x^* \in X^*$, siis *elementaarfunktsionaal* $x^* \otimes x^{**} : A \to \mathbb{K}$ on defineeritud järgmiselt

$$(x^* \otimes x^{**})(T) = x^{**}(T^* x^*), \quad T \in A.$$

Meenutame ka hulga polaari mõistet. Olgu $\langle X, Y\rangle$ duaalne paar ning olgu M ruumi X alamhulk. Hulga M *polaar* on hulk

$$M^\circ := \{y \in Y : \operatorname{Re}\langle x, y\rangle \leq 1 \ \ \forall x \in M\},$$

kus $\operatorname{Re}\langle x, y\rangle$ tähistab arvu $\langle x, y\rangle$ reaalosa. Hulga M° polaar on ruumi X alamhulk, seda nimetatakse hulga M *bipolaariks* ning tähistatakse $M^{\circ\circ}$.

Märkus 1. Kirjanduses kasutatakse tihtipeale hulga M polaari nimetust tähistamaks tema *absoluutset polaari*, st hulka $\{y \in Y : |\langle x, y\rangle| \leq 1 \ \forall x \in M\}$. Need mõisted on eristatud näiteks raamatus [SchW].

Järgmises teoreemis on vaatluse all duaalne paar $\langle(\mathcal{L}(X))^{**}, (\mathcal{L}(X))^*\rangle$ ning elementaarfunktsionaalid, mis on defineeritud ruumil $\mathcal{L}(X)$.

Teoreem 3 (vt [V1, Teoreem 2.2])**.** *Olgu X Banachi ruum ja olgu A ruumi $\mathcal{L}(X)$ tõkestatud kumer alamhulk, mis sisaldab nulloperaatorit. Siis*

(a) *ruumil X on A-aproksimatsiooniomadus parajasti siis, kui leidub $\Phi \in A^{\circ\circ} \subset (\mathcal{L}(X))^{**}$ nii, et*

$$\Phi(x^* \otimes j_X x) = x^*(x) \ \ \forall x^* \in X^*, \ \forall x \in X;$$

(b) *kaasruumil X^* on kaasoperaatoritega A-aproksimatsiooniomadus parajasti siis, kui leidub $\Phi \in A^{\circ\circ} \subset (\mathcal{L}(X))^{**}$ nii, et*

$$\Phi(x^* \otimes x^{**}) = x^{**}(x^*) \quad \forall x^* \in X^*, \ \forall x^{**} \in X^{**}.$$

Märkus 2. Erijuhul, kui A on ruumi $\mathcal{L}(X)$ vektoralamruum ning teoreemis 3 asendada hulk A hulgaga $A \cap \lambda B_{\mathcal{L}(X)}$, ühtib teoreem 3 artikli [O1] teoreemi 2.1 vektoralamruumi versiooniga. Sel juhul, teoreemi bipolaarist põhjal (vt nt [SchW, lk 126]), $A^{\circ\circ} = A^{**}$ ning $(A \cap \lambda B_{\mathcal{L}(X)})^{\circ\circ} \subset \lambda(B_{\mathcal{L}(X)})^{\circ\circ} = \lambda B_{(\mathcal{L}(X))^{**}}$.

Teoreemi 3 rakendusena on artiklis [V1] näidatud, et Banachi ruumi meetrilist kumerat aproksimatsiooniomadust saab üle kanda tema kaasruumile erijuhul, kui lähteruumil on ühese jätkamise omadus (vt järeldus 4).

Banachi ruumil X on *ühese jätkamise omadus*, kui ainsaks operaatoriks $T \in \mathcal{L}(X^{**})$, mille korral $\|T\| \leq 1$ ja $T|_X = I_X$ (st $Tj_X x = j_X x$ iga $x \in X$ korral), on ühikoperaator $I_{X^{**}}$. See omadus on näiteks nulliks koonduvate arvjadade ruumi c_0 kinnistel alamruumidel.

Ühese jätkamise omaduse mõiste võtsid kasutusele Godefroy ja Saphar artiklis [GS]. Muuhulgas näitasid nad, et kui Banachi ruumil X on see omadus, siis erijuhul, kui $A = \mathcal{F}(X)$ või $A = \mathcal{K}(X)$ (ruumis X tegutsevate kompaktsete operaatorite ruum), saab meetrilist A-aproksimatsiooniomadust üle kanda ruumilt X tema kaasruumile X^*. Artikli [O1] tulemuste tõestuste põhjal kehtib antud väide ka juhul, kui A on ruumi $\mathcal{L}(X)$ vektoralamruum. Kahjuks ei võimalda need tulemused üle kanda meetrilist positiivset aproksimatsiooniomadust. Artiklis [V1] on saadud, kasutades artikli [O1] järelduse 2.5 tõestuse ideed ning teoreemi 3, järgmine tulemus, mis on rakendatav ka Banachi võredes.

Järeldus 4 (vt [V1, järeldus 3.1])**.** *Olgu X Banachi ruum, millel on ühese jätkamise omadus. Olgu A ruumi $\mathcal{L}(X)$ kumer alamhulk, mis sisaldab nulloperaatorit. Kui ruumil X on meetriline A-aproksimatsiooniomadus, siis on kaasruumil X^* kaasoperaatoritega meetriline A-aproksimatsiooniomadus.*

Märkus 3. Üldiselt ei võimalda ühese jätkamise omadus tõsta λ-tõkestatud aproksimatsiooniomadust lähetruumilt kaasruumile, vähemalt juhul, kui $\lambda \geq 6$ (vt täpsemalt arutelu artiklis [OT] pärast teoreemi 5.2).

3. Tõkestatud kumerate aproksimatsiooniomaduste ülekandumine kaasruumidesse

Johnson ja Oikhberg [JO] näitasid, et tõkestatud aproksimatsiooniomadust saab Banachi ruumilt tema kaasruumile üle kanda juhul, kui ruum on laiendatavalt lokaalselt refleksiivne (LLR). Antud geomeetrilise omaduse avastas Rosenthal (vt [JO]).

Definitsioon. Banachi ruum X on λ-*laiendatavalt lokaalselt refleksiivne*, kui kõigi lõplikumõõtmeliste alamruumide $E \subset X^{**}$ ja $F \subset X^*$ ning iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub operaator $T \in \mathcal{L}(X^{**})$ nii, et $T(E) \subset X$, $\|T\| \leq \lambda + \varepsilon$ ja $x^*(Tx^{**}) = x^{**}(x^*)$ iga $x^{**} \in E$ ja $x^* \in F$ korral.

Teoreem 5 (Johnson–Oikhberg)**.** *Olgu X Banachi ruum. Olgu $1 \leq \lambda, \mu < \infty$. Kui ruum X on λ-laiendatavalt lokaalselt refleksiivne ja tal on μ-tõkestatud aproksimatsiooniomadus, siis on kaasruumil X^* $\lambda\mu$-tõkestatud aproksimatsiooniomadus.*

Johnson–Oikhbergi teoreemi (vt [JO, teoreem 3.1(1)]) tõestus põhineb lokaalse refleksiivsuse printsiibil (LRP). Artikli [OV] põhiteoreem (vt teoreem 6) näitab, et kumerat tõkestatud aproksimatsiooniomadust saab lähteruumilt kaasruumile üle kanda juhul, kui lähteruum rahuldab LLR ning LRP alljärgnevaid nõrgendatud vorme.

Definitsioon. Olgu X Banachi ruum ning olgu C ruumi $\mathcal{L}(X^{**})$ alamhulk. Olgu $1 \leq \lambda < \infty$. Ütleme, et ruum X on C *tüüpi λ-laiendatavalt lokaalselt refleksiivne*, kui kõigi lõplikumõõtmeliste alamruumide $E \subset X^{**}$ ja $F \subset X^*$ ning iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub operaator $T \in C$ nii, et $T(E) \subset X$, $\|T\| \leq \lambda + \varepsilon$ ja

$$|x^*(Tx^{**}) - x^{**}(x^*)| \leq \varepsilon \ \ \forall x^{**} \in S_E, \ \forall x^* \in S_F.$$

Ilmselt järeldub ruumi λ-laiendatavast lokaalsest refleksiivsusest tema $\mathcal{L}(X^{**})$ tüüpi λ-laiendatav lokaalne refleksiivsus.

Definitsioon. Olgu X Banachi ruum ning olgu A ja B vastavalt ruumide $\mathcal{L}(X)$ ja $\mathcal{L}(X^{**})$ alamhulgad. Ütleme, et ruumis X kehtib *$B \to A$ tüüpi lokaalse refleksiivsuse printsiip*, kui iga operaatori $T \in B$, kõigi lõplikumõõtmeliste alamruumide $E \subset X^{**}$ ja $F \subset X^*$ ning iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub operaator $S \in A$ nii, et $\|S\| \leq \|T\| + \varepsilon$ ja

$$|(Tx^{**})(x^*) - x^{**}(S^*x^*)| \leq \varepsilon \ \ \forall x^{**} \in S_E, \ \forall x^* \in S_F.$$

Näide. Kehtivad järgmised väited.

(1) Igas Banachi ruumis X kehtib $\mathcal{F}(X^{**}) \to \mathcal{F}(X)$ tüüpi LRP (tuleneb LRPst).

(2) Igas Banachi ruumis X kehtib $\{T \in \mathcal{F}(X^{**}) : T(Y^{\perp\perp}) \subset Y^{\perp\perp}\} \to \{S \in \mathcal{F}(X) : S(Y) \subset Y\}$ tüüpi LRP (kehtib [O2] põhjal).

(3) Igas Banachi võres X kehtib $\mathcal{F}(X^{**})_+ \to \mathcal{F}(X)_+$ tüüpi LRP (järeldub artikli [LisO] teoreemist 5.6, vt [OV, teoreem 3.7]).

Teoreem 6 (vt [OV, teoreem 2.5])**.** *Olgu X Banachi ruum ning A ruumi $\mathcal{L}(X)$ kumer alamhulk, mis sisaldab nulloperaatorit. Olgu B ja C ruumi $\mathcal{L}(X^{**})$ sellised alamhulgad, et $\{S^{**} : S \in A\} \circ C \subset B$. Olgu $1 \leq \lambda, \mu < \infty$. Eeldame, et ruumis X kehtib $B \to A$ tüüpi lokaalse refleksiivsuse printsiip. Kui ruum X on C tüüpi λ-laiendatavalt lokaalselt refleksiivne ning tal on μ-tõkestatud A-aproksimatsiooniomadus, siis on tal $\lambda\mu$-tõkestatud duaalne A-aproksimatsiooniomadus.*

Võttes $A = \mathcal{F}(X)$, $B = \mathcal{F}(X^{**})$ ja $C = \mathcal{L}(X^{**})$, saame näitest (1) ja teoreemist 6 vahetult alloleva järelduse 7 ning seega ka Johnson–Oikhbergi teoreemi. Viimase jaoks piisab vaid märgata, et ilmselt järeldub väitest "ruumil X on duaalne $\lambda\mu$-tõkestatud aproksimatsiooniomadus" väide "kaasruumil X^* on $\lambda\mu$-tõkestatud aproksimatsiooniomadus".

Järeldus 7 (vt [OV, järeldus 3.1])**.** *Olgu X Banachi ruum. Olgu $1 \leq \lambda, \mu < \infty$. Kui ruum X on $\mathcal{L}(X^{**})$ tüüpi λ-laiendatavalt lokaalselt refleksiivne ja tal on μ-tõkestatud aproksimatsiooniomadus, siis on tal $\lambda\mu$-tõkestatud duaalne aproksimatsiooniomadus.*

Märkus 4. Johnson–Oikhbergi teoreemi tõestus artiklis [JO] tugineb LRP versioonile, mis väidab, et Banachi ruum X ja tema teine kaasruum X^{**} on "lokaalselt peaaegu samad". Järelduse 7 tõestus kasutab LRP versiooni, mis väidab ruumide $\mathcal{F}(X^{**})$ ja $\mathcal{F}(X)$ "lokaalset samasust".

Artiklis [OV] on laiendatud LLR mõistet paaride jaoks järgmiselt.

Definitsioon. Olgu X Banachi ruum ja olgu Y tema kinnine alamruum. Olgu $1 \leq \lambda < \infty$. Ütleme, et *paar* (X, Y) on λ*-laiendatavalt lokaalselt refleksiivne*, kui ruum X on $\{T \in \mathcal{L}(X^{**})\colon T(Y^{\perp\perp}) \subset Y^{\perp\perp}\}$ tüüpi λ-laiendatavalt lokaalselt refleksiivne.

Paari $(X, \{0\})$ korral ühtib allolev teoreem järeldusega 7.

Teoreem 8 (vt [OV, teoreem 3.5])**.** *Olgu X Banachi ruum ja olgu Y tema kinnine alamruum. Olgu $1 \leq \lambda, \mu < \infty$. Kui paar (X, Y) on λ-laiendatavalt lokaalselt refleksiivne ning tal on μ-tõkestatud aproksimatsiooniomadus, siis on paaril (X, Y) $\lambda\mu$-tõkestatud duaalne aproksimatsiooniomadus.*

Tõestus. Olgu

$$A = \{S \in \mathcal{F}(X)\colon S(Y) \subset Y\},\ B = \{T \in \mathcal{F}(X^{**})\colon T(Y^{\perp\perp}) \subset Y^{\perp\perp}\}$$

ja $C = \{T \in \mathcal{L}(X^{**})\colon T(Y^{\perp\perp}) \subset Y^{\perp\perp}\}$. Siis $\{S^{**}\colon S \in A\} \circ C \subset B$. Tõepoolest, kui $S \in \mathcal{L}(X)$ on selline, et $S(Y) \subset Y$, siis ilmselt $S^{*}(Y^{\perp}) \subset Y^{\perp}$. Järelikult $S^{**}(Y^{\perp\perp}) \subset Y^{\perp\perp}$. Seega me saame teoreemi väite vahetult näitest (2) ja teoreemist 6. $\square$

Märkus 5. Vaatleme veelkord väiteid (a) ja (a*). Teoreemist 8 järeldub vahetult, et erijuhul, kui paar (X, Y) on 1-LLR, kehtib ka implikatsioon (a) $\Rightarrow$ (a*).

Artiklis [OV] on laiendatud LLR mõistet ka Banachi võrede jaoks. Meenutame, et $\mathcal{L}(X)_+$ tähistab kõiki positiivseid pidevaid lineaarseid operaatoreid.

Definitsioon. Olgu X Banachi võre. Olgu $1 \le \lambda < \infty$. Ütleme, et X on *positiivselt λ-laiendatavalt lokaalselt refleksiivne*, kui X on $\mathcal{L}(X)_+$ tüüpi λ-laiendatavalt lokaalselt refleksiivne.

Võttes $A = \mathcal{F}(X)_+$, $B = \mathcal{F}(X^{**})_+$ ning $C = \mathcal{L}(X^{**})_+$, saame näitest (3) ja teoreemist 6 vahetu järeldusena järgmise positiivse aproksimatsiooniomaduse versiooni Johnson–Oikhbergi teoreemile (või järeldusele 7).

Teoreem 9 (vt [OV, teoreem 3.10])**.** *Olgu X Banachi võre. Olgu $1 \le \lambda, \mu < \infty$. Kui X on positiivselt λ-laiendatavalt lokaalselt refleksiivne ning tal on μ-tõkestatud positiivne aproksimatsiooniomadus, siis on tal $\lambda\mu$-tõkestatud duaalne positiivne aproksimatsiooniomadus.*

Rosenthal tõestas (vt [JO, teoreem 3.1(2)]), et Johnson–Oikhbergi teoreemis kehtib ka vastupidine tugevam väide.

Teoreem 10 (Rosenthal)**.** *Olgu X Banachi ruum. Olgu $1 \le \lambda < \infty$. Kui kaasruumil X^* on λ-tõkestatud aproksimatsiooniomadus, siis lähteruum X on λ-laiendatavalt lokaalselt refleksiivne.*

Artiklis [OV] on Rosenthali teoreemi laiendatud järgmiselt. Alljärgnevas tähistab $\mathcal{W}(X)$ ruumis X tegutsevate nõrgalt kompaktsete operaatorite ruumi.

Lause 11 (vt [OV, lause 4.2])**.** *Olgu X Banachi ruum. Olgu A ruumi $\mathcal{W}(X)$ alamhulk. Olgu $1 \le \lambda < \infty$. Kui kaasruumil X^* on kaasoperaatoritega λ-tõkestatud A-aproksimatsiooniomadus, siis on lähteruum X $\{S^{**} : S \in A\}$ tüüpi λ-laiendatavalt lokaalselt refleksiivne.*

Banachi võrede korral saab Rosenthali teoreem järgmise kuju.

Teoreem 12 (vt [OV, teoreem 4.3])**.** *Olgu X Banachi võre. Olgu $1 \leq \lambda < \infty$. Kui kaasvõrel X^* on λ-tõkestatud positiivne aproksimatsiooniomadus, siis on X positiivselt λ-laiendatavalt lokaalselt refleksiivne.*

Tõestus. Artikli [LisO] lauuse 5.7 põhjal on väited "kaasvõrel X^* on λ-tõkestatud positiivne aproksimatsiooniomadus" ning "kaasvõrel X^* on kaasoperaatoritega λ-tõkestatud positiivne aproksimatsiooniomadus" samaväärsed. Olgu $A = \mathcal{F}(X)_+$. Siis $A \subset \mathcal{W}(X)$ ning $\{S^{**} : S \in A\} \subset \mathcal{F}(X^{**})_+ \subset \mathcal{L}(X^{**})_+$. Teoreemi väide järeldub vahetult lausest 11. □

Allolev teoreem näitab, et tõkestatud kumerat aproksimatsiooniomadust saab üle kanda Banachi ruumilt tema kaasruumile eeldusel, et kaasruumil on tõkestatud kumera aproksimatsiooniomaduse nõrgem versioon.

Teoreem 13 (vt [OV, teoreem 4.4])**.** *Olgu X Banachi ruum. Olgu A ruumi $\mathcal{L}(X)$ kumer alamhulk, mis sisaldab nulloperaatorit ning olgu B ruumi $\mathcal{W}(X)$ selline alamhulk, et $A \circ B \subset A$. Olgu $1 \leq \lambda, \mu < \infty$. Kui kaasruumil X^* on kaasoperaatoritega λ-tõkestatud B-aproksimatsiooniomadus ja ruumil X on μ-tõkestatud A-aproksimatsiooniomadus, siis on ruumil X $\lambda\mu$-tõkestatud duaalne A-aproksimatsiooniomadus.*

Tõestus. Lause 11 põhjal on ruum X $C := \{T^{**} : T \in B\}$ tüüpi λ-LLR. Definitsioonist on selge, et igas Banachi ruumis kehtib $\{S^{**} : S \in A\} \to A$ tüüpi LRP. Kuna $A \circ B \subset A$, siis $\{S^{**} : S \in A\} \circ C \subset \{S^{**} : S \in A\}$. Teoreemi 6 rakendades saame, et ruumil X on $\lambda\mu$-tõkestatud duaalne A-aproksimatsiooniomadus. □

Lõpetuseks toome ära üllatava tulemuse, mis näitab, et erijuhul, kui Banachi ruumil on kumera tõkestatud aproksimatsiooniomaduse nõrgem versioon, võimaldab ühese jätkamise omadus tõsta tõkestatud kumerat aproksimatsiooniomadust Banachi ruumilt tema kaasruumile.

Teoreem 14 (vt [V2, teoreem 5.51]). *Olgu X Banachi ruum, millel on ühese jätkamise omadus. Olgu A ja B vastavalt ruumide $\mathcal{L}(X)$ ja $\mathcal{W}(X)$ sellised kumerad alamhulgad, et $A \circ B \subset A$ ning mõlemad sisaldavad nulloperaatorit. Olgu $1 \leq \lambda < \infty$. Kui ruumil X on meetriline B-aproksimatsiooniomadus ja λ-tõkestatud A-aproksimatsiooniomadus, siis on tal λ-tõkestatud duaalne A-aproksimatsiooniomadus.*

Tõestus. Järelduse 4 põhjal on kaasruumil X^* kaasoperaatoritega meetriline B-aproksimatsiooniomadus. Teoreemist 13 saame vahetult, et ruumil X on λ-tõkestatud duaalne A-aproksimatsiooniomadus. □

Kirjandus

[FJP] Figiel, T., Johnson, W. B. A. Pełczyński. Some approximation properties of Banach spaces and Banach lattices. *Israel J. Math.* **183** (2011), 199–231.

[GS] Godefroy, G., Saphar, P. D. Duality in spaces of operators and smooth norms on Banach spaces. *Illinois J. Math.* **32** (1988), 672–695.

[G] Grothendieck, A. *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).

[J] Johnson, W. B. On the existence of strongly series summable Markushevich bases in Banach spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **157** (1971), 481–486.

[JO] Johnson, W. B., Oikhberg, T. Separable lifting property and extensions of local reflexivity. *Illinois J. Math.* **45** (2001), 123–137.

[LT] Lindenstrauss, J., Tzafriri, L. *Classical Banach Spaces I.* Springer, Berlin, 1977.

[LisO] Lissitsin, A., Oja, E. The convex approximation property of Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.* **379** (2011), 616–626.

[OR] Oikhberg, T., Rosenthal, H. P. Extension properties for the space of compact operators. *J. Funct. Anal.* **179** (2001), 251–308.

[O1] Oja, E. Lifting bounded approximation properties from Banach spaces to their dual spaces. *J. Math. Anal. Appl.* **323** (2006), 666–679.

[O2] Oja, E. Principle of local reflexivity respecting subspaces. *Adv. Math.* **258**

(2014), 1–12.

[OT] Oja, E., Treialt, S. Some duality results on bounded approximation properties of pairs. *Studia Math.* **217** (2013), 79–94.

[OV] Oja, E., S. Veidenberg, Lifting convex approximation properties from Banach spaces to their dual spaces and the related local reflexivity. *J. Math. Anal. Appl.* **436** (2016), 729–739.

[SchW] Schaefer, H. H., Wolff, M. P. *Topological Vector Spaces.* Springer, New York, 1999.

[V1] Veidenberg, S. A characterization of bounded convex approximation properties. *Arch. Math.* **107** (2016), 523–529.

[V2] Veidenberg, S. Lifting bounded approximation properties from Banach spaces to their dual spaces. *Dissert. Math. Univ. Tartuensis* **117**, University of Tartu Press, Tartu, 2017.