Pöördülesanne tuletise järgu ja allikafunktsiooni määramiseks murrulise tuletisega difusioonivõrrandis lõpphetkel tehtud mõõtmiste põhjal

Jaan Janno ja Nataliia Kinash
Tallinna Tehnikaülikool

1 Sissejuhatus

Aeglase difusiooni kirjeldamisel mitmesugustes poorsetes, bioloogilistes ja fraktaalsetes keskkondades kasutatakse diferentsiaalvõrrandeid, mis sisaldavad murrulisi tuletisi ajamuutuja suhtes. Taoliste võrrandite tuletamisel lähtutakse ajas pidevast kuid ruumiliselt diskreetsest juhuslikust protsessist mikrotasemel ja minnakse piirväärtusena üle pidevale mudelile ruumimuutuja suhtes makrotasemel.

Makrotasemel ruumiliselt homogeense keskkonna korral on vastav võrrand järgmine [1]:

$$u_t(t,x) = \varkappa D^{1-\alpha}\Delta u(t,x) + Q(t,x), \tag{1}$$

kus $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on ruumimuutuja, t on aeg, u on füüsikalise protsessi olekumuutuja, Q on allikafunktsioon, Δ on Laplace'i operaator ja $\varkappa > 0$ on konstant. Sümbol $D^\gamma w$ tähistab γ järku Riemann-Liouville'i murrulist tuletist funktsioonist w. Juhul $\gamma \in (0,1)$ on see tuletis defineeritud järgmise valemiga:

$$D^\gamma w(t) = \frac{d}{dt} I^{1-\gamma} w(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{(t-\tau)^{-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)} w(\tau)d\tau,$$

kus

$$I^s w(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{s-1}}{\Gamma(s)} w(\tau)d\tau \tag{2}$$

on s järku murruline integraal funktsioonist w. Me eeldame, et $\alpha \in (0,1)$.

Rakendades operaatorit $I^{1-\alpha}$ võrrandile (1) teisendub see järgmisele ekvivalentsele kujule:

$$\partial^\alpha u(t,x) = \varkappa \Delta u(t,x) + F, \quad F = I^{1-\alpha} Q, \tag{3}$$

kus $\partial^\alpha w(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} w'(\tau) d\tau$ tähistab α järku Caputo murrulist tuletist funktsioonist w. Võrrandit (3) tuntakse kirjanduses "normaalkujulise" murrulise ajatuletisega difusioonivõrrandi nime all. Rõhutame, et võrrandi (3) vabaliige F ei oma otsest füüsikalist sisu – tegemist on füüsikalise allikafunktsiooni murrulise integraaliga.

Caputo tuletise $\partial^\alpha w$ saab esitada kujul $D^\alpha[w - w(0)]$, mis ei sisalda argumentfunktsiooni w esimest järku tuletist. Seetõttu esitame edaspidi võrrandi (3) üldisemal kujul $D^\alpha[u - u(0,\cdot)] = \varkappa \Delta u + I^{1-\alpha} Q$.

Olgu $\Omega \in \mathbb{R}^n$ lahtine tõkestatud piirkond piisavalt sileda rajaga $\partial\Omega$ ja $T > 0$. Lisades diferentsiaalvõrrandile alg- ja rajatingimuse, saame *otsese ülesande* funktsiooni u leidmiseks:

$$D^\alpha (u - \varphi)(t,x) = \varkappa \Delta u(t,x) + I^{1-\alpha} Q(t,x), \quad x \in \Omega,\ t \in (0,T), \tag{4}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \tag{5}$$

$$u(t,x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T). \tag{6}$$

Teatavatel eeldustel Q ja φ kohta on võimalik tõestada, et ülesandel (4)–(6) on parajasti üks lahend. Vastava teoreemi formuleerime järgmises alajaotises.

Nüüd vaatleme juhtu, kui funktsioon Q on ajamuutujast sõltuva ja ruumimuutujast sõltuva funktsiooni korrutis, st

$$Q(t,x) = q(t) f(x). \tag{7}$$

Püstitame kaks *pöördülesannet.*

PÜ1 Olgu antud α, $\varkappa$, q ja φ. Leida funktsioon f, mille korral ülesande (4)–(6) lahend u allikafunktsiooni (7) korral rahuldab järgmist lõpptingimust:

$$u(T,x) = \psi(x), \quad x \in \Omega, \tag{8}$$

kus ψ on etteantud funktsioon.

PÜ Olgu antud $\varkappa$, q ja φ. Leida suurustepaar (α, f), mille korral ülesande (4)–(6) lahend u allikafunktsiooni (7) korral rahuldab lõpptingimust (8) etteantud funktsiooniga ψ.

PÜ1 püstitus on loomulik: etteantud x-st sõltuva funktsiooni ψ alusel määratakse teist x-st sõltuvat funktsiooni f. PÜ1 ja sellele lähedaste ülesannete kohta on avaldatud mitmeid teoreetilisi tulemusi (vt [2, 5, 6, 7]). Näiteks eelduste $q \in L_\infty(0,T)$, $q(t) \geq q_0 > 0$ p. k. $t \in (0,T)$,[12] $\varphi \in L_2(\Omega)$ ja $\psi \in H_0^2(\Omega)$ korral, kus

$$H_0^2(\Omega) = \{z \in H^2(\Omega) \,:\, z(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\},$$

$$H^2(\Omega) = \{z \in L_2(\Omega) \,:\, z_{x_i}, z_{x_i x_j} \in L_2(\Omega)\ i,j = 1,\ldots,n\},$$

eksisteerib ülesandel PÜ1 parajasti üks lahend ruumis $L_2(\Omega)$ ([6] Teoreem 3). Et tõestada siledama lahendi olemasolu, tuleb eeldada ka andmete suuremat siledust. Näiteks täiendavad eeldused $\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi \in L_2(\Omega)$, $\frac{\partial}{\partial x_i}\psi \in H_0^2(\Omega)$ garanteerivad, et $\frac{\partial}{\partial x_i} f \in L_2(\Omega)$ jne.

Niisuguses kontekstis on ülesandel PÜ lõpmata palju lahendeid, sest lahendipaar (α, f) eksisteerib iga $\alpha \in (0,1)$ korral. Võimalus üheselt määrata nii α kui ka f tekib juhul, kui f on *a priori* piisavalt sile, kuid φ ei ole liiga sile.

Et põhjendada seda väidet, vaatleme probleemi teisest vaatenurgast. Tõlgendame funktsioonipaari $[\varphi, f]$ kui sisendit ja funktsiooni ψ kui väljundit. Arv α on parameeter. PÜ sisuks on sisendi teise komponendi ja parameetri määramine väljundi põhjal. Väljund on võimalik esitada kahe liidetava summana: $\psi = \psi_\varphi + \psi_f$, kus ψ_φ on sisendipaarile $[\varphi, 0]$ vastav väljund ja ja ψ_f on sisendipaarile $[0, f]$ vastav väljund. Kui f on siledam kui φ, siis ψ_f on siledam kui ψ_φ. Suurte sageduste korral domineerivad väiksema siledusega funktsiooni ψ_φ Fourier' kordajad suurema siledusega funktsiooni ψ_f Fourier' kordajate üle. Kui sagedus läheneb lõpmatusele, on võimalik väjundikomponendist ψ_φ eraldada võrrand parameetri α jaoks.

[12] p. k. on lühend fraasist "peaaegu kõikjal".

2 Vajalikud mõisted ja abitulemused

Olgu Y Banachi ruum. Defineerime mõned ruumid, mis sisaldavad abstraktseid funktsioone lõigul $[0, T]$ väärtustega ruumis Y. Abstraktsed Lebesgue'i ruumid on defineeritud järgmiselt:

$$L_p((0,T);Y) = \Big\{ w : (0,T) \to Y, \ \ \|w\|_{L_p((0,T);Y)} :=$$
$$:= \Big[\int_0^T \|w(t,\cdot)\|^p dt \Big]^{\frac{1}{p}} < \infty \Big\},$$
$$1 < p < \infty,$$
$$L_\infty((0,T);Y) = \Big\{ w : (0,T) \to Y, \ \ \|w\|_{L_\infty((0,T);Y)}$$
$$:= \operatorname*{ess\,sup}_{t \in (0,T)} \|w(t,\cdot)\| < \infty \Big\}.$$

Integraal $\int_0^T w(t,\cdot)dt$ on nendes ruumides defineeritud Bochneri mõttes. Peale selle defineerime lõigul $[0, T]$ antud abstraktsete pidevate funktsioonide ruumi $C([0,T];Y)$ normiga $\|w\|_{C([0,T];Y)} := \max_{t \in [0,T]} \|w(t,\cdot)\|$.

Järgnevalt olgu X Hilberti ruum[13] ja toome sisse järgmised abstraktsete funktsioonide ruumid:

$$H_p^s((0,T);X) = \{ w|_{(0,T)} : w \in H_p^s(\mathbb{R};X) \}, \ p \in (1,\infty), \ s > 0,$$
$$H_p^s(\mathbb{R};X) = \{ w \in L_p(\mathbb{R};X) : \mathcal{F}^{-1}|\xi|^s \mathcal{F} w \in L_p(\mathbb{R};X) \},$$

kus sümbol $\mathcal{F}$ tähistab Fourier' teisendust argumendiga ξ, ja eraldame neist välja alamruumid:

$$_0H_p^s((0,T);X) = \{ w|_{(0,T)} : w \in H_p^s(\mathbb{R};X), \operatorname{supp} w \subseteq [0,\infty) \},$$
$$p \in (1,\infty), \ s > 0.$$

Erijuhul $X = \mathbb{R}$ kasutame lühendatud tähistusviisi $H_p^s(0,T)$ ja $_0H_p^s(0,T)$.

[13]Ruumid $H_p^s((0,T);X)$ on võimalik defineerida ka juhul, kui X on üldisemalt Banachi ruum klassist $\mathcal{HT}$ (vt [8], p. 216).

Järgnev lemma ütleb meile, et ruum ${}_0H_p^s((0,T);X)$ on murrulise integraaloperaatori I^s kujutishulk ruumil $L_p((0,T);X)$ (tõestus asub [9], lk 28–29).

Lemma 1. *Olgu $s \in (0,1)$ ja $p \in (1,\infty)$. Murruline integraaloperaator I^s (defineeritud valemiga (2)) on bijektsioon ruumist $L_p((0,T);X)$ ruumi ${}_0H_p^s((0,T);X)$ ja tema pöördoperaator on Riemann-Liouville'i murruline tuletis $D^s = \frac{d}{dt}I^{1-s}$.*

Oluline vahend murruliste tuletistega diferentsiaalvõrrandite analüüsimisel on Mittag-Leffleri funktsioonide pere. Ühe- ja kaheparameetrilised Mittag-Leffleri funktsioonid E_α ja $E_{\alpha,\beta}$ on defineeritud valemitega

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \quad \text{ja} \quad E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}.$$

Neist valemitest järeldub vahetult, et $E_{\alpha,1} = E_\alpha$. Juhul $\alpha > 0$, $\beta > 0$ on $E_{\alpha,\beta}$ täisfunktsioon. Juhul $\alpha \in (0,1]$ on funktsioonid $E_\alpha(-t)$ ja $E_{\alpha,\alpha}(-t)$ täielikult monotoonsed poollõigul $[0,\infty)$ [14] (vt [3]). Meil läheb vaja ka järgmist konvolutsioonivalemit:

$$\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda(t-\tau)^\alpha)\tau^{-\gamma} d\tau =$$
$$= \Gamma(1-\gamma)t^{\alpha-\gamma}E_{\alpha,1+\alpha-\gamma}(-\lambda t^\alpha), \quad t > 0, \tag{9}$$

mis kehtib juhul $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\gamma < 1$ [3].

Funktsioonil $E_\alpha(-t)$ on $\alpha \in (0,1)$ korral järgmine asümptootika [3]:

$$E_\alpha(-t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)t} + O\Big(\frac{1}{t^2}\Big), \quad \text{kui} \quad t > 0,\ t \to \infty\,. \tag{10}$$

Kuna $E_\alpha(-t)$ on tõkestatud poollõigul $[0,\infty)$, siis seosest (10) järeldub, et leidub konstant c_α nii, et

$$E_\alpha(-t) \le \frac{c_\alpha}{1+t} \le \frac{c_\alpha}{t}, \quad t > 0. \tag{11}$$

[14] Funktsioon f on täielikult monotoonne poollõigul $[0,\infty)$, kui $f \in C^\infty[0,\infty)$ ja $(-1)^i f^{(i)}(t) \ge 0$, $t \in [0,\infty)$, $i = 0,1,2,\ldots$

Siirdume nüüd otsese ülesande (4)–(6) vaatlemise juurde. Tähistagu $\|\cdot\|$ ja $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ruumi $L_2(\Omega)$ normi ja skalaarkorrutist. Defineerime operaatori $L = -\varkappa\Delta$ määramispiirkonnaga $H_0^2(\Omega)$ ruumis $L_2(\Omega)$.

Olgu $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ operaatori L omaväärtused ja $v_1, v_2, \ldots$ omaväärtustele $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots$ vastavad omafunktsioonid, mis on ortonormeeritud ruumis $L_2(\Omega)$. On hästi teada, et funktsioonidejada $v_k,\ k \in \mathbb{N}$, moodustab baasi ruumis $L_2(\Omega)$.

Nüüd oleme jõudnud niikaugele, et saame defineerida ruumid, milles me otsese ülesande (4)–(6) lahendit otsime. Nendeks ruumideks on

$$\mathcal{U}_{r,\alpha} = \{u \in L_r((0,T); H_0^2(\Omega)) \cap C([0,T]; L_2(\Omega)) \ :$$

$$u - u(0,\cdot) \in {}_0H_r^{\alpha}((0,T); L_2(\Omega))\},$$

kus $r \in (1,\infty)$. Taolistesse ruumidesse kuuluv lahend on tugev lahend.[15] Tõepoolest, seos $u \in L_r((0,T); H_0^2(\Omega))$ garanteerib, et $\Delta u \in L_r((0,T); L_2(\Omega))$ ja tingimusest $u - u(0,\cdot) \in {}_0H_r^{\alpha}((0,T); L_2(\Omega))$ järeldub Lemma 1 põhjal, et $D^{\alpha}(u - u(0,\cdot)) \in L_r((0,T); L_2(\Omega))$. Peale selle võimaldab omadus $u \in C([0,T]; L_2(\Omega))$ käsitleda algtingimust (5).

Järgnevalt sõnastame kaks lemmat ja ühe eelteoreemi, mille tõestused võib leida artiklist [4].

Lemma 2. *Olgu $\varphi \in L_2(\Omega)$ ja $Q \in L_\infty((0,T); L_2(\Omega))$. Siis omab ülesanne* (4)–(6) *ühest lahendit hulgas* $\bigcup\limits_{r\in(1,\frac{1}{\alpha})} \mathcal{U}_{r,\alpha}$.

Olgu märgitud, et tugeva lahendi olemasolu ruumi $L_2(\Omega)$ kuuluva algtingimuse φ korral on võimalik tänu sellele, et võrrandis (4) esineva ajatuletise järk α on ühest väiksem. Tavalisele, esimest järku ajatuletist sisaldavale difusioonivõrrandile püstitatud päripidiülesande lahendi kõrgeimat järku tuletised võivad $\varphi \in L_2(\Omega)$

[15] Diferentsiaalvõrrandi tugevaks lahendiks nimetatakse lahendit, mille korral kõik võrrandis esinevad lahendi tuletised kuuluvad mingisse Lebesgue'i ruumi, mis on defineeritud võrrandi kehtivuspiirkonnas. Tegemist on pisut üldisema mõistega kui klassikaline lahend, mille korral nõutakse võrrandis esinevate lahendi tuletiste pidevust.

ja $Q = 0$ korral olla tugevalt singulaarsed punktis $t = 0$ ja tugeva lahendi garanteerimiseks tuleb eeldada algtingimuse suuremat siledust.

Nagu sissejuhatuses mainitud, kasutame PÜ analüüsimisel Fourier' meetodit. Rakendame seda meetodit kõigepealt otsesele ülesandele. Toome sisse järgmised tähised:

$$u_k(t) = \langle u(t,\cdot), v_k\rangle, \ \ Q_k(t) = \langle Q(t,\cdot), v_k\rangle, \ \ \varphi_k = \langle \varphi, v_k\rangle, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Eelteoreem 1. *Eeldame, et $\varphi \in L_2(\Omega)$, $Q \in L_\infty((0,T); L_2(\Omega))$. Olgu $u \in \mathcal{U}_{r,\alpha}$, kus $r \in (1,\infty)$, ülesande* (4)–(6) *lahend. Siis kuuluvad funktsiooni u Fourier' kordajad u_k, $k \in \mathbb{N}$, ruumi*

$$\widehat{\mathcal{U}}_{r,\alpha} = \{w \in C[0,T] \,:\, w - w(0) \in {}_0H^\alpha_r(0,T)\}$$

ja on järgmise ülesannetejada lahendid:

$$D^\alpha(u_k - \varphi_k)(t) + \lambda_k u_k(t) = F_k(t), \ \ t \in (0,T), \tag{12}$$

$$u_k(0) = \varphi_k, \tag{13}$$

kus $k \in \mathbb{N}$ ja $F_k = I^{1-\alpha}Q_k \in L_\infty(0,T)$.

Lemma 3.

(Ülesande (12), (13) lahendi ühesus) *Olgu $\varphi_k = 0$ ja $Q_k = 0$. Kui $u_k \in \widehat{\mathcal{U}}_{r,\alpha}$, kus $r \in (1,\infty)$, on ülesande (12), (13) lahend, siis $u_k = 0$.*

(Ülesande (12), (13) lahendi olemasolu) *Olgu $Q_k \in L_\infty(0,T)$. Siis omab ülesanne (12), (13) lahendit hulgas $\bigcup_{r\in(1,\infty)} \widehat{\mathcal{U}}_{r,\alpha} \subset C[0,T]$. See lahend avaldub valemiga*

$$u_k(t) = \varphi_k E_\alpha(-\lambda_k t^\alpha) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k (t-\tau)^\alpha) F_k(\tau) d\tau. \tag{14}$$

Siinkohal sobib taas tuua paralleel tavalisele difusioonivõrrandile püstitatud otsese ülesandega, mille lahendi u Fourier' kordaja u_k rahuldab järgmist ülesannet:

$$u_k'(t) + \lambda_k u_k(t) = F_k(t), \ \ t \in (0,T), \qquad u_k(0) = \varphi_k,$$

ja teatavasti avaldub valemiga

$$u_k(t) = \varphi_k e^{-\lambda_k t} + \int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)} F_k(\tau) d\tau.$$

Esimest järku tuletise asendamisel murrulise tuletisega asendub lahendivalemis esinev eksponentfunktsioon $e^{-\lambda_k t}$ Mittag-Leffleri funktsioone sisaldavate avaldistega $E_\alpha(-\lambda_k t^\alpha)$ ja $t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k t^\alpha)$.

3 PÜ lahendi ühesus. Võrrand α jaoks

Toome sisse ka tähised pöördülesandega seotud funktsioonide Fourier' kordajate jaoks:

$$f_k = \langle f, v_k \rangle, \ \ \psi_k = \langle \psi, v_k \rangle, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Eelteoreem 2. *Olgu $q \in L_\infty(0,T)$ ja $\varphi \in L_2(\Omega)$. Eeldame, et $(\alpha, f) \in (0,1) \times L_2(\Omega)$ on* PÜ *lahend. Siis kehtib iga $k \in \mathbb{N}$ korral järgmine seos:*

$$\psi_k = \varphi_k E_\alpha(-\lambda_k T^\alpha) + f_k \int_0^T E_\alpha(-\lambda_k (T-\tau)^\alpha) q(\tau) d\tau. \tag{15}$$

Tõestus. Lemma 2 põhjal omab päripidiülesanne (4)–(6) parema poolega kujul (7) tugevat lahendit u ja Eelteoreem 1 ning Lemma 2 põhjal avalduvad selle lahendi Fourier' kordajad valemitega (14), kus $F_k = I^{1-\alpha}[f_k q]$. Võtame seal $t = T$ ja kasutame lõpptingimusest (8) järelduvat seost $u_k(T) = \psi_k$. Saame

$$\psi_k = \varphi_k E_\alpha(-\lambda_k T^\alpha) +$$
$$+ \int_0^T (T-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k (T-\tau)^\alpha) I^{1-\alpha}[f_k q](\tau) d\tau\,, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Teisendame paremal poolel olevat integraali murrulise integraali definitsiooni, valemi (9) ja võrduse $E_{\alpha,1} = E_\alpha$ abil:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (T-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k (T-\tau)^\alpha) I^{1-\alpha}[f_k q](\tau) d\tau \\
&= f_k \int_0^T (T-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k (T-\tau)^\alpha) \int_0^\tau \frac{(\tau-s)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} q(s) ds d\tau \\
&= f_k \int_0^T \Big[\int_s^T (T-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k (T-\tau)^\alpha) \cdot \\
&\qquad \cdot \frac{(\tau-s)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} d\tau \Big] q(s) ds \\
&= f_k \int_0^T \Big[\int_0^{T-s} (T-s-\rho)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k (T-s-\rho)^\alpha) \cdot \\
&\qquad \cdot \frac{\rho^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} d\rho \Big] q(s) ds \\
&= f_k \int_0^T E_{\alpha,1}(-\lambda_k (T-s)^\alpha) q(s) ds \\
&= f_k \int_0^T E_\alpha(-\lambda_k (T-s)^\alpha) q(s) ds.
\end{aligned}$$

Sellega on (15) tõestatud. □

Naaseme korraks sissejuhatuse lõpuosas tehtud arutelu juurde. Esimene liidetav võrduse (15) paremal poolel võrdub funktsiooni ψ_φ Fourier' kordajaga ja teine liidetav võrdub funktsiooni ψ_f Fourier' kordajaga. Meie ülesanne on näidata, et suure k korral domineerib esimene liidetav teise üle. Et seda teha, on meil vaja tuua sisse täiendavaid mõisteid ja eelnevalt uurida järgmist spetsiifilist funktsiooni:

$$\Psi_T(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha) T^\alpha}\,.$$

Lemma 4. *Tähistame* $T_* = e^{-\gamma_*} \approx 0.561$, *kus* $\gamma_* \approx 0.577$ *on Euler-Mascheroni konstant.*

(a) *Kui* $T \geq T_*$, *siis on funktsioon* Ψ_T *rangelt kahanev vahemikus* $(0,1)$ *ja* $\Psi_T((0,1)) = (0,1)$.

(b) *Kui* $0 < T < T_*$, *siis leidub* $\alpha_T \in (0,1)$ *nii, et* Ψ_T *on rangelt kasvav vahemikus* $(0, \alpha_T)$ *ja rangelt kahanev vahemikus* $(\alpha_T, 1)$.

Tõestus. Esitame funktsiooni $\Gamma(1-\alpha)$ Weierstrassi valemi abil:

$$\Gamma(1-\alpha) = e^{\gamma_* \alpha} \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{\alpha}{n}\Big)^{-1} e^{-\frac{\alpha}{n}},$$

millest logaritmimise ja diferentseerimisega saame

$$\frac{\Gamma'(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} = -\gamma_* - \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n-\alpha} - \frac{1}{n}\Big).$$

Kasutades seda valemit, avaldame

$$\Psi_T'(\alpha) = \Psi_T(\alpha) \Big[\frac{\Gamma'(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} - \ln T\Big] = -\Psi_T(\alpha) Q_T(\alpha), \qquad (16)$$

kus

$$Q_T(\alpha) = \gamma_* + \ln T + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n-\alpha} - \frac{1}{n}\Big).$$

Vaatleme võrduse (16) paremal poolel olevaid tegureid. Iga $\alpha \in (0,1)$ korral kehtib võrratus $\Psi_T(\alpha) > 0$. Peale selle järeldame $Q_T(\alpha)$ valemist, et Q_T rangelt kasvav vahemikus $(0,1)$ ja $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} Q_T(\alpha) = \gamma_* + \ln T$, $\lim\limits_{\alpha \to 1^-} Q_T(\alpha) = +\infty$. Järelikult juhul $T \geq T_*$ (ehk $\gamma_* + \ln T \geq 0$) kehtib $\Psi_T'(\alpha) < 0$, $\alpha \in (0,1)$, ja väide (a) on tõestatud. Juhul $T < T_*$ (ehk $\gamma_* + \ln T < 0$) leidub α_T nii, et $Q_T(\alpha) < 0$ kui $\alpha \in (0, \alpha_T)$ ja $Q_T(\alpha) > 0$ kui $\alpha \in (\alpha_T, 1)$. Rakendades neid võrratusi valemis (16) tõestame ka väite (b). $\square$

Defineerime järgmised ruumi $L_2(\Omega)$ alamruumid:

$$X_\gamma = \{z \in L_2(\Omega) : \lim_{k \to \infty} \lambda_k^\gamma \langle z, v_k \rangle = 0\}, \quad \text{kus} \quad \gamma > 0.$$

Funktsioonide Fourier' kordajate asümptootikat eristame ruumi X_γ kuuluvuse ja mittekuuluvuse alusel (nt $f \in X_\gamma$ kuid $\varphi \in L_2(\Omega) \setminus X_\gamma$ mingi $\gamma > 0$ korral).

Kui $\varphi \in L_2(\Omega) \setminus X_\gamma$, siis sisaldab jada $\lambda_k^\gamma \varphi_k$ alamjada, mille elementide kaugus nullist on mingist positiivsest arvust suurem, st

$$\exists (k_i)_{i \in \mathbb{N}},\ \varepsilon_0 > 0 \ :\ \lim_{i \to \infty} k_i = \infty,\ \ \lambda_{k_i}^\gamma |\varphi_{k_i}| \geq \varepsilon_0 \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Defineerime kõigi taoliste alamjadade hulga funktsiooni $\varphi \in L_2(\Omega) \setminus X_\gamma$ jaoks:

$$\mathcal{I}_{\gamma,\varphi} = \{\, (k_i)_{i \in \mathbb{N}} \ :\ \lim_{i \to \infty} k_i = \infty,\ \exists \varepsilon > 0 : \lambda_{k_i}^\gamma |\varphi_{k_i}| \geq \varepsilon \ \ \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Nüüd oleme jõudnud niikaugele, et saame formuleerida ja tõestada artikli põhiteoreemi.

Teoreem 1. *Eeldame, et $q \in L_\infty(0,T)$ ja $\varphi \in L_2(\Omega) \setminus X_\gamma$ mingi $\gamma > 0$ korral. Siis kehtivad järgmised väited.*

(a) *Kui (α, f) on* PÜ *lahend ruumis $(0,1) \times X_\gamma$, siis iga $(k_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{I}_{\gamma,\varphi}$ korral eksisteerib lõplik piirväärtus $\Lambda = \lim\limits_{i \to \infty} \frac{\lambda_{k_i} \psi_{k_i}}{\varphi_{k_i}}$. Taoline piirväärtus ei sõltu alamjada $(k_i)_{i \in \mathbb{N}}$ valikust hulgas $\mathcal{I}_{\gamma,\varphi}$ ja kehtib võrrand $\Psi_T(\alpha) = \Lambda$.*

(b) *Kui $T \geq T_*$, $q \geq 0$,*

$$\exists (T_1, T_2) \subset (0,T),\ q_0 > 0 \ :\ q(t) \geq q_0 \ \ p.k.\ \ t \in (T_1, T_2) \tag{17}$$

ja PÜ *omab kahte lahendit (α, f) ja $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{f})$ ruumis $(0,1) \times X_\gamma$, siis $\alpha = \widetilde{\alpha}$ ja $f = \widetilde{f}$.*

Tõestus. Tõestame väite (a). Olgu $(\alpha, f) \in (0,1) \times X_\gamma$ PÜ lahend. Valime suvalise alamjada $(k_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{I}_{\gamma,\varphi}$. Siis $\exists \varepsilon_0 > 0$: $\lambda_{k_i}^\gamma |\varphi_{k_i}| \geq \varepsilon_0$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Paneme kirja võrduse (15) indeksi $k = k_i$ korral ja korrutame seda teguriga $\frac{\lambda_{k_i}}{\varphi_{k_i}}$:

$$\frac{\lambda_{k_i} \psi_{k_i}}{\varphi_{k_i}} = \lambda_{k_i} E_\alpha(-\lambda_{k_i} T^\alpha) + \frac{\lambda_{k_i}^\gamma f_{k_i}}{\lambda_{k_i}^\gamma \varphi_{k_i}} \int_0^T \lambda_{k_i} E_\alpha(-\lambda_{k_i} (T-\tau)^\alpha) q(\tau) d\tau. \tag{18}$$

Analüüsime eraldi esimest ja teist liidetavat valemi (18) paremal poolel. Kasutades võrratust (11) tuletame

$$\Big|\frac{\lambda_{k_i}^{\gamma} f_{k_i}}{\lambda_{k_i}^{\gamma}\varphi_{k_i}} \int_0^T \lambda_{k_i} E_\alpha(-\lambda_{k_i}(T-\tau)^\alpha)|q(\tau)|d\tau\Big| \leq$$

$$\leq \frac{\lambda_{k_i}^{\gamma}|f_{k_i}|}{\varepsilon_0} \int_0^T \frac{c_\alpha}{(T-\tau)^\alpha} d\tau \|q\|_{L_\infty(0,T)} =$$

$$= C_1 \lambda_{k_i}^{\gamma} |f_{k_i}|, \quad \text{kus} \quad C_1 = \frac{c_\alpha T^{1-\alpha}\|q\|_{L_\infty(0,T)}}{\varepsilon_0(1-\alpha)}. \tag{19}$$

Asümptootilise seose (10) abil saame võrduse (18) paremal poolel oleva esimese liikme $\lambda_{k_i} E_\alpha(-\lambda_{k_i} T^\alpha)$ esitada kujul

$$\lambda_{k_i} E_\alpha(-\lambda_{k_i} T^\alpha) = \Psi_T(\alpha) + O\Big(\frac{1}{\lambda_{k_i}}\Big), \ \text{kui} \quad i \to \infty. \tag{20}$$

Minnes võrduses (18) piirile $i \to \infty$ ja kasutades seoseid (19), (20) ning eeldust, et $f \in X_\gamma$, saame $\lim_{i\to\infty} \frac{\lambda_{k_i}\psi_{k_i}}{\varphi_{k_i}} = \Lambda$, kus $\Lambda = \Psi_T(\alpha)$. Sellest järelduvad väited (a).

Tõestame väite (b). Olgu $T \geq T_*$, kehtigu (17) ja omagu PÜ kahte lahendit $(\alpha, f), (\widetilde{\alpha}, \widetilde{f}) \in (0,1) \times X_\gamma$. Lemma 4 põhjal on Ψ_T rangelt kahanev lõigul $(0,1)$. Seega $\alpha = \widetilde{\alpha} = \Psi_T^{-1}(\Lambda)$. Tähistame $\widetilde{f}_k = \langle \widetilde{f}, v_k\rangle$. Siis

$$\psi_k = \varphi_k E_\alpha(-\lambda_k T^\alpha) + \widetilde{f}_k \int_0^T E_\alpha(-\lambda_k(T-\tau)^\alpha) q(\tau) d\tau.$$

Lahutades selle avaldise võrdusest (15), saame

$$(\widetilde{f}_k - f_k) \int_0^T E_\alpha(-\lambda_k(T-\tau)^\alpha) q(\tau) d\tau = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Arvestades asjaolu, et $E_\alpha(-t) > 0$, $t \in (0,\infty)$, ja eeldust (17), näeme, et $\int_0^T E_\alpha(-\lambda_k(T-\tau)^\alpha) q(\tau) d\tau \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Seega $\widetilde{f}_k - f_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$, millest järeldub, et $f = \widetilde{f}$. Teoreem on tõestatud. □

Näiteks olgu $n = 1$, $\Omega = (0, \pi)$ ja $\varkappa = 1$. Siis on operaatori L omaväärtused ja ortonormeeritud omafunktsioonid vastavalt $\lambda_k = k^2$ ja $v_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx$, $k \in \mathbb{N}$. Valime algtingimuseks $\varphi = 1$. Funktsiooni φ Fourier' kordajad on

$$\varphi_k = \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\, k} & \text{kui } k \text{ on paaritu} \\ 0 & \text{kui } k \text{ on paaris.} \end{cases}$$

Seega $\varphi \in X_\gamma$, kui $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ ja $\varphi \notin X_\gamma$, kui $\gamma \geq \frac{1}{2}$. Eeldustel $T \geq T_*$ ja (17) on PÜ lahend ühene ruumis $(0, 1) \times X_{\frac{1}{2}}$. Suuruse α määramiseks tuleb lahendada võrrand $\Psi_T(\alpha) = \Lambda$ parema poolega $\Lambda = \lim\limits_{i \to \infty} \frac{\lambda_{2i-1} \psi_{2i-1}}{\varphi_{2i-1}}$.

Juhul $0 < T < T_*$ ei ole PÜ lahendi ühesus garanteeritud, sest Lemma 4 (b) põhjal võib võrrand $\Psi_T(\alpha) = \Lambda$ teatud Λ väärtuste korral omada kahte lahendit.

Lõpuks peatume veel ühel ühesusteoreemiga seotud aspektil. Tingimus $T \geq T_*$ sisaldab ajaühikust sõltumatut absoluutset konstanti $T_* = e^{-\gamma_*}$. Tekib küsimus: mis juhtub ülesandega, kui ajaühikut muudetakse?

Teostame vaadeldavas ülesandes muutuja vahetuse $\hat{t} = bt$, kus $b > 0$. Siis saame võrranditest (4)–(8) järgmised avaldised:

$$D^\alpha(\hat{u} - \varphi)(\hat{t}, x) = \hat{\varkappa} \Delta \hat{u}(\hat{t}, x) + I^{1-\alpha} \hat{Q}(\hat{t}, x),\ x \in \Omega,\ \hat{t} \in (0, \hat{T}), \quad (21)$$

$$\hat{u}(0, x) = \varphi(x),\ x \in \Omega, \quad \hat{u}(\hat{t}, x) = 0,\ x \in \partial\Omega,\ \hat{t} \in (0, \hat{T}), \quad (22)$$

$$\hat{Q}(\hat{t}, x) = \hat{q}(\hat{t}) f(x), \quad (23)$$

$$\hat{u}(\hat{T}, x) = \psi(x),\ x \in \Omega, \quad (24)$$

kus $\hat{u}(\hat{t}, x) = u(t, x)$, $\hat{q}(\hat{t}) = \frac{1}{b} q(t)$, $\hat{T} = bT$ ja

$$\hat{\varkappa} = \varkappa b^{-\alpha}. \quad (25)$$

Nüüd kaks kaks erinevat võimalust pöördülesande püstitamiseks. PÜ ümbervormistatuna mudelile (21)–(23) kõlab järgmiselt: etteantud suuruste $\hat{\varkappa}$, $\hat{q}$, φ ja ψ põhjal leida suurustepaar (α, f) nii, et otsese ülesande (21), (22) lahend allikafunktsiooni (23) korral rahuldab lisatingimust (24). Sellele ülesandele saab otseselt rakendada Teoreemi 1. Piisavad tingimused lahendi ühesuse jaoks sisaldavad võrratust $\hat{T} \geq T_*$.

Teiseks paneme tähele, et uue kordaja $\hat{\varkappa}$ valem sisaldab tundmatut suurust α. Seetõttu on põhjendatud formuleerida ülesanne hoopis selliselt, et $\hat{\varkappa}$ asemel on teada algne kordaja $\varkappa$. Täpsemalt kõlab taoline ülesanne järgmiselt: etteantud suuruste $\varkappa$, b, $\hat{q}$, φ ja ψ põhjal leida suurustepaar (α, f) nii, et otsese ülesande (21), (22) lahend allikafunktsiooni (23) ja kordaja (25) korral rahuldab tingimust (24). Taoline pöördülesanne on ekvivalentne esialgse ülesandega PÜ. Ühesustingimused sisaldavad võrratust $T \geq T_*$, mis on ekvivalentne võrratusega $\hat{T} \geq bT_*$.

Kirjandus

[1] Chechkin, A. V., Gorenflo, R., Sokolov, I. M. Fractional diffusion in inhomogeneous media. *J. Phys. A: Math. Gen.* **38** (2005), L679–L684.

[2] Furati, K. M., Iyiola, O. S., Kirane, M. An inverse problem for a generalized fractional diffusion. *Appl. Math. Comput.* **249** (2014), 24–31.

[3] Gorenflo, R., Kilbas, A. A., Mainardi, F., Rogosin, S. V. *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications.* Springer, New York, 2014.

[4] Janno, J., Kinash, N. Reconstruction of an order of derivative and a source term in a fractional diffusion equation from final measurements. *Inverse Problems* **34** (2018), 025007.

[5] Jin, B., Rundell, W. A tutorial on inverse problems for anomalous diffusion processes. *Inverse Problems* **31** (2015), 035003.

[6] Kinash, N., Janno, J. Inverse problems for a perturbed time fractional diffusion equation with final overdetermination. *Math. Methods Appl. Sci.* **41** (2018), 1925–1943.

[7] Orlovsky, D. G. Parameter determination in a differential equation of fractional order with Riemann - Liouville fractional derivative in a Hilbert space. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics* **8** (2015), 55–63.

[8] Prüss, J. *Evolutionary Integral Equations and Applications.* Birkhäuser, Berlin, 1993.

[9] Zacher, R. *Quasilinear Parabolic Problems with Nonlinear Boundary Conditions*. Dissertation: Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, 2003, 119pp. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.632.9981&rep=rep1&type=pdf