Ruutplaneerimisülesande graafiline lahendamine

Mati Väljas
Tallinna Tehnikaülikool

Mittelineaarse sihifunktsiooniga $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ ja lineaarsete kitsendustega planeerimisülesande üldkuju on:

$$z = f(x_1, \ldots, x_n) \quad \to \quad \max, \min \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i \leqslant b_j, \qquad j = 1, \ldots, p; \\ &\textstyle\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i \geqslant b_j, \quad j = p+1, \ldots, q; \\ &\textstyle\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i = b_j, \quad j = q+1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{2}$$

Seega, tuleb leida sihifunktsiooni (1) maksimaalne või minimaalne väärtus selliselt, et on täidetud kitsendused (2).

Hulka

$$Q = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid A_1 X \leqslant B_1,\ A_2 X \geqslant B_2,\ A_3 X = B_3\}, \tag{3}$$

mille elemendid rahuldavad kitsendusi (2), nimetatakse selle ülesande *lubatavate lahendite hulgaks* ehk *piirkonnaks*. Siin A_i, B_i ja X on sobivate mõõtmetega maatriksid.

Planeerimisülesande lahendamine on sisuliselt sihifunktsiooni (1) globaalsete ekstreemumite leidmine lubatud lahendite piirkonnas Q. Kuna mitme muutuja funktsiooni globaalsete ekstreemumite leidmine on üldjuhul keeruline ülesanne, siis võimaluse korral on sihifunktsiooni ja kitsenduste geomeetriline interpreteerimine lihtsustavaks asjaoluks.

Kahe muutujaga lineaarplaneerimise ülesande lahendamiseks kasutatakse sageli graafilist meetodit, sest siis lubatud lahendite piirkonna rajajoonteks on sirged või sirglõigud. Sihifunktsiooni väärtuse

Eesti Matemaatika Selts AR 2017

muutumist kirjeldatakse nivoojoonte abil, mis lineaarsel juhul osutuvad paralleelseteks sirgeteks. Üldjuhul kasutatakse lineaarsete planeerimisülesannete lahendamiseks simpleksmeetodit, mis avaldati *G. B. Dantzigi* poolt 1949. aastal (vt [1], lk 50).

Kaasaegne arvutitarkvara annab hea võimaluse kahe muutujaga mittelineaarse planeerimisülesande lahendi leidmist geomeetriliselt tõlgendada. Vaatame järgnevalt olukorda, kus planeerimisülesande sihfunktsiooniks (1) on ruutfunktsioon

$$z = X^T AX + 2X^T B + b_0. \tag{4}$$

Sellist ülesannet nimetatakse *ruutplaneerimise ülesandeks*. Juhul, kui sihifunktsiooni ruutosa on positiivselt poolmääratud ruutvorm[11], so

$$X^T AX \geqslant 0, \tag{5}$$

siis lineaarsete kitsendustega ruutplaneermisülesande lahendamiseks saab kasutada *Beale'i* meetodit, mis avaldati 1959. aastal (vt [1], lk 263).

Olgu $xy-$tasandil antud teist järku joon üldvõrrandiga

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + b_0 = 0. \tag{6}$$

Kasutades maatrikseid

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

saame selle võrrandi esitada maatrikskujul

$$X^T AX + 2X^T B + b_0 = 0$$

või

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

[11]Ruutosa võib olla ka negatiivselt poolmääratud, st $X^T AX \leqslant 0$ iga $X \in Q$.

Võrrandi (6) kordajatest saab moodustada determinandid, mis on selle joone ortogonaalseteks invariantideks

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & b_0 \end{vmatrix}, \tag{7}$$

st nende väärtused jäävad muutumatuks üleminekul ühelt ristkoordinaatide süsteemilt teisele ristkoordinaatide süsteemile (vt[2], lk 306). Teist järku joont, mille korral $\delta \neq 0$, nimetatakse *tsentraalseks* ja selle joone keskpunkti $K(x_0, y_0)$ koordinaadid on leitavad võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + b_1 = 0, \\ a_{12}x + a_{22}y + b_2 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Tasandil leidub tsentraalse teist järku joone jaoks niisugune $(u, v)-$ koordinaadistik, milles joone võrrand on kujul (vt [2], lk 318)

$$\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0, \tag{9}$$

kus λ_1 ja λ_2 on maatriksi A omaväärtused. Sellel juhul on koordinaattelgedeks valitud joone teljed, so joone keskpunkti läbivad peasihilised sirged.

Maatriksi A omaväärtuste leidmiseks tuleb lahendada karakteristlik võrrand

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \delta = 0.$$

Selle ruutvõrrandi lahendid λ_1 ja λ_2 on omaväärtused ning neile vastavad omavektorid on lineaarse homogeense võrrandisüsteemi

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (i = 1, 2)$$

lahendid.

Olgu omaväärtustele λ_1 ja λ_2 vastavate omavektorite sihilised ühikvektorid

$$\vec{\xi}_1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \qquad \text{ja} \qquad \vec{\xi}_2 = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Siis (x, y) ja (u, v) koordinaatide vaheline seos on esitatav kujul (vt [2], lk 266)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Need valemid kirjeldavad teisendust, millega koordinaatide alguspunkt lükatakse joone keskpunkti $K(x_0, y_0)$ ja esialgseid koordinaattelgi pööratakse nurga α võrra.

Teist järku joonele (6) joone punktis $P(x_0, y_0)$ pandud puutuja võrrand on

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + b_1)x + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + b_2)y + b_1x_0 + b_2y_0 + b_0 = 0. \tag{11}$$

Näide. Leida graafiliselt ruutplaneerimisülesande lahend, kui

$$z = 9x^2 - 4xy + 6y^2 - 62x + 36y \to \min$$

$$\begin{aligned} 13x + 36y &\geqslant 258, \\ x \geqslant 0, \qquad y &\geqslant 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Kasutades maatrikseid

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -31 \\ 18 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

saame sihifunktsiooni z esitada maatrikskujul

$$z = X^T AX + 2X^T B.$$

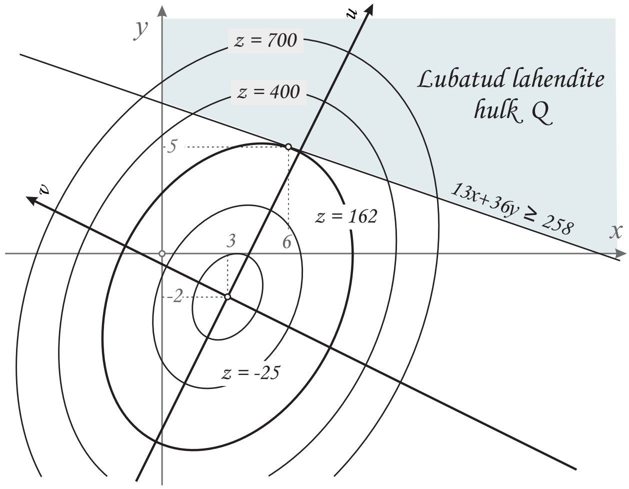
Selle ülesande lubatavate lahendite hulk

$$Q = \{(x, y) \mid 13x + 36y \geqslant 258, \;\; x \geqslant 0, \;\; y \geqslant 0\}$$

on $xy-$tasandil varjutatud piirkond (vt joonis 1).

Sihifunktsiooni $z = f(x, y)$ nivoojoonteks $z = c$ $(c = \text{const})$ on xy-tasandil teist järku jooned

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 - 62x + 36y = c. \tag{13}$$



Joonis 1. Nivoojooned – kontsentrilised ellipsid.

Nende joonte liigi määramiseks arvutame ortogonaalsed invariandid (7):

$$\delta = \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 50 \quad \text{ja} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 9 & -2 & -31 \\ -2 & 6 & 18 \\ -31 & 18 & -c \end{vmatrix} = -6450 - 50c$$

ning lahendame omaväärtusülesande

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0,$$

millest $\lambda_1 = 5$ ja $\lambda_2 = 10$. Nendele omaväärtustele vastavad omavektorid on

$$\vec{\xi_1} = (1,\, 2) \qquad \text{ja} \qquad \vec{\xi_2} = (-2,\, 1). \tag{14}$$

Võrrandisüsteemist (8) leiame nivoojoonte ühise keskpunkti $K(3, -2)$. Valides uuteks koordinaattelgedeks joonte teljed, so punkti K läbivad peasihilised sirged, saame niisuguse uv-koordinaadistiku (vt joonis 2), milles nivoojoonte võrrandid (13) on kujul (9):

$$5u^2 + 10v^2 = 129 + c. \tag{15}$$

Nivoojooneks olevate kontsentriliste ellipsite kanoonilised võrrandid on

$$\frac{u^2}{\frac{129+c}{5}} + \frac{v^2}{\frac{129+c}{10}} = 1$$

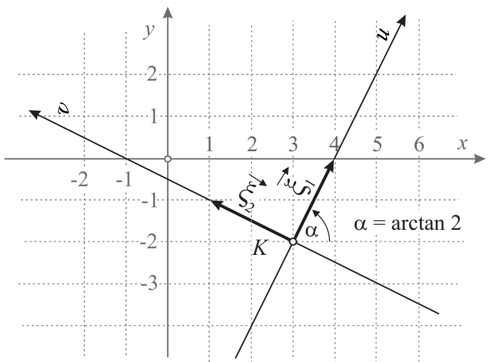
ja parameetrilised võrrandid

$$\begin{cases} u = \sqrt{\frac{129+c}{5}}\cos t, \\ v = \sqrt{\frac{129+c}{10}}\sin t. \end{cases}$$

Kasutades omavektorite (14) suunalisi ühikvektoreid, on koordinaatide teisendusvalemid (10) kujul

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Märgime, et viimaste valemite asendamisel võrrandisse (13), saame pärast teisendusi võrrandi (15).



Joonis 2. xy- ja uv-koordinaatide vaheline seos.

Jooniselt 1 selgub, et tuleb leida sihifunktsiooni selline nivoojoon, mille puutujaks on kitsenduseks olev sirge $13x + 36y - 258 = 0$. Nivoojoonele punktis $P(x_0, y_0)$ pandud puutuja (11) võrrand on

$$(9x_0 - 2y_0 - 31)x + (-2x_0 + 6y_0 + 18)y - 31x_0 + 18y_0 - c = 0.$$

Kitsendustes (12) olev sirge ja puutuja langevad kokku, kui on täidetud tingimus

$$\frac{9x_0 - 2y_0 - 31}{13} = \frac{-2x_0 + 6y_0 + 18}{36} = \frac{-31x_0 + 18y_0 - c}{-258} = \lambda,$$

millest puutepunkti P koordinaatite leidmisks saame lineaarse võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 9x_0 - 2y_0 - 31 = 13\lambda, \\ -2x_0 + 6y_0 + 18 = 36\lambda, \\ -31x_0 + 18y_0 - c = -258\lambda. \end{cases}$$

Selle süsteemi kahest esimestest võrrandist leiame, et punkti P koordinaadid avalduvad kujul

$$x_0 = 3(1 + \lambda), \quad y_0 = -2 + 7\lambda.$$

Kuna punkt $P(x_0, y_0)$ asub kitsenduseks oleval sirgel, siis tingimusest

$$13x_0 + 36y_0 - 258 = 0$$

leiame, et $\lambda = 1$. Järelikult puutepunkti koordinaadid on $P(6, 5)$ ja selles punktis sihifunktsioon omandab lubatud lahendite piirkonnas minimaalse väärtuse $z_{\min} = f(6, 5) = 162$.

Kirjandus

Kaasik, Ü., Kivistik, L. *Operatsioonianalüüs.* Valgus, Tallinn, 1982.

Väljas, M. *Analüütiline geomeetria.* TTÜ, Tallinn, 2012.

