Farey jadad ja Minkowski ?-funktsioon

Alar Leibak[3]
Tallinna Tehnikaülikool

Farey jadad

Reaalarvude lähendamisel ratsionaalarvudega on tähtsal kohal *Farey*[4] *jadad*. Farey jadaks tasemel n nimetatakse hulka

$$\mathcal{F}_n = \left\{ \frac{a}{b} \mid 0 \leqslant a \leqslant b \leqslant n \quad \text{ja} \quad \text{SÜT}(a,b) = 1 \right\}.$$

Näiteks Farey jadad tasemetel $1, 2, 3$ ja 4 on

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}, \\
\mathcal{F}_2 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\}, \\
\mathcal{F}_3 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\}, \\
\mathcal{F}_4 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}.
\end{aligned}$$

Farey jada definitsioonist järeldub, et mistahes ratsionaalarv a/b lõigust $[0,1]$ kuulub hulka $\mathcal{F}_n$, kus $n \geqslant b$.

Farey jada $\mathcal{F}_n$ elemente a/b ja c/d nimetatakse *naabriteks*, kui nende vahel (järjestuse $\leqslant$ mõttes) ei ole hulga $\mathcal{F}_n$ teisi elemente. Mittenegatiivsete ratsionaalarvude a/b ja c/d *mediant* on defineeritud võrdusega

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

Defintsioonist on näha, et ratsionaalarvude $a/b \neq c/d$ mediant paikneb arvude a/b ja c/d vahel. Kui $a/b, c/d \in \mathcal{F}_n$ on *naabrid*, siis $|ad - bc| = 1$ ja $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}$ kuulub hulka $\mathcal{F}_{b+d}$. Mediandi abil saame

[3]e-mail: alar.leibak@ttu.ee

[4]John Farey Sr. (1766–1826) – inglise geoloog.

Farey jada tekitada hulgast $\mathcal{F}_1$. Selleks tuleb hulgale $\mathcal{F}_{n-1}$ juurde lisada selle hulga naabrite mediandid, st.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_2 &= \mathcal{F}_1 \cup \left\{\frac{0}{1} \oplus \frac{1}{1}\right\},\\
\mathcal{F}_3 &= \mathcal{F}_2 \cup \left\{\frac{0}{1} \oplus \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{1}\right\},\\
\mathcal{F}_4 &= \mathcal{F}_3 \cup \left\{\frac{0}{1} \oplus \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \oplus \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \oplus \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \oplus \frac{1}{1}\right\}.
\end{aligned}$$

Minkowski ?-funktsioon

Hermann Minkowski[5] defineeris funktsiooni ? lõigult $[0, 1]$ reaalarvude hulka järgmiselt:

1. $?(\frac{0}{1}) = 0$ ja $?(\frac{1}{1}) = 1$;

2. ratsionaalarvulise argumendi a/b korral (eespool nägime, et iga ratsionaalarv sellest lõigust kuulub mingisse Farey jadasse $\mathcal{F}_n$ ja selle elemendid avalduvad jada $\mathcal{F}_{n-1}$ elementide mediantidena) leitakse väärtus rekursiivselt

$$?\left(\frac{a}{b}\right) = ?\left(\frac{a'}{b'} \oplus \frac{c'}{d'}\right) = \frac{1}{2}\left(?\left(\frac{a'}{b'}\right) + ?\left(\frac{c'}{d'}\right)\right)$$

kui $|a'd' - b'c'| = 1$. Näiteks, et

$$\frac{5}{7} = (\frac{1}{1} \oplus (\frac{1}{1} \oplus \frac{1}{2})) \oplus (\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{1}),\ ?(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

ja

$$?(\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{1}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1) = \frac{3}{4}$$

ning

$$?(\frac{1}{1} \oplus \frac{2}{3}) = \frac{1}{2}(1 + \frac{3}{4}) = \frac{7}{8},$$

[5]Hermann Minkowski (1864–1909) – leedu-saksa matemaatik.

siis

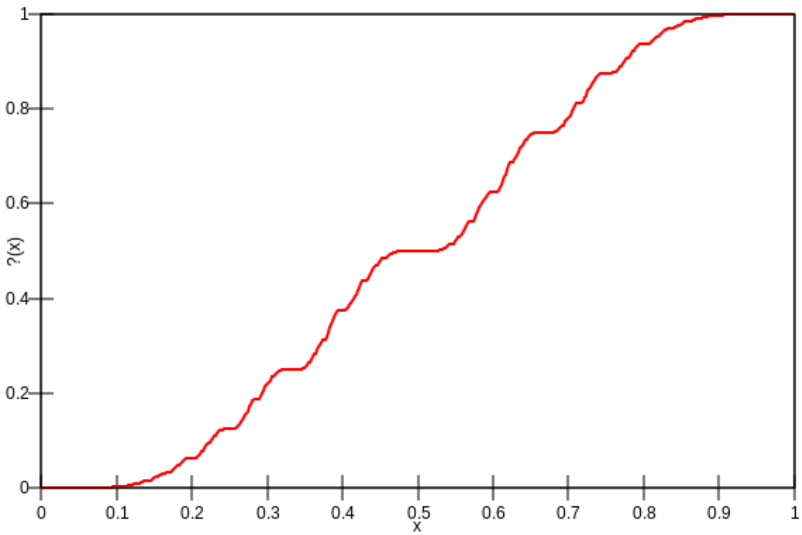
$$?\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{1}{2}\left(?\left(\frac{2}{3}\right) + ?\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + \frac{7}{8}\right) = \frac{13}{16}.$$

3. irratsionaalarvu α korral vahemikust $(0,1)$ leidub iga positiivse täisarvu n korral ratsionaalarv $a_n/b_n \in \mathcal{F}_n$, nii et

$$\left|\alpha - \frac{a_n}{b_n}\right| < \frac{1}{b_n(n+1)}.$$

Ratsionaalarvulistel väärtustel on funktsioon ? defineeritud, seega

$$?(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} ?\left(\frac{a_n}{b_n}\right), \quad \text{kui} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \alpha.$$



Funktsiooni ? graafik (Wikipedia).

Funktsiooni ? definitsioonist järeldub, et

1. tema väärtused kuuluvad lõiku $[0,1]$,

2. tegemist on pideva funktsiooniga,

3. funktsioon ? on monotoonselt kasvav, st $?(x) <?(x')$ iga $0 \leqslant x < x' \leqslant 1$ korral,

4. kui $x \in [0,1]$ on ratsionaalarv, siis $?(x) = k/2^n$, kus k, n on mingid mittenegatiivsed täisarvud.

R. Salem[6] näitas,[7] et funktsiooni ? tuletis võrdub nulliga peaaegu kõikjal. Lisaks esitas Salem funktsiooni ? arvutuseeskirja arvu $\alpha \in [0,1]$ ahelmurru abil.

Ahelmurrud ja $?(x)$

Ahelmurruks nimetatakse avaldist

$$[a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}},$$

kus $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ on positiivsed arvud. Lõpmatu avaldise korral on $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ täisarvud $\geqslant 1$ (va. täisarv a_0). Lõpliku ahelmurru korral

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_m}}}},$$

võib viimane arv $a_m > 1$ olla ka reaalarv. Selliseid ahelmurde nimetatakse *lihtsateks ahelmurdudeks.* Mõned näited lõplikest lihtsatest

[6] Raphaël Salem (1898–1963) – kreeka matemaatik, tema järgi on nimetatud Salemi arvud ja ta asutas Salemi auhinna.

[7] R. Salem, On some singular monotonic functions which are strictly increasing, *Trans. Am. Math. Soc.* **53**, 427–439 (1943).

ahelmurdudest:

$$[2,0,1,7] = 2 + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7}}} = \frac{22}{7},$$

$$[1,2,2,\sqrt{2}+1] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}} = \sqrt{2}.$$

Näeme, et lõpliku ahelmurru $[a_0, a_1, \ldots, a_m]$, kus a_m on täisarv, summa on ratsionaalarv.

Lõpmatu ahelmurru summa defineeritakse piirväärtuse abil. Lõpmatut ahelmurdu $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ nimetatakse *koonduvaks*, kui koondub lõplike ahelmurdude jada

$$[a_0], [a_0, a_1], [a_0, a_1, a_2], \ldots.$$

Tarviliku ja piisava tingimuse lõpmatu ahelmurru koondumiseks andis Aleksandr Hintšin[8].

Teoreem (Hintšin). Lõpmatu ahelmurd $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ koondub parajasti siis, kui rida

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$$

hajub.

Näeme, et lõplikud kui ka lõpmatud ahelmurrud koonduvad arvuks $\alpha \in [0,1)$ parajasti siis, kui $a_0 = 0$.
Salem näitas, et Minkowski funktsiooni ? saab defineerida ahelmurdude abil, kui vahemikust $(0,1)$ võetud reaalarv avaldub lihtsa ahelmurruna

$$\alpha = [0, a_1, a_2, \ldots],$$

[8]Aleksandr Hintšin (1894–1959) – nõukogude matemaatik.

siis

$$?(\alpha) = ?([0, a_1, a_2, \ldots]) = 2\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{a_1+a_2+\cdots+a_i}}. \tag{1}$$

Kuna arvud $a_1, a_2, a_3, \ldots$ on mittenegatiivsed reaalarvud, siis tegemist on vahelduvate märkidega arvreaga, mis koondub Dirichlet' tunnuse põhjal. (Kui α on ratsionaalarv, siis on tegemist lõpliku ahelmurruga ja $?(\alpha)$ avaldub lõpliku summana.) Leiame $?(5/7)$ valemi (1) abil

$$?\left(\frac{5}{7}\right) = ?\left([0, 1, 2, 2]\right) = 2\left(\frac{1}{2^1} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5}\right) = \frac{13}{16}.$$

Märgime veel, et funktsiooni ? monotoonsuse tõttu leidub sellel pöördfunktsioon, mida tähistatakse $\boxed{x}$. Seda funktsiooni nimetatakse *Conway*[9] *kastifunktsiooniks* (inglise keeles *Conway box function*).

Funktsiooni ? väärtus ruutirratsionaalarvudel

Eelnevast järeldub, et üldjuhul on funktsiooni ? väärtuse arvutamine tülikas (st. seda saab leida kas piirväärtusena või arvrea summana), kui argument on irratsionaalarv. Ahelmurdude teooriast järeldub, et ruutirratsionaalarvudel saab funktsiooni ? väärtust hõlpsamalt leida. Meenutame, et reaalarvu α nimetatakse *ruutirratsionaalarvuks*, kui leiduvad täisarvud a, b, c, nii et kehtib võrdus $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$.

Arvuteooriast on teada[10], et reaalarv α on ruutirratsionaalarv parajasti siis, kui tema esitus ahelmurruna on kujul

$$\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_m, \overline{a_{m+1}, \ldots, a_{m+k}}],$$

kus $\overline{a_{m+1}, \ldots, a_{m+k}}$, tähendab, et arvud $a_{m+1}, \ldots, a_{m+k}$ korduvad perioodiliselt samas järjekorras. Näiteks

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = [0, 1, 6, 2, 6, 2, 6, 2, 6, 2, \ldots] = [0, 1, \overline{6, 2}].$$

[9]Conway, John (s. 1937) – inglise matemaatik.

[10]Seda tulemust nimetatakse ka *Euler-Lagrange'i teoreemiks*.

Leiame $?(\sqrt{3}/2)$ väärtuse valemi (1) abil

$$
\begin{aligned}
?\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= 0 + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^9} - \frac{1}{2^{15}} + \frac{1}{2^{17}} - \dots\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2^6}\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-8i} + \frac{1}{2^8}\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-8i} = \frac{84}{85}.
\end{aligned}
$$

Näeme, et analoogselt saame arvutada funktsiooni ? väärtust mistahes ruutirratsionaalse argumendi korral vahemikus $(0,1)$. Paneme tähele veel seda, et kui $\alpha \in (0,1)$ on ruutirratsionaalarv, siis $?(\alpha)$ on ratsionaalarv.

