Mitme sihifunktsiooniga lineaarse planeerimise ülesande lahendamine vähimruutude meetodil

EVALD ÜBI[2]
Tallinna Tehnikaülikool

Vaadeldava ülesande lahendamisel ei kasutata sihifunktsioonide kaalukordajaid, nende asemel lisatakse kitsendused eesmärkide tasemete kohta. Leitakse sellise võrratuste süsteemi minimaalse normiga lahend erinevate eesmärkide tasemete korral. Neid tasemeid täpsustatakse dialoogrežiimis arvutiga. Toodud näide kirjeldab esitatava meetodi kasutamist panga töö optimeerimisel.

1. Sissejuhatus

Lineaarne planeerimine (LP) on matemaatilise planeerimise esimene osa, kus tuleb leida lineaarse funktsiooni optimaalne väärtus lineaarsete kitsenduste korral. Veel lihtsam ülesanne – linaarsete võrratuste süsteemi lahendamine, taandatakse tavaliselt lisamuutujate abil lineaarse planeerimise ülesandeks. D. Gale [1] arvates oleks loogilisem alustada ekstreemumi leidmist lineaarsete võrratuste süsteemi lahendamisest ja sellele toetudes käsitleda lineaarseid ja mittelineaarseid planeerimisülesandeid.

Kui keerulist reaalset protsessi kirjeldavas lineaarse planeerimise ülesandes on palju kitsendusi, siis on esmalt vaja veenduda, et kitsendused pole vastuolulised. Seda saab teha leides selle ülesande kitsenduste süsteemi mingi lahendi. Veel võib juhtuda, et me pole arvestanud kõiki kitsendusi ja sihifunktsioon on tõkestamata. Selleks lisame maksimeerimise korral ülesande kitsendustele võrratuse kujul sihifunktsiooni kohta kitsenduse $z \geq M$, kus M on piisavalt suur arv. Kui selliselt täiendatud võrratuste süsteemil on lahend,

[2] e-mail: evald.ubi@ttu.ee

siis järelikult pole ülesande kitsendused vastuolulised, aga sihifunktsioon on tõkestamata.

Lineaarsete võrratuste süsteemi minimaalse normiga lahendi määramine on tuntud ka kui lähima punkti ülesanne (*nearest point problem*). Mitmes töös [2, 3, 4] jt on kasutanud minimaalse normiga lahendi leidmiseks ortogonaalseid meetodeid. Veel on mitu erinevat püstitust ja lahendusmeetodit minimaalse normiga lahendi leidmisest. Kitsendused võivad olla nii võrrandite kui ka võrratuste kujul. Lahendite hulk võib olla antud samuti oma tippude kumera kombinatsiooni abil. Neid ülesandeid lahendatakse nii lõplike kui ka iteratiivsete meetoditega, vt [6, 7].

Käesolevas töös kasutame lähima punkti leidmiseks ruutplaneerimise meetodit, taandame selle lineaarseks komplementaarseks ülesandeks.

Vaatleme kahe sihifunktsiooniga LP ülesannet kujul

$$z_1 = (c, x) \to max$$

$$z_2 = (d, x) \to max$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0.$$

Selle ülesande asendame võrratuste süsteemiga

$$z_1 = (c, x) \geq z_{10}$$

$$z_2 = (c, x) \geq z_{20}$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0.$$

Lahendades erinevate parameetrite z_{i0} väärtuste korral taolisi võrratuste süsteeme, saame kitsendusi rahuldava lahendi, mille korral on sihifunktsioonidel nõutavad eesmärkide tasemed. Selline lähenemine on otstarbekas eriti mitme sihifunktsiooniga ülesandes. Esmalt leiame dialoogi käigus arvutiga kõige tähtsama sihifunktsiooni jaoks rahuldava eesmärgi taseme, seejärel kordame seda protseduuri teise sihifunktsiooni jaoks, vt näidet 3.1. Selline lahendusviis erineb olulisel määral klassikalisest meetodist, kus saadav lahend võib sõltuda olulisel määral sihifunktsioonide kaalukordajatest. Neid aga pole kerge enne lahendamist ette anda. Esitatavas algoritmis COMP on planeerimisülesanne taandatud võrratuste süsteemiks, me ei kasuta erinevalt simpleksmeetodist jagatise testi, seetõttu saab lahendada järjest ülesandeid, millel on vaid erinevad paremad pooled, vt näidet 2.1.

Praktiliste majandusliku taustaga ülesannete korral ei ole probleem mitte niivõrd lahendamise täpsuses kui korrektses ülesande püstituses. Näiteks tulu ja kulu võib arvestada sihifunktsioonis või kitsendustes. Sihifunktsiooniks võib võtta tulu ja kulutuste vahe. Teine variant on maksimeerida tulu ja koostada kulu ülemise piiri kohta lisakitsendus. Kolmandaks võib minimeerida kulutusi ja lisada kitsendus tulu alumise piiri kohta. Taolised variandid osutavad võimalusele püstitada ülesannet erineval viisil, seetõttu võime saada nii kvantiteedi kui kvaliteedi poolest erinevaid tulemusi.

2. Lineaarsete võrratuste süsteemi taandamine komplementaarseks ülesandeks

Vaatleme võrratuste süsteemi

$$Ax \leq b, \tag{1}$$

kus A on $(m \times n)$-maatriks, b on m-vector ja x on n-vector. Klassikaline võte ülesande (1) lahendamiseks seisneb lisamuutujate kasutamises. Kui nende summa minimeerimisel simpleksmeetodiga võrdub nulliga, siis oleme saanud süsteemi (1) mingi lubatava lahendi.

Vaatleme alternatiivset varianti, teisendame selle süsteemi ruutplaneerimise ülesandeks, leiame minimaalse normiga lahendi

$$\begin{aligned} z = -0.5\,\|x\|^2 &\to max \\ Ax &\leq b. \end{aligned} \tag{2}$$

Kui võrratuste süsteem kehtib, siis tähistame $\widehat{x}$ selle minimaalse normiga lahendit. Koostame ülesande (2) duaalülesande

$$L(x, y) = -0.5\,\|x\|^2 + (y, b - Ax) \to min$$

$$Ax + s = b, \quad -x - A^T y = 0, \tag{3}$$

$$y_i s_i = 0, \;\; i = 1, ..., m; \quad y, \, s \geq 0,$$

kus s ja y on vastavalt lisa- ja duaalmuutujad, tingimust $y_i s_i = 0$ nimetatakse *komplementaarsuseks.* Kõrvaldame lähtemuutujad $x = -A^T y$ ja koostame lineaarse komplementaarse ülesande

$$\begin{aligned} -AA^T y + s &= b \\ y_i s_i = 0, \;\; i = 1, ..., m; &\quad y, \, s \geq 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Märkus 2.1. Kui $b \geq 0$, siis komplementaarsel ülesandel (3) on triviaalne lahend $y = 0, \;\; s = b, \;\; \widehat{x} = 0$.

Märkus 2.2. Võrratuste süsteemil (1) pole lahendit parajasti siis, kui komplementaarne ülesanne on teisendatav sellisele kujule, kus parem pool $b_i < 0$ ja kõik selle rea kordajad on mittenegatiivsed.

Näide 2.1.

$$\begin{aligned} x_1 \quad &\leq 1 \\ x_2 &\leq 2 \\ -x_1 - x_2 &\leq -2 \end{aligned}$$

Kasutades juhtelementi (3,3) asendame baasis s_3 duaalmuutujaga y_3, saame süsteemi (4) lahendi $y* = (0, \, 0, \, 1)$ ja vähimruutude lahendi $\widehat{x} = (1, \, 1)^T$. Süsteemis (4) võib korraga olla kaks paremat poolt, näiteks teise parema poole kaks esimest elementi on samasugused, aga kolmas element $b_3 = -5$, siis pärast esimest sammu teeme arvutusi teise parema poole järgi, võtame juhtelemendi $(1, \; 1)$. Siis on teise rea koefitsiendid (0 0 0 1 1 1 -2). Võrratuste süsteem on vastuoluline $b_3 = -5$ korral. Kuna erinevalt simpleksmeetodist me ei kasuta minimaalse jagatise määramist, saab ülesannet lahendada järjestikku mitme erineva parema poole korral, kasutades eelmise parema poole korral tehtud arvutusi.

3. Näide panga juhtimisest

Mitme sihifunktsiooniga ülesandes võib need funktsioonid järjestada vastavalt tähtsusele ja kasutada leksikograafilist optimeerimist või määrata sihifunktsioonidele mittenegatiivsed kaalukordajad, vt [5]. Selles töös optimeerime panga tööd dialoogrežiimis, andes ette sihifunktsioonide alumised väärtused (eesmärkide tasemed). Kui kõige tähtsama sihifunktsiooni tase on piisav, hakkame seejärel ette andma järgmiste sihifunktsioonide tasemeid.

Näide 3.1. Pank võib välja laenata maksimaalselt 12 miljonit eurot. Tabelis 3.1 on toodud vastavad karakteristikud.

Tabel 3.1

laen	personaalne	auto	kinnisvara	põllumajandus	kommerts
intress	0,140	0,150	0,120	0,125	0,100
kadu	0,10	0,04	0,03	0,05	0,02
kogus	x(1)	x(2)	x(3)	x(4)	x(5)

Viimases reas on toodud vastavate laenude planeeritavad suurused miljonites eurodes. Laenupoliitika peab olema selline, et summaarne kasum z_1 ja kinnisvara laen $z_2 = x_3$ oleks maksimaalsed. See on mitme sihifunktsiooniga planeerimisülesanne. Klassikaline võte seisneb mittenegatiivsete kaalukordajate p_i abil ülesande taandamises ühe sihifunktsiooniga ülesandeks, $z = p_1 z_1 + p_2 z_2 \to max$.

$$z_1 = 0,14 \times 0,9x_1 + 0,15 \times 0,96x_2 + 0,12 \times 0,97x_3 + 0,125 \times 0,95x_4 +$$

$$+0,1 \times 0,98x_5 - 0,1x_1 - 0,04x_2 - 0,03x_3 - 0,05x_4 - 0,02x_5,$$

$$
\begin{gathered}
z_1 = 0,026x_1 + 0,104x_2 + 0,0864x_3 + 0,06875x_4 + 0,078x_5 \to max \\
z_2 = x_2 \to max \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 12 \\
x_4 + x_5 \geq 4,8 \\
x_1 + x_2 - x_3 \leq 0 \\
0,06x_1 - 0,01x_3 + 0,01x_4 - 0,02x_5 \leq 0 \\
x \geq 0.
\end{gathered} \tag{5}
$$

Selle ülesande teine kitsendus tähendab, et põllumajandus- ja kommertslaene peab olema vähemalt 40 protsenti üldsummast. Elamuehitamise soodustamiseks peab selleks antav laen kolmandas kitsenduses olema mitte väiksem kui personaalsete ja autoostulaenude summa. Mittetagastuvate laenude summa ei tohi moodustada mitte rohkem kui 4 protsenti üldsummast. Teisendades võrratust

$$\frac{0,1x_1 + 0,04x_2 + 0,03x_3 + 0,05x_4 + 0,02x_5}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} \leq 0,04,$$

saame neljanda kitsenduse. Asendame sihifunktsioonid võrratusega $z_i \geq z_{i0}$, kus z_{i0} on ette antav parameeter. Siin võiks z_{10} olla näiteks "soovitav" kasumi suurus.

$$
\begin{gathered}
z_1 = 0,026x_1 + 0,104x_2 + 0,0864x_3 + 0,06875x_4 + 0,078x_5 \geq z_{10} \\
z_2 = x_2 \geq z_{20} \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 12 \\
x_4 + x_5 \geq 4,8 \\
x_1 + x_2 - x_3 \leq 0 \\
0,06x_1 - 0,01x_3 + 0,01x_4 - 0,02x_5 \leq 0 \\
x \geq 0.
\end{gathered} \tag{6}
$$

Kui me arvestame ainult esimest sihifunktsiooni, maksimeerime kasumit, siis selle ülesande optimaalne lahend on

$$\widehat{x} = (0;\ 3,6;\ 3,6;\ 0;\ 4,8)^T,\ z_{1max} = 1,05984.$$

Kasum on maksimaalne autoostu-, kinnisvara- ja kommertslaenude korral.

Tabelis 3.2 on toodud süsteemi (2) minimaalse normiga lahendid sihifunktsioonide erinevate eesmärkide tasemete korral.

Tabel 3.2

z1(0)	z2(0)	x(1)	x(2)	x(3)	x(4)	x(5)
1,0	4,0	0,41	2,79	4,0	2,26	2,54
1,0	5,0	0,18	2,02	5,0	2,29	2,51
1,0	6,0	0	1,2	6,0	1,90	2,90
1,0	7,0	0	0,20	7,0	0	4,8
1,0	8,0	.	.	.	.	.
1,02	4,0	0,16	3,04	4,0	2,23	2,57
1,02	5,0	0	2,2	5,0	1,64	3,16
1,02	6,0	.	.	.	.	.
1,05	4,0	0	3,20	4,0	0,30	4,50
1,05	5,0	.	.	.	.	.

Kolmel juhul on eesmärkide tasemed liiga kõrged, võrratuste süsteem on vastuoluline. Toodud tabeli järgi võime valida välja kõige sobivamad eesmärkide tasemed.

4. Komplementaarse ülesande lahendamine

G. Dantzig, A. W. Tucker, C. E. Lemke, R. W. Cottle, K. G. Murty [6] jt on välja töötanud mitmeid meetodeid komplementaarse ülesande lahendamiseks. Lahendamisel kasutatakse enamasti Gaussi elimineerimismeetodit, hilisemates töödes ka sisepunkti meetodit. Põhimõtteliselt võib ülesannet (2) lahendada kõikide ruutplaneerimise algoritmidega. Sihifunktsiooni eripära võimaldab olulisel määral vähendada ülesande mõõdet. Erinevalt simpleksmeetodist ei kasutata minimaalse jagatise testi. Ülesandes (4) teeme kaht liiki teisendusi. Esiteks, lisamuutuja s_i asendamine duaalmuutujaga y_i või vastupidi. Teiseks, vahetamine, näiteks muutuja s_i vahetame mitte vastava täiendmuutuja, vaid mingi teise muutuja y_j vastu.

Definitsioon 4.1 Nimetame baasi *standartseks*, kui süsteemi (4) teisendamisel on juhtelement ühel kahest peadiagonaalist. Vastasel korral on baas *mittestandartne*.

Alljärgnevas algoritmis viiakse sarnaselt duaalse simpleksmeetodiga baasist välja kõige negatiivsem muutuja standartse baasi korral, see muutuja asendatakse tema täiendmuutujaga. Mittestandartse baasi korral viiakse välja kaks muutujat ja tuuakse asemele samuti kaks muutujat.

Esialgse baasi moodustavad lisamuutujad, see on standartne. Lisamuutuja asendamisel vastava täiendmuutujaga jääb baas standartseks. Mittestandartne baas tekib kui komplementaarsuse tingimus $y_i s_i = 0$ ei ole täidetud. Näiteks selleks vahetame baasis esmalt muutuja s_i muutuja s_k vastu ja seejärel duaalmuutuja y_k asemel toome baasi y_j.

Kui parem pool $b_i < 0$ ja me valime selle rea juhtreaks, siis näitame, et $\|x\|^2$ kasvab. Selleks korrutame võrrandeid $Ax + s = b$ vastava duaalmuutujaga y_i ja liidame kokku. Sealjuures komplementaarsuse tõttu kõik korrutised $y_i s_i = 0$. Samasuguse summa saame korrutades võrrandeid $-x - A^T y = 0$ vastava muutujaga $-x_j$ ja kõiki võrrandeid kokku liites. Nende kahe summa võrdlemisel saame avaldise

$$\sum y_i b_i = -\|x\|^2 .$$

Kui me asendame ülesandes (4) lisamuutuja s_i duaalmuutujaga y_i, siis $b_i < 0$ korral kasvab $\|x\|^2$. Töödes [6, 7] on kirjeldatud erinevaid variante komplementaarse ülesande (4) lahendamiseks *criss-cross* tüüpi meetodiga. Need erinevad juhtrea ning juhtveeru valiku jt detailide poolest. Nende võrdlemine pole käesoleva töö eesmärk. Ka selles töös esitatav algoritm COMP kuulub sellist tüüpi meetodite hulka.

Algoritm COMP (A,b)
0. Võtta alglahendiks $y = 0$, $s = b$, alustada tsüklit 1–7.
1. Leida $b_{i0} = minb_i, i = 1, ..., m$. Kui miinimum pole ühene, siis võtta maksimaalne indeks.
2. Kui $b_{i0} \geq 0$, siis võtta $x = -yA$, stopp, ülesanne on lahendatud.
3. Kui süsteemis (4) on rida $i0$ mittenegatiivne, siis võrratuste süsteem (1) on vastuoluline, stopp.
4. Kui reas $i0$ olevale baasimuutujale vastava täiendmuutuja ees on negatiivne koefitsient, siis tuua see täiendmuutuja baasi.
6. Vastasel juhul, kui koefitsient eelmisel sammul pole negatiivne, siis vahetada baasis esmalt muutuja $i0$ muutuja k vastu (selle ees peab olema negatiivne kordaja) ja seejärel reas k muutuja k muutuja $i0$ vastu.
7. Tsükli lõpp.

Märkus 4.1. Kui baasis on n muutujat y_i ja mõni nendest negatiivne, siis sammul 6 tuleb teha asendus, valida kaks juhtelementi väljaspool peadiagonaali.

Märkus 4.2. Lahendatud näidetes algoritmi sammude arv ei ületanud oluliselt võrratuste arvu.

Kokkuvõtvalt võime öelda et vähimruutude meetod on kõrvuti simpleksmeetodi ja sisepunkti meetodiga rakendatav paljude juhtimise ja planeerimise ülesannete korral. Selles töös kirjeldatud meetod on rakendatav ka ühe sihifunktsiooniga ülesandes, kui lisada ülesande kitsendustele võrratus sihifunktsiooni kohta $(c, x) \geq z_o$ kolme erineva parema poole z_0 korral (sarnaselt näitega 2.1). Need paremad pooled erineksid vaid selle parameetri väärtuste poolest. Minimaalne parameetri z_0 väärtus võiks olla nii väike, et võimaldaks määrata lubatavate lahendite olemasolu. Suuruselt järgmine oleks "soovitav" sihifunktsiooni maksimum ja maksimaalne piisavalt suur. Kui ka selle korral on võrratuste süsteemil lahend, siis on sihifunktsioon tõkestamata.

Kirjandus

[1] Gale, D. How to solve linear inequalities? *Amer. Math. Monthly* **76(6)** (1969),

589–599.

[2] Lawson, C., Hanson, R. *Solving Least Squares Problems.* Prentice-Hall, New-Jersey, 1974.

[3] Übi, E. Mathematical programming via the least squares method. *Cent. Eur. J. Math.* **8(4)** (2010), 795–806.

[4] Björck, A. *Numerical Methods for Least-squares Problems.* Linköping, 1996.

[5] Rardin, R. *Optimization in Operations Research.* Prentice-Hall, New-Jersey, 1998.

[6] Fletcher, R. *Practical Methods of Optimization.* John Wiley and Sons, Chichester, 1996.

[7] Klafszky, E., Terlaky, T. Some generalizations of the criss-cross method for quadratic programming. *Optimization* **24** (1992), 1–2.

