Matemaatikaolümpiaadid

Õpilaste matemaatikavõistlused

Eestis on õpilastele kujunenud välja traditsioonilised igal aastal toimuvad matemaatikavõistlused: piirkonnavoorud, lõppvoorud, lahtised võistlused ja valikvõistlused. Lisaks sellele võetakse osa kahest rahvusvahelisest võistlusest – *Balti Tee* ja IMO (*International Mathematical Olympiad*).

Balti Tee on võistkondlik matemaatikavõistlus, kus viieliikmelistele võistkondadele antakse nelja ja poole tunni jooksul ühiselt lahendamiseks 20 ülesannet geomeetriast, algebrast, arvuteooriast ja diskreetsest matemaatikast. Esimene *Balti Tee* peeti 1990. aastal Riias Leedu, Läti ja Eesti osavõtul. Alates 1992. aastast on osavõtjateks võistkonnad kõigist Balti mere äärsetest riikidest (Venemaa on esindatud Peterburi võistkonnaga), Norrast ja Islandilt. Eestis on *Balti Tee* peetud neli korda: 1991., 1994., 2002. ja 2012. aastal.

Rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad IMO on iga-aastane individuaalne matemaatikavõistlus, kus igast kutsutud riigist võib osaleda kuni 6 õpilast. Võistlus on kahepäevane: kummalgi päeval lahendatakse nelja ja poole tunni jooksul kolm ülesannet. Esimene IMO peeti 1959. aastal Bukarestis ja sellest võttis osa 44 õpilast 6 tolleaegse sotsialismileeri riigist. Esimese lääneriigina osales 1965. aastal Soome. Alates 1967. aastast hakkas osavõtjaskond järk-järgult laienema ning praeguseks on see kasvanud rohkem kui 500 osavõtjani umbes 100 riigist. Aastal 1980 oli esimene (ja loodetavasti viimane) kord, millal IMO jäi toimumata. Eesti osales esmakordselt 1992. aastal Moskvas vaatlejana ning alates 1993. aastast Istanbulis täieõigusliku osavõtjana.

Kõigist nendest võistlustest aastail 2013–2016 on antud ülevaade EMS-i nende aastate aastaramatus 2013–2017. Käesolevas aastaraamatus me aga 2017. aasta kohta ülevaadet ei anna, sest kogu informatsioon loetletud võistluste kohta on esitatud Oleg Košiku suurepäraselt kujundatud matemaatikaolümpiaadide kodulehel

http://www.math.olympiaadid.ut.ee/html/index.php?id=avaleht

Känguru

Känguru on maailma populaarseim matemaatikavõistlus, mille eesmärgiks on mänguliste ülesannete kaudu populariseerida matemaatikat. Võistlusel osalevad õpilased kuues vanuserühmas 1.–12. klassini, kui kool on avaldanud eelnevalt soovi oma õpilastega võistlusest osa võtta. Ülesannete lahendamiseks on aega 1 tund ja 15 min. Tulemuste arvestust peetakse õpilaste kohta individuaalselt. Võistlus toimub igal aastal märtsis. Selle võistluse arhiiviga saab tutvuda Tartu Ülikooli teaduskooli kodulehel:

https://www.teaduskool.ut.ee/et/ainevoistlused/kanguru

Üliõpilaste rahvusvaheline matemaatikavõistlus

Ka üliõpilastele korraldatakse rahvusvahelisi matemaatikaülesannete lahendamise võistlusi. Nendest on lühiülevaate andnud eelmises EMSi aastaraamatus Aleksei Lissitsin[1] . Detailne info nende võistluste kohta on esitatud Tartu Ülikooli matemaatikavõistluste materjalide kodulehel *http://math.ut.ee/imc/*

IMC logo.

Tähtsaim nendest võistlustest on nn IMC ehk *International Mathematics Competition for University Students*, mille kodule-

[1]Vt: *Eesti Matemaatika Seltsi aastaraamat 2013–2016.* Tartu, 2017, lk 210–215.

hekülg on *http://www.imc-math.org/*. See võistlus on mõeldud ülikooli põhiõppe taseme matemaatikaülesannete lahendamiseks. Osavõtja vanus ei tohi ületada 23 aastat. 2017. aastal toimus see võistlus juba 24-ndat korda ja see toimus 31. juulist 6. augustini Bulgaarias Blagoevgradis ülikooli *American University in Bulgaria* ruumides ja selle korraldas *University College London*. Alates 2010. aastast on need võistlused toimunud igal aastal juuli lõpus ja augusti alguses Blagoevgradis *American University in Bulgaria* ruumides, korraldajaks ikka *University College London*. Varasematel aastatel on see võistlus toimunud ka mujal. Esimene võistlus toimus 1994. aastal Bulgaarias Plovdivis 28. juulist 2. augustini ja see korraldati projekti *Tempus Project No. S_JEP-01980-94* toetusel. Ülesanded on põhiliselt matemaatilisest analüüsist, algebrast, arvuteooriast ja diskreetsest matemaatikast. Võistluseks on ette nähtud kaks päeva, kummalgi päeval lahendatakse viie tunni jooksul viis ülesannet.

2017. aastal esitati lahendamiseks järgmised ülesanded (ülesanded 1–5 esimesel päeval, ülesanded 6–10 teisel päeval; ülesande tekstile on lisatud ka ülesande koostajad).

Ülesanne 1. Leida kõik kompleksarvud λ, nii et leidub positiivne täisarv n ja reaalarvuliste elementidega $(n \times n)$-maatriks A, mille korral $A^2 = A^T$ ja λ on maatriksi A omaväärtus.

(*Alexandr Bolbot, Novosibirski Riiklik Ülikool*)

Ülesanne 2. Olgu funktsioon $f : \mathbb{R} \longrightarrow]0; \infty[$ diferentseeruv ning leidub selline konstant $L > 0$, et

$$|f'(x) - f'(y)| \leq L \cdot |x - y|$$

iga x, $y \in \mathbb{R}$ korral. Näidata, et

$$(f'(x))^2 < 2Lf(x)$$

iga $x \in \mathbb{R}$ korral.

(*Jan Šustek, Ostrava Ülikool*)

Ülesanne 3. Tähistagu $P(m)$ iga positiivse täisarvu m korral selle arvu positiivsete tegurite korrutist (näiteks $P(6) = 36$). Iga positiivse täisarvu n jaoks defineerime arvud $a_1(n)$, $a_2(n), \ldots, a_{2017}(n)$

seostega

$$a_1(n) = n,\ a_{k+1}(n) = P(a_k(n)) \quad (k = 1, 2, \ldots, 2016).$$

Otsustada, kas iga alamhulga $S \subseteq \{1, 2, \ldots, 1017\}$ jaoks leidub positiivne täisarv n, nii et kehtib järgmine omadus:

> *iga täisarvu $k \in \{1, 2, \ldots, 1017\}$ korral arv $a_k(n)$ on mingi täisarvu ruut parajasti siis, kui $k \in S$.*

(*Matko Ljulj, Zagrebi Ülikool*)

Ülesanne 4. Linnas on n elanikku ja igal elanikul on selles linnas täpselt 1000 sõpra (sõprus on vastastikune). Tõestada, et selle linna elanike hulgast on võimalik välja valida elanike hulk S, nii et vähemalt $n/2017$ elanikul hulgast S on täpselt kaks sõpra hulgas S.

(*Rooholah Majdodin ja Fedor Petrov,*
St. Peterburgi Riiklik Ülikool)

Ülesanne 5. Olgu k ja n positiivsed täisarvud, kusjuures $n \geq k^2 - 3k + 4$, ning olgu

$$f(z) = z^{n-1} + c_{n-2}z^{n-2} + \ldots + c_0$$

kompleksarvuliste kordajatega polünoom, nii et

$$c_0 c_{n-2} = c_1 c_{n-3} = \ldots = c_{n-2} c_0 = 0.$$

Tõestada, et polünoomidel $f(z)$ ja $z^n - 1$ on vähemalt $n - k$ ühist juurt.

(*Vsevolod Lev ja Fedor Petrov,*
St. Peterburgi Riiklik Ülikool)

Ülesanne 6. Olgu $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ pidev funktsioon, millel eksisteerib piirväärtus $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ (lõplik või lõpmatu). Tõestada, et

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f(nx)\, dx = L.$$

(*Alexandr Bolbot, Novosibirski Riiklik Ülikool*)

Ülesanne 7. Olgu $p(x)$ reaalarvuliste kordajatega mittekonstantne polünoom. Iga positiivse täisarvu n jaoks olgu

$$q_n = (x+1)^n p(x) + x^n p(x+1).$$

Tõestada, et leidub ainult lõplik arv täisarve n, nii et polünoomi $q_n(x)$ kõik juured on reaalarvud.

(*Alexandr Bolbot, Novosibirski Riiklik Ülikool*)

Ülesanne 8. Defineerime maatriksite jada A_1, $A_2, \ldots$ järgmiste rekurrentsete seostega:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & I_{2^n} \\ I_{2^n} & A_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

kus I_m tähistab m-ndat järku ühikmaatriksit. Tõestada, et maatriksil A_n on $n+1$ erinevat täisarvulist omaväärtust $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n$ vastavalt kordsustega $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$.

(*Snježana Majstorović, J. J. Strossmayeri Ülikool Osijekis, Horvaatia*)

Ülesanne 9. Defineerime pidevalt diferentseeruvate funktsioonide jada $f_1, f_2, \ldots : [0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ järgmiste rekurrentsete seostega:

$$f_1 = 1, \ f_{n+1}' = f_n f_{n+1} \text{ vahemikus }]0, 1[\text{ ja } f_{n+1}(0) = 1.$$

Näidata, et iga $x \in [0, 1[$ korral eksisteerib piirväärtus $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ ja leida see piirväärtus.

(*Tomáš Bárta, Charlesi Ülikool, Praha*)

Ülesanne 10. Olgu K võrdkülgne kolmnurk tasandil. Tõestada, et iga $p > 0$ korral leidub $\varepsilon > 0$, mis rahuldab järgmist omadust: kui n on positiivne täisarv ja $T_1, \ldots, T_n$ on üksteisega mittekattuvad (ingl. k.: *non-overlapped*) kolmnurgad kolmnurga K sees, nii et igaüks neist on homoteetne kolmnurgaga K ning

$$\sum_{\ell=1}^{n} \operatorname{area}(T_\ell) > \operatorname{area}(K) - \varepsilon,$$

siis

$$\sum_{\ell=1}^{n} \text{perimeter}(T_\ell) > p.$$

(*Fjodor Malõšev, Steklovi-nim. Matem. Instituut, ja Ilja Bogdanov, MIPT, Moskva*)

Lahenduste eest oli võimalik maksimaalselt saada 100 punkti (iga ülesande eest 10 punkti). Maksimaalse punktide arvu 100 punkti said ainult kaks võistlejat – Daniil Kljuev St Petersburgi Riiklikust Ülikoolist ja Asael Mordechai Reiter Iisraeli rahvusvõistkonnast. Veidi vähem, 97 punkti, sai Amotz Oppenheim Iisraeli rahvusvõistkonnast (Tel Avivi Ülikool). Nemad kõik said võistluse peaauhinna *Grand First Prize.*

Üle 90 punkti said veel kolm osavõtjat: Stanislav Jeršov ja Dmitri Kratšun St Petersburgi Riiklikust Ülikoolist ning Omri Nisan Solan Iisraeli rahvusvõistkonnast (Tel Avivi Ülikool). Nendel kolmel oli tulemuseks 91 punkti. Nemad said esimese auhinna (*First Prize*). Esimese auhinnaga autasustati veel 65 osalejat, nende punktisaak oli vahemikus 46–83 punkti.

Teise auhinnaga (*Second Prize*) autasustati 73 osalejat, nende punktide arv oli vahemikus 32–45 punkti. Kolmanda auhinna (*Third Prize*) saajaid oli 94, nende punktide arv oli vahemikus 20–31 punkti. Ära märgiti (*Honourable Prize*) 40 osalejat, nende punktide arv oli vahemikus 10–19.

Tartu Ülikooli võistkonna liikmete tulemused olid: Oliver Nisumaa – 40 punkti, *Second Prize*; Andres Põldaru – 35 punkti, *Second Prize*; Janno Veeorg – 20 punkti, *Third Prize*; Triinu Veeorg – 13 punkti, *Honourable Prize.*

Võistkondlik paremusjärjestus (10 esimest võistkonda):

1. Iisraeli rahvusmeeskond – 373,50[2]
2. St Petersburgi Riiklik Ülikool – 363,83

[2]Võistkonna kolme parima tulemuse saanud liikme punktide summa pluss võistkonna kõigi liikmete punktisummade aritmeetiline keskmine.

3. Moskva Füüsika- ja Tehnoloogiainstituut – 265,43
4. Eötvös Lorándi Ülikool, Budapest – 233,20
5. Sharifi Tehnoloogiaülikool, Teheran – 226,00
6. Varssavi Ülikool – 218,25
7. Jerevani Riiklik Ülikool – 213,25
8. Bonni Ülikool – 212,17
9. Barcelona Tehnikaülikool – 211,20
10. Kõrgem Majanduskool, Moskva – 210,33

NCUMC logo.

Lisaks ülaltoodud suurele võistlusele toimub ka kohalikke rahvusvahelisi matemaatikaülesannete lahendamise võistlusi üliõpilastele. Üks neist korraldatakse iga aasta kevadsemestril St Petersburgis. Selle võistluse ametlik nimetus on *North Countries Universities Mathematical Competition (NCUMC)* ja koduleht on *http://mathdep.ifmo.ru/ncumc/*. 2017. aastal toimus see võistlus neljandat korda ning sellest võtsid osa ka Tartu Ülikooli esindajad ja edukalt: Janno Veeorg ja Andres Põldaru said 1. järgu diplomi ning Oliver Nisumaa ja Triinu Veeorg said 2. järgu diplomi. Võistkondlikult saavutas Tartu Ülikooli võistkond 21 võistkonna seas 5. koha.