Diameeter-2 omadusega Banachi ruumide geomeetriline struktuur

JOHANN LANGEMETS[1]
Tartu Ülikool

Sissejuhatus

2001. aastal näitasid O. NYGAARD ja D. WERNER (vt [15]), et mis tahes lõpmatumõõtmelises ühtlases algebras on ühikkera iga mittetühja suhteliselt nõrgalt lahtise alamhulga diameeter kaks. Kui Banachi ruumil on selline omadus, siis öeldakse, et tal on *diameeter-2 omadus*. Diameeter-2 omadusega on näiteks Daugaveti omadusega Banachi ruumid (vt [16]), lõpmatumõõtmelised C^*-algebrad (vt [4]) ja mitterefleksiivsed Banachi ruumid, mis on M-ideaalid oma teises kaasruumis (vt [14]).

Suhteliselt nõrgalt lahtise alamhulga erijuhuks on viil, kusjuures on teada, et ühikkera iga mittetühi suhteliselt nõrgalt lahtine alamhulk sisaldab teatud viilude kumerat kombinatsiooni. Seda asjaolu silmas pidades vaatlevad T. A. ABRAHAMSEN, V. LIMA ja O. Nygaard artiklis [2] diameeter-2 omaduse kõrval selle kahte erinevat versiooni – *tugevat diameeter-2 omadust* ja *lokaalset diameeter-2 omadust*. Järgnevas annamegi lühiülevaate väitekirjas [13] käsitletatud diameeter-2 omaduste peamistest uurimissuundadest.

1. Viilud ja diameeter-2 omadused

Olgu edaspidi X mittetriviaalne Banachi ruum üle reaalarvude korpuse. Sümbolitega B_X ja S_X tähistame vastavalt selle ruumi kinnist ühikkera ja ühiksfääri. Ruumi X kaasruumi jaoks kasutame tähist X^*.

[1] Johann Langemets on 2015. a. Arnold Humala preemia laureaat.

Definitsioon. Ühikkera *viiluks* nimetatakse hulka kujul

$$S(x^*, \alpha) = \{x \in B_X : x^*(x) > 1 - \alpha\},$$

kus $x^* \in S_{X^*}$ ja $\alpha > 0$.

Paneme tähele, et viil on ühikkera B_X lõige lahtise poolruumiga $\{x \in X : x^*(x) > 1 - \alpha\}$. Seega on viil alati suhteliselt nõrgalt lahtine alamhulk.

Viilude kumera kombinatsiooni all mõeldakse hulka kujul

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i S(x_i^*, \alpha_i),$$

kus $n \in \mathbb{N}$ ja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$ on sellised, et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Erinevalt viilust ei tarvitse viilude kumer kombinatsioon olla alati suhteliselt nõrgalt lahtine alamhulk. Samas on teada, et iga mittetühi ühikkera suhteliselt nõrgalt lahtine alamhulk sisaldab mingit viilude kumerat kombinatsiooni (vt nt [8]).

Norra matemaatikud T. A. Abrahamsen, V. Lima ja O. Nygaard tõid artiklis [2] sisse järgmised diameeter-2 omadused:

Definitsioon. Banachi ruumil X on

- *lokaalne diameeter-2 omadus* (LD2P), kui iga B_X viilu diameeter on 2;
- *diameeter-2 omadus* (D2P), kui iga lõpliku arvu B_X viilude mittetühja ühisosa diameeter on 2;
- *tugev diameeter-2 omadus* (SD2P), kui iga lõpliku arvu B_X viilude kumera kombinatsiooni diameeter on 2.

Eelneva põhjal on selge, et SD2P $\Rightarrow$ D2P ja D2P $\Rightarrow$ LD2P. Osutub, et paljudel klassikalistel Banachi ruumidel on isegi tugev diameeter-2 omadus.

Näide 1.

- Ruumidel $c_0, \ell_\infty, C[0,1]$, $L_1[0,1]$ ja $L_\infty[0,1]$ on tugev diameeter-2 omadus.

- Refleksiivsetel ruumidel (nt ℓ_p, kus $1 < p < \infty$) ei ole isegi lokaalset diameeter-2 omadust, sest neis ruumides leidub kui tahes väikese diameetriga viile. Samal põhjusel ei ole ka ruumil ℓ_1 lokaalset diameeter-2 omadust.

Artiklis [2] püstitati hüpotees, et need kolm diameeter-2 omadust on üldiselt üksteisest erinevad. Hispaania matemaatikud J. Becerra Guerrero, G. López Pérez ja A. Rueda Zoca tõestasid oma artiklis [5], et leidub Banachi ruum, millel on LD2P, aga ei ole D2P. Omaduste D2P ja SD2P erinevus tõestati sõltumatult artiklites [10] ja [3]. Täpsemalt, varasemast oli teada, et D2P omadus kandub liidetavatelt üle ℓ_p-summale iga $1 \leqslant p \leqslant \infty$ korral (vt [2]). Teisalt, kui $1 < p < \infty$, siis Banachi ruumide ℓ_p-summal ei ole kunagi tugevat diameeter-2 omadust:

Teoreem 1 ([10]). *Olgu X ja Y Banachi ruumid ning $1 < p < \infty$. Siis Banachi ruumil $X \oplus_p Y$ ei ole tugevat diameeter-2 omadust.*

Järeldus 2. *Banachi ruumil $c_0 \oplus_2 c_0$ on diameeter-2 omadus, aga pole tugevat diameeter-2 omadust.*

2. Oktaeedrilised normid

1989. aastal võttis Prantsuse matemaatik G. Godefroy (vt [9]) kasutusele oktaeedrilise normi mõiste, et kirjeldada Banachi ruume, mis sisaldavad isomorfselt ruumi ℓ_1. Selle mõiste kõrval vaatleme ka kaht nõrgemat versiooni.

Definitsioon. Banachi ruum X on

- *lokaalselt oktaeedriline* (LOH), kui iga $x \in S_X$ ja $\varepsilon > 0$ jaoks leidub $y \in S_X$ nii, et
$$\|x \pm y\| \geqslant 2 - \varepsilon;$$
- *nõrgalt oktaeedriline* (WOH), kui iga $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in S_X$ ja $x^* \in S_{X^*}$ jaoks leidub $y \in S_X$ nii, et iga i ja $t > 0$ korral
$$\|x_i + ty\| \geqslant (1 - \varepsilon)(|x^*(x)| + t);$$

- *oktaeedriline* (OH), kui iga $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in S_X$ ja $\varepsilon > 0$ jaoks leidub $y \in S_X$ nii, et iga i korral

$$\|x_i + y\| \geqslant 2 - \varepsilon.$$

Definitsioonist on selge, et OH $\Rightarrow$ WOH ja WOH $\Rightarrow$ LOH.

Näide 2.

- Ruumid $\ell_1, C[0,1]$, $L_1[0,1]$ ja $L_\infty[0,1]$ on oktaeedrilised.
- Ruumid c_0 ja ℓ_p, kus $1 < p \leqslant \infty$, ei ole lokaalselt oktaeedrilised.

Artiklitest [9] ja [6] saame teada, et Banachi ruumil on tugev diameeter-2 omadus parajasti siis, kui tema kaasruum on oktaeedriline. Varasemast oli teada ka, et lokaalse diameeter-2 omadusega ruumi kaasruum on lokaalselt oktaeedriline (vt nt [7]). Diameeter-2 omadusega ruumide kaasruumide kirjeldus õnnestus meil anda artiklis [11].

Teoreem ([3]). *Banachi ruumil on diameeter-2 omadus parajasti siis, kui tema kaasruum on nõrgalt oktaeedriline.*

3. Ruudu omadused

D. KUBIAK (vt [12]) märkas esimesena, et kui Banachi ruumil on mingi ruudu omadus, siis on sellel ruumil ka vastav diameeter-2 omadus. Ruudu omaduste terminoloogia sai sisse toodud ja uuritud artiklis [1].

Definitsioon. Banachi ruum X on

- *lokaalse ruudu omadusega* (LASQ), kui iga $x \in S_X$ jaoks leidub jada $(y_k) \subset S_X$ nii, et

$$\|x \pm y_k\| \to 1 \quad (k \longrightarrow \infty);$$

- *nõrga ruudu omadusega* (WASQ), kui iga $x \in S_X$ jaoks leidub jada $(y_k) \subset S_X$ nii, et

$$\|x \pm y_k\| \to 1 \quad \text{ja} \quad y_k \xrightarrow{w} 0 \quad (k \longrightarrow \infty);$$

- *ruudu omadusega* (ASQ), kui iga $n \in \mathbb{N}$ ja $x_1, \ldots, x_n \in S_X$ jaoks leidub jada $(y_k) \subset S_X$ nii, et iga i korral

$$\|x_i + y_k\| \longrightarrow 1 \quad (k \longrightarrow \infty).$$

Definitsioonist on selge, et WASQ $\Rightarrow$ LASQ. Osutub, et kehtib ka implikatsioon ASQ $\Rightarrow$ WASQ, kuid see pole nii ilmne:

Teoreem 5. *Kui Banachi ruum on ruudu omadusega, siis ta on ka nõrga ruudu omadusega.*

Näide 3.

- Ruum c_0 on ruudu omadusega.
- Ruum $L_1[0,1]$ on nõrga ruudu omadusega, kuid ei ole ruudu omadusega.
- Ruumid $C[0,1]$, $L_\infty[0,1]$ ja ℓ_p, kus $1 \leqslant p \leqslant \infty$, ei ole lokaalse ruudu omadusega.

Artikli [1] üks põhitulemustest kirjeldab ära terve klassi ruume, mis on ruudu omadusega:

Teoreem 6. *Mitterefleksiivsed Banachi ruumid, mis on M-ideaalid oma teises kaasruumis, on ruudu omadusega.*

Siinkohal tahaksime ära mainida ka artiklis [1] püstitatud kaks lahtist küsimust, millele pole tänaseni veel vastuseid teada:

Küsimus 1. Kas on olemas Banachi ruum, mis on LASQ, aga ei ole WASQ?

Küsimus 2. Kas on olemas kaasruum, mis on ASQ?

Ülevaade tulemustest

Eelnevalt defineeritud geomeetriliste omaduste omavaheline vahekord on kujutatud järgmisel skeemil:

$$
\begin{array}{ccccc}
X \text{ on } ASQ & \overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow} & WASQ & \underset{?}{\overset{\Longrightarrow}{\Longleftarrow}} & LASQ \\
\not\Uparrow\Downarrow & & \not\Uparrow\Downarrow & & \not\Uparrow\Downarrow \\
X \text{ on } SD2P & \overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow} & D2P & \overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow} & LD2P \\
\Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\
X^* \text{ on } OH & \overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow} & WOH & \overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow} & LOH
\end{array}
$$

Järgmisesse tabelisse on koondatud eelmainitud omaduste olulisemad stabiilsustulemused.

Stabiilsus ℓ_p-summadel

$X \oplus_p Y$	X, Y	p	Viited
LD2P	X ja Y LD2P	$1 \leqslant p < \infty$	[2], [3]
	X või Y LD2P	$p = \infty$	
D2P	X ja Y D2P	$1 \leqslant p < \infty$	[2], [3]
	X või Y D2P	$p = \infty$	
SD2P	X ja Y SD2P	$p = 1$	[2], [3]
	X või Y SD2P	$p = \infty$	
LASQ	X ja Y LASQ	$1 \leqslant p < \infty$	[1]
	X või Y LASQ	$p = \infty$	
WASQ	X ja Y WASQ	$1 \leqslant p < \infty$	[1]
	X või Y WASQ	$p = \infty$	
ASQ	X või Y ASQ	$p = \infty$	[1]
LOH	X või Y LOH	$p = 1$	[11]
	X ja Y LOH	$1 < p \leqslant \infty$	
WOH	X või Y WOH	$p = 1$	[11]
	X ja Y WOH	$1 < p \leqslant \infty$	
OH	X või Y OH	$p = 1$	[11]
	X ja Y OH	$p = \infty$	

Ülalolevast tabelist loeme näiteks, et $X \oplus_p Y$ on omadusega LD2P niipea kui ruumidel X ja Y on LD2P ja p on selline, et $1 \leqslant p < \infty$.

Lõpetuseks soovib autor mainida Eesti Haridus- ja Teadusministeeriumi institutsionaalset uurimistoetust IUT20-57.

Kirjandus

[1] T. Abrahamsen, J. Langemets, V. Lima, *Almost square Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **434** (2016), 1549–1565.

[2] T. Abrahamsen, V. Lima, O. Nygaard, *Remarks on diameter 2 properties*, J. Conv. Anal. **20** (2013), 439–452.

[3] M. D. Acosta, J. Becerra Guerrero, G. López Pérez, *Stability results of diameter two properties*, J. Conv. Anal. **22** (2015), 1–17.

[4] J. Becerra Guerrero, G. López Pérez, A. Rodríguez Palacios, *Relatively weakly open sets in closed balls of C^*-algebras*, J. London Math. Soc. **68** (2003), 753–761.

[5] J. Becerra Guerrero, G. López Pérez, A. Rueda Zoca, *Big slices versus big relatively weakly open subsets in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **428** (2015), 855–865.

[6] R. Deville, *A dual characterisation of the existence of small combinations of slices*, Bull. Austral. Math. Soc. **37** (1988), 113–120.

[7] R. Deville, G. Godefroy, V. Zizler, *Smoothness and renormings in Banach spaces*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, vol. 64, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1993.

[8] N. Ghoussoub, G. Godefroy, B. Maurey, W. Schachermayer, *Some topological and geometrical structures in Banach spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. **378**, 1987.

[9] G. Godefroy, *Metric characterization of first Baire class linear forms and octahedral norms*, Studia Math. **95** (1989), 1–15.

[10] R. Haller, J. Langemets, *Two remarks on diameter 2 properties*, Proc. Est. Acad. Sci **63** (2014), 2–7.

[11] R. Haller, J. Langemets, M. Põldvere, *On duality of diameter 2 properties*, J. Conv. Anal. **22** (2015), 465–483.

[12] D. Kubiak, *Some geometric properties of Cesàro function space*, J. Conv. Anal. **21** (2014), 189–201.

[13] J. Langemets, *Geometrical structure in diameter 2 Banach spaces*, Dissertationes Mathematicae Universitatis Tartuensis 99 (2015), `http://dspace.ut.ee/handle/10062/47446`.

[14] G. López Pérez, *The big slice phenomena in M-embedded and L-embedded spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2005), 273–282.

[15] O. Nygaard, D. Werner, *Slices in the unit ball of a uniform algebra*, Arch. Math. **76** (2001), 441–444.

[16] R. V. Shvydkoy, *Geometric aspects of the Daugavet property*, J. Funct. Anal. **176** (2000), 198–212.