Rajaülesannete lahendamine ratsionaalsplainidega kollokatsioonimeetodil

Erge Ideon[1]
Eesti Maaülikool

Sissejuhatus

Paljud matemaatika, füüsika ja teiste teadusalade probleemid on formuleeritavad rajaülesannete kujul. Vaatleme harilikku teist järku diferentsiaalvõrrandi rajaülesannet

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), \quad x \in (a, b),$$

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta.$$

Eeldame, et ülesandel on olemas lahend, mis on piisava siledusega ja p, q, f on pidevad ning $q(x) \leqslant q < 0$, $x \in (a, b)$. Sellisel juhul on lahend ühene. Traditsioonilised meetodid rajaülesannete lahendamiseks on võrgumeetod, mis annab ainult diskreetse lahendi [1, 2], ja kollokatsioonimeetod polünomiaalsete splainidega. Polünomiaalsed m-järku splainid (defektiga k) on tükiti polünomiaalsed funktsioonid, mis igas vaadeldava lõigu osalõigus on ülimalt m-astme polünoomid, kuid tervikuna moodustavad nõutava siledusega funktsiooni ehk on kogu lõigus $m-k$ korda pidevalt diferentseeruvad. Termin splain, mida tutvustas esmalt Schoenberg aastal 1946 [11] tuleneb inglisekeelsest sõnast *spline*, mis tähendab elastset varrast, mida kasutati siledate kõverate joonestamisel läbi antud punktide.

Rajaülesande lahendamist ruut-ja kuupsplainidega kollokatsioonimeetodil on uurinud mitmed autorid. On teada, et ruut- ja kuupsplainide korral põhineb kollokatsioonimeetodi koonduvuskiiruse $O(h^2)$ tõestus interpoleerimise super-koonduvusel [7, 10]. Klassikalises interpoleerimisülesandes on antud sõlmed ja neile vastavad funktsiooni väärtused x_i, $f(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, ning tuleb

[1] Erge Ideon on 2014. a. Arnold Humala preemia laureaat

 Autoriõigus EMS, 2017

taastada funktsioon f. Interpolatsiooniülesandes ruutsplainidega on antud funktsioon $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ ja väärtused $\bar{y}_i$, $i = 1,\dots,n$, sõlmedes $\xi_i = (x_{i-1} + x_i)/2$, $i = 1,\dots,n$. Splaini S parameetrite määramiseks nõutakse, et $S(\xi_i) = \bar{y}_i$, $i = 1,\dots,n$. Lisatakse lõigu otspunktidega seotud tingimused $S(a) = \alpha_1$, $S(b) = \alpha_2$ või $S'(a) = \alpha_1, S'(b) = \alpha_2$. Kuupsplainidega interpolatsiooniülesandes on antud sõlmedes x_i, $i = 0,\dots,n$, väärtused y_i, $i = 0,\dots,n$, ning otsitakse splaini S, mis rahuldaks tingimusi $S(x_i) = y_i$, $i = 0,\dots,n$. Lisatakse ka $S(a) = \alpha_1, S(b) = \alpha_2$ või $S'(a) = \alpha_1, S'(b) = \alpha_2$. Peale koonduvuskiiruse on interpoleerimise korral teada, et ratsionaalsplainid lähendavad mõningaid funktsioone paremini kui polünomiaalsed splainid [9]. Sellepärast võivad ratsionaalsplainid anda ka mõnedes rajaülesannetes paremaid tulemusi. Järgnevalt tutvustame doktoritöö [5] tulemusi. Töö põhiprobleemiks on rajaülesande lahendamine lineaar/lineaar ja ruut/lineaar ratsionaalsplainidega kollokatsiooni-meetodil ning nende meetodite võrdlemine hästi uuritud ruut-ja kuupsplainidega kollokatsioonimeetoditega.

Lineaar/lineaar ratsionaalsplainidega kollokatsioonimeetod

Vaatleme ühtlase jaotusega lõiku $[a,b]$ punktidega $x_i = a + ih$, $i = 0,\dots,n$, $h = (b-a)/n$, $n \in \mathbb{N}$. Defineerime ka punktid $\xi_i = x_{i-1} + h/2$, $i = 1,\dots,n$.

Lineaar/lineaar ratsionaalsplain on funktsioon $S \in C^1[a,b]$ kujul

$$S(x) = a_i + \frac{c_i(x-\xi_i)}{1 + d_i(x-\xi_i)}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i],$$

kus $1 + d_i(x-\xi_i) > 0$. Saab anda ka esituse üldisemalt

$$S(x) = \frac{\hat{a}_i + \hat{b}_i x}{\hat{c}_i + \hat{d}_i x},$$

kus $\hat{c}_i + \hat{d}_i x < 0$ või $\hat{c}_i + \hat{d}_i x > 0$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

 Autoriõigus EMS, 2017

Kollokatsioonimeetodis nõuame, et splain S rahuldaks diferentsiaalvõrrandit punktides ξ_i ja lisaks rajatingimusi

$$\begin{aligned} &S''(\xi_i) + p(\xi_i)S'(\xi_i) + q(\xi_i)S(\xi_i) = f(\xi_i), \quad i = 1, \ldots, n, \\ &S(a) = \alpha, \quad S(b) = \beta. \end{aligned}$$

Lisame nõudest $S \in C^1[a,b]$ tulevad splaini sisestruktuuri kirjeldavad võrrandid ja jõuame mittelineaarse võrrandisüsteemini splaini parameetrite määramiseks, mille lahendamiseks sobivad harilik iteratsioonimeetod, Gauss-Seideli või Newtoni meetod. Võrdluseks võib tuua, et ruutsplainidega kollokatsioonimeetod on olemuselt lineaarne, sest see viib splaini kordajate määramiseni lineaarsest süsteemist. Kuna lineaar/lineaar ratsionaalsplain on monotoonne, siis on mõtet rajaülesannet selliste splainidega ligikaudselt lahendada vaid siis, kui on teada, et rajaülesande täpne lahend on sama omadusega.

Kollokatsioonimeetodi uurimiseks näidatakse doktoritöös kõigepealt, et interpoleeriva lineaar/lineaar ratsionaalsplaini S ja piisavalt sileda funktsiooni y jaoks, mille korral $y'(x) > 0$, $x \in [a,b]$, tekib superkoondumine punktides x_i: $S(x_i) = y(x_i) + O(h^4)$, $i = 0, \ldots, n$. Tõestatakse ka superkoondumine splaini S esimeste tuletiste jaoks $S'(x) = y'(x) + O(h^3)$ punktides $x = \xi_i + th$, $t = \pm\sqrt{3}/6$, $i = 1, \ldots, n$, ning samuti näidatakse, et teiste tuletiste jaoks kehtib $S''(\xi_i) = y''(\xi_i) + O(h^2)$, $i = 1, \ldots, n$. Saadud tulemused on avaldatud artiklis [3]. Lineaar/lineaar ratsionaalsplainidega interpolatsiooniülesande esitus on sama nagu ruutsplainidega. Varasemast on teada tulemused ruutsplainidega meetodi superkoondumise kohta. Need leiavad aset samades punktides nagu lineaar/lineaar ratsionaalsplainide korral [8]. Samuti on varasemalt tõestatud interpoleeriva lineaar/lineaar ratsionaalsplaini olemasolu ja ühesus ning et see säilitab geomeetrilisi omadusi nagu monotoonsus [9].

Doktoritöös analüüsitakse ratsionaalsplaini parameetreid määravat mitte-lineaarset võrrandisüsteemi ning tõestatakse lineaar/-lineaar ratsionaalsplainidega kollokatsioonimeetodi korral Bohl-Brouweri püsipunkti printsiipi kasutades lahendi olemasolu. Tegemist on $O(h^2)$ koondumisega ja kehtivad hinnangud, kus on välja eraldatud pealiige, mis kajastab sõltuvust diferentsiaalvõrrandi ja rajatingimuste kordajatest

$$\|S-y\|_\infty \leqslant \frac{h^2}{24}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\frac{y^{IV}-py^{'''}-6\frac{y'''y''}{y'}+6\frac{(y'')^3}{(y')^2}+\frac{3}{2}p\frac{(y'')^2}{y'}}{q}(\xi_i)\right|+o(h^2),$$

$\|S'-y'\|_\infty = O(h^2)$ ja $\|S''-y''\|_\infty = O(h)$. Võrdluseks on varasemast teada (vt [10]) ruutsplainide korral kehtiv

$$\|S-y\|_\infty \leqslant \frac{h^2}{24}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\frac{y^{IV}-py^{'''}}{q}(\xi_i)\right|+o(h^2).$$

Märgime veel, et doktoritööst leiab mitu erinevat esitust lineaar/lineaar ratsionaalsplainidele ning tõestustes kasutatakse splaini esitust splaini väärtuste $S_i = S(x_i)$, $i = 0,\ldots,n$, $\bar{S}_i = S(\xi_i)$, $i = 1,\ldots,n$, kaudu kujul

$$S(x) = \bar{S}_i + \frac{4(S_i-\bar{S}_i)(\bar{S}_i-S_{i-1})(x-\xi_i)}{h(S_i-S_{i-1})+2((\bar{S}_i-S_{i-1})-(S_i-\bar{S}_i))(x-\xi_i)}, \quad x\in[x_{i-1},x_i].$$

Saadud tulemused lineaar/lineaar ratsionaalsplainidega kollokatsioonimeetodi kohta on avaldatud artiklis [6]

Ruut/lineaar ratsionaalsplainidega kollokatsioonimeetod

Vaatleme ühtlase jaotusega lõiku $[a,b]$ punktidega $x_i = a+ih$, $i = 0,\ldots,n$, $h = (b-a)/n$, $n\in\mathbb{N}$. Ruut/lineaar ratsionaalsplain on funktsioon $S\in C^2[a,b]$, millel on igas osalõigus kuju

$$S(x) = a_i + b_i(x-x_{i-1}) + \frac{c_i}{1+d_i(x-x_{i-1})}, \quad x\in[x_{i-1},x_i],$$

kus $1 + d_i(x - x_{i-1}) > 0$. Üldisemalt saab sellele splainile anda esituse ka viie parameetri abil

$$S(x) = \frac{\hat{a}_i + \hat{b}_i x + \hat{c}_i x^2}{\hat{d}_i + \hat{e}_i x}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i],$$

kus $\hat{d}_i + \hat{e}_i x < 0$ või $\hat{d}_i + \hat{e}_i x > 0$. Ruut/lineaar ratsionaalsplain S (või $-S$) on kumer lõigus $[a, b]$, seega on mõtet rajaülesannet selliste splainidega ligikaudselt lahendada vaid siis, kui on teada, et rajaülesande täpne lahend on sama omadusega.

Kollokatsioonimeetodis nõutakse, et splain S rahuldaks diferentsiaalvõrrandit punktides x_i ning rajatingimusi vastavalt

$$\begin{aligned}
&S''(x_i) + p(x_i)S'(x_i) + q(x_i)S(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n,\\
&S(a) = \alpha, \quad S(b) = \beta.
\end{aligned}$$

Need võrrandid moodustavad koos splaini sisestruktuuri kirjeldavate võrranditega jällegi mittelineaarse võrrandisüsteemi splaini parameetrite määramiseks.

Ruut/lineaar ratsionaalsplainidega kollokatsioonimeetodi uurimiseks alustatakse uurimist interpolatsiooniülesandest, mis on sama nagu kuupsplainidega. Eeldades, et $y''(x) > 0$, $x \in [a, b]$, on saadud superkoonduvuse tulemused interpoleeriva ruut/lineaar ratsionaalsplainide ja piisavalt sileda funktsiooni y jaoks $S'(x) = y'(x) + O(h^4)$, punktides $x = x_i$, $i = 0, \ldots, n$, ja $x = (x_{i-1} + x_i)/2$, $i = 1, \ldots, n$, $S''(x) = y''(x) + O(h^3)$ punktides $x = x_i + th$, kus $t = (3 \pm \sqrt{3})/6$, $i = 0, \ldots, n$, ja $S'''(x) = y'''(x) + O(h^2)$, kus $x = (x_{i-1} + x_i)/2$, $i = 1, \ldots, n$. Punktid on samad nagu kuupsplainide korral [12] Saadud tulemused on avaldatud artiklis [4].

Tõestuste jaoks on splain viidud esitusele väärtuste $S(x_i) = S_i$, $i = 0, \ldots, n$, ja teiste momentide $S''(x_i) = M_i$, $i = 0, \ldots, n$, kaudu. Kasutades tulemusi superkoondumisest interpoleerimisel ning

Bohl-Brouweri püsipunkti printsiipi saab näidata lähislahendi S olemasolu ning

$$\|S-y\|_\infty \leqslant \frac{h^2}{12}\max_{1\leqslant i\leqslant n-1}\left|\frac{y^{IV}-\frac{4}{3}\frac{(y''')^2}{y''}}{q}(x_i)\right| + o(h^2).$$

Samuti kehtivad $\|S'-y'\|_\infty = O(h^2)$ ja $\|S''-y''\|_\infty = O(h^2)$. Siin on võimalik tulemusi võrrelda kuupsplain-kollokatsioonimeetodiga ([10])

$$\|S-y\|_\infty \leqslant \frac{h^2}{12}\max_{1\leqslant i\leqslant n-1}\left|\frac{y^{IV}}{q}(x_i)\right| + o(h^2).$$

Arvuliste katsete tulemused nii interpolatsiooni- kui rajaülesande jaoks on kooskõlas töös toodud teoreetilistega. On võetud lihtne funktsioon ning näidatud, et selle korral annavad ratsionaalsplainid võrreldes ruut- ja kuupsplainidega paremaid tulemusi.

Kirjandus

[1] L. Fox, *The Numerical Solution of Two-Point Boundary Value Problems in Ordinary Differential Equations*, Oxford University Press, London, 1957.

[2] L. Collatz, *The Numerical Treatment of Differential Equations*, Springer, Berlin, 1960.

[3] E. Ideon, P. Oja, *Linear/linear rational spline interpolation*, Math. Model. Anal. **15** (2010), 447–455.

[4] E. Ideon, P. Oja, *Quadratic/linear rational spline interpolation*, Math. Model. Anal. **18** (2013), 250–259.

[5] E. Ideon, *Rational spline collocation for boundary value problems*, Tartu, 2013, doktoritöö.

[6] E. Ideon, P. Oja, *Linear/linear rational spline collocation for linear boundary value problems*, Journal of Computational and Applied Mathematics **263** (2014), 32–44.

[7] A.K.A. Khalifa, J.C. Eilbeck, *Collocation with quadratic and cubic splines*, IMA J. Numer. Anal. **2** (1982), 111–121.

[8] B.I. Kvasov, *Quadratic spline interpolation*, Akad. Nauk SSSR, Sib. Otdelenie, Inst. Teoret. i Prikl. Mekh., Novosibirsk, preprint nr 3, 1981.

[9] P. Oja, *Low degree rational spline interpolation*, BIT **37** (1998), 901–909.

[10] P. Oja, A. Reitsekas, *Collocation and subdomain methods with quadratic and cubic splines for boundary value problems*, Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. **36** (1987), 118–128.

[11] I.J. Schoenberg, *Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions*, Quart. Appl. Math. **4** (1946), 45–99, 112–141.

[12] Yu.S. Zavyalov, B.I. Kvasov, V.L. Miroshnicenko, *Methods of Spline-functions*, Nauka, 1980.

 Autoriõigus EMS, 2017