Kumerad aproksimatsiooniomadused

Aleksei Lissitsin[1]
Tartu Ülikool

Selles artiklis jätkame aproksimatsiooniomaduse (edaspidi kasutame ka lühendit a.o.) erinevate versioonide tutvustamist, mille alguse leiab Eve Oja ja Indrek Zolki artiklitest käesolevas aastaraamatus. Et ei oleks palju kordamist, eeldan, et lugeja on juba tutvunud nimetatud artiklitega. Jutustan oma doktoritööst (kaitstud Eve Oja juhendamisel) ja sellega seotud teemadest.

Nagu on juba öeldud, aproksimatsiooniprobleem oli lahtine ligikaudu 40 aastat kuni Per Enflo lahendas selle negatiivselt 1972. aastal konstrueerides Banachi ruumi ilma aproksimatsiooniomaduseta. Albrecht Pietsch oma Banachi ruumide ajaloo raamatus väljendas seda järgmiselt:

“Elu teatud aproksimatsiooniomadustega Banachi ruumides on palju lihtsam. Seega Enflo kontranäite mõju võib kirjeldada Paradiisist pagendamisena. Pärismaailmas aga leiduvad: separaablid ruumid ilma Schauderi baasita, kompaktsed operaatorid, mis pole lähendatavad lõplikumõõtmeliste operaatoritega, jäljeklassioperaatorid ilma jäljeta, [...]”.

Võib öelda, et Banachi ruumide elu osutus hoopis mitmekesisemaks, kui arvati varem. Mitmed autorid hakkasid kohe uurima a.o. erinevaid modifitseeritud versioone. Kordame mõned neist.

1) *Tõkestatud a.o.* Figiel ja Johnson tõestasid aastal 1973, et a.o.-st ei järeldu tõkestatud a.o. Meenutame, et on lahtine küsimus, kas kaasruumi a.o. on alati tõkestatud (või isegi meetriline ehk tõkestatud konstandiga 1).

2) *Kompaktne a.o.* Aastal 1992 näitas Willis, et tõkestatud kompaktsest a.o.-st ei järeldu (tavaline) a.o.

3) *Operaatorideaali ja lihtsalt operaatorite ruumi alamruumi poolt defineeritud a.o.* See mõiste on vahetuks üldistuseks eelmisele, seda a.o. on uurinud nt Reinov 1980-ndate aastate alguses, samuti Grønbæck ja Willis 1990-ndatel aastatel.

[1] Aleksei Lissitsin on 2013. a. Arnold Humala preemia laureaat.

4) *Banachi võrede positiivne a.o.* Meenutame, et selle omaduse kohta pole teada, kas Banachi võrede klassis see erineb a.o.-st. Viimased olulisemad tulemused selle kohta on NIELSENI 1988. aasta artiklis [8].

Erinevate versioonide uurimisega olid seotud ka küsimused, kuidas saab a.o. omadusi tugevdada või nõrgendada, et omadus ikka jääks samaks.

5) *Kompaktsete operaatorite lähendamine teistes topoloogiates.* Meenutame, et Grothendiecki kriteerium ütleb, et ruumil X on a.o. parajasti siis kui iga kompaktne operaator $T \in \mathcal{K}(Y,X)$ on lähendatav lõplikumõõtmeliste operaatoritega (normi topoloogias) ehk $\overline{\mathcal{F}(Y,X)} = \mathcal{K}(Y,X)$ iga Banachi ruumi Y korral. Kuna norm on pidev enda poolt indutseeritud topoloogias, siis viimane võrdus on samaväärne vastava "meetrilise versiooniga" ehk võrdusega ühikkerade jaoks $\overline{B_{\mathcal{F}(Y,X)}} = B_{\mathcal{K}(Y,X)}$, s.t. iga kompaktne operaator $T \in \mathcal{K}(Y,X)$ on lähendatav lõplikumõõtmeliste operaatoritega $S_\alpha \in \mathcal{F}(Y,X)$, mille norm ei ületa operaatori T normi. LIMA, NYGAARD ja Oja [3] näitasid aastal 2000, et normi topoloogia asemel võib siin vaadelda hoopis punktiviisi koondumise topoloogiat: ruumil X on a.o. parajasti siis, kui $\overline{B_{\mathcal{F}(Y,X)}}^{\mathrm{SOT}} = B_{\mathcal{W}(Y,X)}$ iga Y korral (siin SOT tähistab tugevat operaatorite topoloogiat ehk punktiviisi koondumise topoloogiat, mille korral $T_\alpha \xrightarrow[\mathrm{SOT}]{} T$ parajasti siis, kui $T_\alpha y \longrightarrow Ty$ iga $y \in Y$ korral; $\mathcal{W}$ on nõrgalt kompaktsete operaatorite ideaal). Sarnased kirjeldused kompaktse a.o. kohta on saadud ka Lima, Lima, Nygaardi, Oja ja PELANDERI töödes aastatel 2003–2004.

Kumera a.o. mõiste defineerisime esmakordselt minu, KRISTEL MIKKORI ja Eve Oja 2008. aasta artiklis [6], mille üheks esialgseks eesmärgiks oli üldistada punktis 5) toodud kriteeriumid punktiviisi koonduvuse topoloogias alamruumi poolt defineeritud a.o.-dele. Kõrvalmärkusena panime tähele, et mitmed meie tulemused kehtivad ka üldisemal juhul, kus lähendavate operaatorite hulgalt on nõutud ainult tema kumerus ja nulli sisaldavus.

Definitsioon 4. Olgu $A \subset \mathcal{L}(X)$ kumer hulk, mis sisaldab nulli (kasutame siin ja analoogilistes kohtades lühendit $\mathcal{L}(X) :=$

$\mathcal{L}(X,X)$). Öeldakse, et ruumil X on A-aproksimatsiooniomadus (A-a.o.), kui iga $\varepsilon > 0$ ja iga kompaktse hulga $K \subset X$ korral leidub operaator $T \in A$ nii, et $\sup_{x\in K} \|Tx - x\| < \varepsilon$, teiste sõnadega ruumi X ühikoperaator I_X on lähendatav kompaktsetel hulkadel ühtlaselt operaatoritega hulgast A.

Näiteks järgmised väited on samaväärsed:

(i) Ruumil X on A-a.o.

(ii) Iga Banachi ruumi Y korral iga kompaktne operaator $T \in \mathcal{K}(Y,X)$ on lähendatav normi topoloogias operaatoritega hulgast

$$A \circ \{T\} := \{ST \mid S \in A\},$$

mille normid ei ületa operaatori T normi ehk

$$T \in \overline{B_{A\circ\{T\}}} \quad \forall T \in B_{\mathcal{K}(Y,X)}$$

(tähistame siin hulga H jaoks $B_H := \{x \in H \mid \|x\| \leqslant 1\}$).

(iii) Iga *separaabli ja refleksiivse* ruumi Y korral iga kompaktne operaator $T \in \mathcal{K}(Y,X)$ on lähendatav *punktiviisi koondumise* topoloogias operaatoritega hulgast $A \circ \{T\}$, mille normid ei ületa operaatori T normi ehk

$$T \in \overline{B_{A\circ\{T\}}}^{\mathrm{SOT}} \quad \forall T \in B_{\mathcal{K}(Y,X)}.$$

Märgime, et juba kompaktse a.o. juhul tingimused (ii) ja (iii) peavad olema sellisel "välisel" kujul, sest vastav "sisene" kuju $B_{\mathcal{K}(Y,X)} = \overline{B_{\mathcal{K}(Y,X)}}$ kehtib triviaalselt iga Banachi ruumi X korral.

Paneme tähele, et tingimus (iii) võimaldab piirduda ainult separaablite ja refleksiivsete ruumidega Y (ilmselt see on vabatahtlik, sest suund (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) on triviaalne). Grothendiecki kriteeriumi jaoks oli see teada ammu – see järeldub kuulsast Davis–Figiel–Johnson–Pełczyński faktorisatsioonilemmast [1]: iga nõrgalt kompaktne operaator $T \in \mathcal{W}(X,Y)$ faktoriseerub läbi refleksiivse ruumi Z ehk $T = SR$, kus $R \in \mathcal{W}(X,Z)$, $S \in \mathcal{W}(Z,Y)$. Vastava meetrilise versiooni jaoks aga sai see võimalikuks alles pärast DFJP-faktorisatsioonilemma isomeetrilise versiooni (kus $\|T\| = \|S\|\|R\|$) ilmumist Lima, Nygaardi ja Oja artiklis 2000. aastal. See DFJP–LNO faktorisatsioonilemma on üks põhitööriistadest kumerate a.o.-te uurimisel.

Miks selline üldistus nagu kumerad aproksimatsiooniomadused on üldse kasulik? Esiteks, paneme tähele, et punktides 1–4 vaadeldud a.o. versioonid on kõik kumera a.o. erijuhud. Punktides 2) ja 3) on hulk A alamruum. Punktis 1) on tegemist teatud alamruumi ühikkeraga $A = B_{\mathcal{F}(X,X)}$. Punktis 4) võrdub hulk A positiivsete lõplikumõõtmeliste operaatorite koonusega $\mathcal{F}_+(X, X)$.

Teiseks, osutub, et suur osa klassikalisest a.o. teooriast ja analoogilistest tulemustest a.o. nimetatud variantide kohta on tehtav sellises üldises kontekstis.

Miks just kumerad hulgad? Kuigi tõepoolest, mõned vaadeldud tulemused (näiteks tingimus (b) üleval) on saavutatavad ka üldisemas kontekstis, kus hulgalt A pole kumerust nõutud, osutub, et huvitavamate tulemuste jaoks on vaja kasutada Hahn-Banachi teoreemi ja operaatorite ruumi $(\mathcal{L}(X, Y), \tau_c)$ kaasruumi Grothendiecki kirjeldust (siin τ_c tähistab kompaktsetel hulkadel ühtlase koonduvuse topoloogiat). Meenutame, et lokaalselt kumeras ruumis hulga H sulundid esialgses topoloogias ja nõrgas (ehk kaasruumi poolt indutseeritud) topoloogias ühtivad, kui H on kumer.

Loetleme tulemusi, mida saime korrata kumerate a.o. kontekstis.

(a) *Juba toodud Grothendiecki kriteeriumi analoogid.*

(b) *A.o. tõstmine Banachi ruumist tema kaasruumile.* Kuigi on teada, et Banachi ruumi a.o. ega tõkestatud a.o. ei pärine tema kaasruumile (st leidub Banachi ruum X, millel on omadus, aga kaasruumil X^* pole), Johnson (juba aastal 1972) tõestas järgmise tõstmisteoreemi: kui Banachi ruumil X on olemas meetriline a.o. iga ekvivalentse normi korral, siis ka kaasruumil X^* on meetriline a.o.

Kumera a.o. versioon: kui Banachi ruumil X on olemas meetriline A-a.o. (st B_A-a.o. ehk $\{S \in A \mid \|S\| \leqslant 1\}$-a.o.) igas ekvivalentses normis, siis kaasruumil X^* on meetriline A^a-a.o., kus

$$A^a := \{T^* : T \in A\} \subset \mathcal{L}(X^*, X^*).$$

(c) *A.o. pärinemine kaasruumist lähteruumi.* Kui kaasruumil X^* on A^a-a.o., siis lähteruumil X on A-a.o.

Märgime, et klassikaline tulemus ütleb siin natuke rohkemat: kui ruumil X^* on a.o. (ehk $\mathcal{F}(X^*)$-a.o.), siis lähteruumil X on a.o. (ehk $\mathcal{F}(X)$-a.o.). Teiste sõnadega klassikaline tulemus seisneb üldisest kumerate a.o.-te tulemusest ja samaväärsusest $\mathcal{F}(X^*)$-a.o. $\iff$ $\mathcal{F}(X)^a$-a.o. ruumi X^* jaoks. Viimane samaväärsus on samuti Johnsoni poolt ammu märgitud fakt.

Positiivse a.o. ehk $\mathcal{F}_+(X)$-a.o. (kus $\mathcal{F}_+$ tähistab positiivsete lõplikumõõtmeliste operaatorite koonust) korral samuti tõestasime artiklis [7] vastava samaväärsuse $\mathcal{F}_+(X^*)$-a.o. $\iff$ $\mathcal{F}_+(X)^a$-a.o.

(d) *Radon–Nikodými omaduse mõju ehk punktis 1) toodud küsimusele osaline vastus.* Kui kaasruumil X^* on Radon–Nikodými omadus (selle erijuhud on nt: X^* on separaabel või X on refleksiivne) ja a.o., siis kaasruumil X^* on meetriline a.o.

Sellel tulemusel on läbi aegade olnud mitmed ja väga erinevad tõestused. Esimene neist sisuliselt sisaldub juba Grothendiecki 1953. aasta memuaaris.

Kumera a.o. versioon: olgu $A \subset \mathcal{K}(X)$ (ning kumer ja nulli sisaldav) ja olgu kaasruumil X^* Radon–Nikodými omadus; kui ruumil X^* on A^a-a.o., siis tal on ka meetriline A^a-a.o.

(e) *Nõrk tõkestatud a.o. on samaväärne tõkestatud a.o. Asplundi operaatorideaali jaoks.*

Oja ja Å. Lima tõid 2005. aastal sisse nõrga tõkestatud a.o. mõiste, mis istub a.o. ja tõkestatud a.o. vahel. Selle mõiste abil nad esitasid punktis (d) toodud tulemuse tõestuse versiooni. Nimelt, osutub, et kaasruumi X^* a.o. on samaväärne lähteruumi nõrga meetrilise a.o.-ga igas ekvivalentses normis. Samuti osutub, et Radon–Nikodými omaduse olemasolul nõrk meetriline a.o. on samaväärne meetrilise a.o.-ga. Jääb rakendada meetrlise a.o. tõstmisteoreemi, et lähteruumi meetrilisest a.o.-st igas ekvivalentses normis saada kaasruumi meetrilise a.o. Kogu see arutelu kehtib ka kumerate a.o.-te jaoks.

Nõrk tõkestatud a.o. on erijuht üldisemast mõistest – operaatorideaali jaoks tõkestatud a.o.-st (sisse toodud Å. Lima, V. Lima ja Oja poolt aastal 2010). Anname definitsiooni kumerate a.o. kontekstis (originaalis muidugi $A = \mathcal{F}(X)$). Öeldakse, et ruumil X on λ-tõkestatud A-a.o. operaatorideaali $\mathcal{A}$ jaoks, kui iga operaatori $T \in \mathcal{A}(X,Y)$ korral ruumil X on $\{S \in A \mid \|TS\| \leqslant \lambda\|T\|\}$-a.o. Nõrk tõkestatud a.o. := tõkestatud a.o. $\mathcal{K}$ jaoks.

Radon–Nikodými omaduse mõju võib väljendada ka järgmise nõrga tõkestatud a.o. kriteeriumiga. Olgu $A \subset \mathcal{K}(X)$ kumer ja nulli sisaldav. Siis järgmised väited on samaväärsed.

(i) Ruumil X on nõrk tõkestatud A-a.o.

(ii) Ruumil X on tõkestatud A-a.o. $\mathcal{W}$ jaoks.

(iii) Ruumil X on tõkestatud A-a.o. $\mathcal{RN}^{\text{dual}}$ jaoks. (Siin

$$\mathcal{RN}^{\text{dual}} = \{T \mid T^* \in \mathcal{RN}\}$$

on Radon–Nikodými operaatorite ideaali duaalne operaatorideaal ehk Asplundi operaatorite ideaal.)

Mainime, et samaväärsus (i) $\iff$ (iii) vastab artiklis [2] püstitatud küsimusele: kas leidub ideaalist $\mathcal{W}$ suurem operaatorideaal, mille jaoks tõkestatud a.o. ühtib nõrga tõkestatud a.o.-ga? Selle tõestuseks artiklis [5] sisuliselt piisas panna tähele, et DFJP-LNO-faktorisatsioon töötab (peale kompaktsete ja nõrgalt kompaktsete) ka Asplundi operaatorite faktoriseerimiseks.

Autor soovib mainida Eesti Haridus- ja Teadusministeeriumi institutsionaalset uurimistoetust IUT20-57.

Kirjandus

[1] W.J. Davis, T. Figiel, W.B. Johnson, and A. Pełczyński, *Factoring weakly compact operators*, J. Funct. Anal. **17** (1974) 311–327.

[2] Å. Lima, V. Lima, and E. Oja, *Bounded approximation properties via integral and nuclear operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010) 287–297.

[3] Å. Lima, O. Nygaard, and E. Oja, *Isometric factorization of weakly compact operators and the approximation property*, Israel J. Math. **119** (2000) 325–348.

[4] Å. Lima and E. Oja, *The weak metric approximation property*, Math. Ann. **333** (2005) 471–484.

[5] A. Lissitsin, *A unified approach to the strong and the weak bounded approximation properties of Banach spaces*, Studia Math. **211** (2012) 199–214.

[6] A. Lissitsin, K. Mikkor, and E. Oja, *Approximation properties defined by spaces of operators and approximability in operator topologies*, Illinois J. Math. **52** (2008) 563–582.

[7] A. Lissitsin and E. Oja, *The convex approximation property of Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **379** (2011) 616–626.

[8] N.J. Nielsen, *The positive approximation property of Banach lattices*, Israel J. Math. **62** (1988) 99–112.