Banachi ruumide aproksimatsiooniomadustest

INDREK ZOLK[1]
Tartu Ülikool

1. Aproksimatsiooniomadus ja Schauderi baas

Teatavasti saab matemaatika hästi hakkama lineaarsete objektidega, pidevate eeskirjadega, ja kõik, millel taolisi "häid" omadusi pole, on uuritav sedavõrd, kui hästi neid õnnestub lähendada taolise "hea" ja uurimiseks ligipääsetava objekti või eeskirjaga. Seoses praktilise eluga lisandub veel nõue lõplikumõõtmelisusest, kuna konkreetseid arvutusi saab teha ikka ainult lõpliku koguse koordinaatidega.

Järgnev Banachi ruumide teooria definitsioon (vt. definitsiooni 1), mille tõi sisse A. GROTHENDIECK oma monograafias [7], on kantud ka samast vaimust, tegeledes olukorraga, kus *kompaktse* hulga elemente ühtlaselt pidevalt lineaarselt lähendatakse elementidega lõplikumõõtmelisest ruumist. (Meenutame, et hulga kompaktsus tähendab, et hulk on kinnine ja suvalise arvu $\varepsilon > 0$ korral saab hulga katta lõpliku koguse ε-raadiusega keradega. Näiteks ruumis $\mathbb{R}^n$ on kompaktsed hulgad parajasti kinnised tõkestatud hulgad – lõigud, kinnised kerad, nende lõplikud ühendid jms.)

Siin ja edaspidi olgu X Banachi ruum (lihtsuse mõttes: üle reaalarvude korpuse). Sõna *operaator* on sünonüüm kujutusele (kasutame seda eeskätt juhul, kui lähte- ja sihthulk on Banachi ruum). Lineaarse operaatori S korral on kombeks $S(x)$ asemel kirjutada Sx.

[1]Indrek Zolk on 2012. a. Arnold Humala preemia laureaat.

Definitsioon 1. Kui kehtib järgmine tingimus:

$$\begin{gathered}\text{iga kompaktse hulga } K \subseteq X \text{ ja iga reaalarvu } \varepsilon > 0 \text{ korral} \\ \text{leidub pidev lineaarne operaator } S\colon X \longrightarrow X \text{ nii, et} \\ \text{kujutisruum } S[X] \text{ on lõplikumõõtmeline ja} \\ \text{kõigi elementide } x \in K \text{ jaoks } \|Sx - x\| < \varepsilon, \end{gathered} \tag{1}$$

siis öeldakse, et ruumil X on *aproksimatsiooniomadus* (a.o.).

Küsimus, **kas igal Banachi ruumil on aproksimatsiooniomadus** (edaspidi: *aproksimatsiooniprobleem*), püstitati tegelikult juba aastal 1936 nn. *Šoti raamatus*; lahendati alles 1972. Selle loo kirjelduse võib leida näiteks EVE OJA artiklist [11].

A. Grothendiecki monograafias [7] on tõestatud muuhulgas järgmised aproksimatsiooniprobleemi variandid.

Teoreem 1. *Järgmised väited on samaväärsed.*

1. *Igal Banachi ruumil on a.o..*

2. *Iga lõpmatu maatriksi*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

   korral, kus read on nulliks koonduvad jadad ning reavektorite normide summa on lõplik, st.

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \lim_{j \longrightarrow \infty} a_{i,j} = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} \max\{|a_{i,j}| : j \in \mathbb{N}\} < \infty,$$

   kehtib implikatsioon

$$A \cdot A = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,i} = 0.$$

3. *Iga pideva kahe muutuja funktsiooni $K\colon [0,1]\times[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ korral kehtib implikatsioon*

$$\left(\forall r,t\in[0,1]\quad \int_0^1 K(r,s)\cdot K(s,t)\,\mathrm{d}t=0\right)$$
$$\Longrightarrow\quad \int_0^1 K(s,s)\,\mathrm{d}s=0.$$

Šoti raamatusse pandi kirja just tingimus 3. – selline ülesanne on mõistetav igale matemaatilist analüüsi kuulanud tudengile. Paneme ka tähele, et tingimuse 2. lõplikumõõtmeline analoog on tõene. Nimelt, kui $A\in\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, siis on vastavalt algebra põhiteoreemile maatriksil A täpselt n omaväärtust (karakteristlikku juurt), kusjuures nende summa on teatavasti just $a_{1,1}+\ldots+a_{n,n}$. Teisalt, eeldusel $A^2=0$ on maatriksi A kõik omaväärtused võrdsed nulliga. Tõepoolest, A omaväärtuse λ korral $Ax=\lambda x$, kus $x\neq 0$ on vastav omavektor. Nüüd $A^2=0$ annab, et

$$0=A^2x=A(Ax)=A(\lambda x)=\lambda Ax=\lambda^2 x,$$

mistõttu $\lambda^2=0$ ja järelikult $\lambda=0$. Siit järeldubki, et omaväärtuste summa $a_{1,1}+\ldots+a_{n,n}$ võrdub nulliga.

1972. aastal konstrueeris Per Enflo Banachi ruumi, millel puudub a.o. [4]; siit ka järeldub, et teoreemi 1 kõik tingimused on väärad. Enflo tulemus avas tee edasisteks uuringuteks – vaatame, mis välja tuleb, kui tugevdame/nõrgendame/muudame tingimuse (1) nõudeid; millised oleks samaväärsed või piisavad või tarvilikud tingimused selleks, et (1) ise või mõni tema muudetud versioon kehtiks jne. 20. sajandi jooksul saadud tulemused on hästi kokku võetud P. Casazza ülevaateartiklis [2].

Järgnev lause vormistab a.o. definitsioonis esinevad operaatorid perena; lause tõestamiseks sobib valida indekshulgaks $\{(K,\varepsilon)\colon K \text{ on kompaktne}, \varepsilon>0\}$ koos järjestusega

$$(K_1,\varepsilon_1)\preccurlyeq(K_2,\varepsilon_2)\Longleftrightarrow K_1\subseteq K_2\wedge\varepsilon_1\geqslant\varepsilon_2.$$

Lause 1. *Banachi ruumil X on a.o. parajasti siis, kui leidub pidevate lineaarsete operaatorite pere liikmetega $S_\alpha\colon X \longrightarrow X$ nii, et iga kompaktse hulga $K \subseteq X$ ja reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub indeks α_0 omadusega*

$$\alpha \succcurlyeq \alpha_0 \quad \Longrightarrow \quad \sup_{x\in K} \|S_\alpha x - x\| < \varepsilon.$$

Definitsioon 2. Kui leidub $\lambda \geqslant 1$ nii, et tingimuses (1) kehtib lisaks veel $\|T\| \leqslant \lambda$, siis öeldakse, et ruumil X on *λ-tõkestatud a.o.* või *tõkestatud a.o.*. (Siin $\|T\| = \sup\{\|Tx\|\colon \|x\| \leqslant 1\}$.)

Muidugi saab sõnastada ja tõestada lause 1 analoogi ka tõkestatud a.o. jaoks. Täiendavalt on aga võimalik tõestada järgmine tulemus.

Lause 2. *Banachi ruumil X on λ-tõkestatud a.o. parajasti siis, kui leidub pidevate lineaarsete operaatorite pere liikmetega $S_\alpha\colon X \longrightarrow X$ nii, et $\|S_\alpha\| \leqslant \lambda$ ning iga elemendi $x \in X$ ja reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub indeks α_0 omadusega*

$$\alpha \succcurlyeq \alpha_0 \quad \Longrightarrow \quad \|S_\alpha x - x\| < \varepsilon.$$

Lause 2 näitab, et tõkestatud a.o. puhul võib pere (S_α) *ühtlase koonduvuse kompaktsetel hulkadel* asendada *punktiviisilise* koonduvusega.

Kui Banachi ruum X on separaabel, see tähendab, kui seal leidub loenduv kõikjal tihe hulk, siis võib lauses 2 pere asendada jadaga.

Järgnev definitsioon muudab Banachi ruumis arvutamise mugavaks, võimaldades igale elemendile seada vastavusse tema koordinaatide jada.

Definitsioon 3. Jada $(e_n) \subseteq X$ nimetatakse *Schauderi baasiks*, kui iga $x \in X$ korral leidub üheselt määratud skalaaride jada $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{R}$ nii, et

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n.$$

Lause 3. *Olgu X Banachi ruum, mille Schauderi baas on (e_n). Tähistame* osasummaoperaatorid S_n *järgmiselt:*

$$S_n(x) \coloneqq \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n, \qquad x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \in X.$$

Siis jada (S_n) täidab lause 2 tingimust, kusjuures $S_{n+k} \circ S_n = S_n \circ S_{n+k} = S_n$ iga $n \in \mathbb{N}$ ja $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ korral. Muuseas on igal baasiga Banachi ruumil tõkestatud a.o.

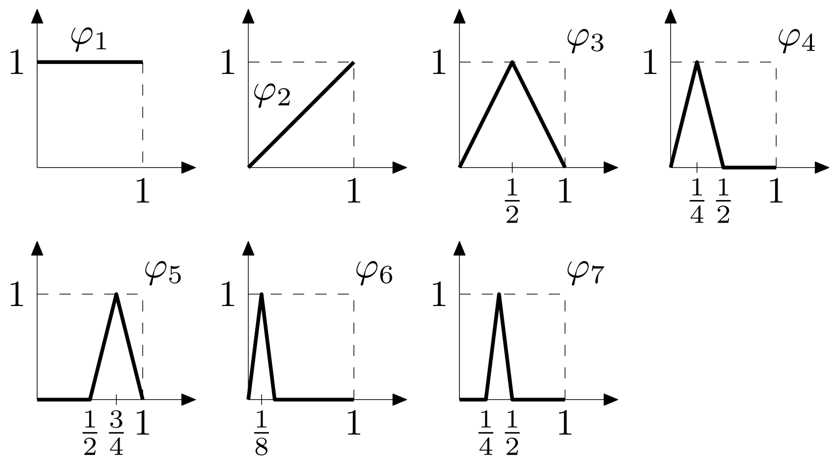
Kõigil klassikalistel Banachi ruumidel, nagu näiteks lõplikumõõtmelised ruumid, jadaruumid c_0, ℓ_p $(p \geqslant 1)$, funktsiooniruumid $C[a,b]$, $L_p(a,b)$ jne, on Schauderi baas, seega ka tõkestatud a.o..

Nii näiteks ülaltoodud jadaruumides on Schauderi baasiks

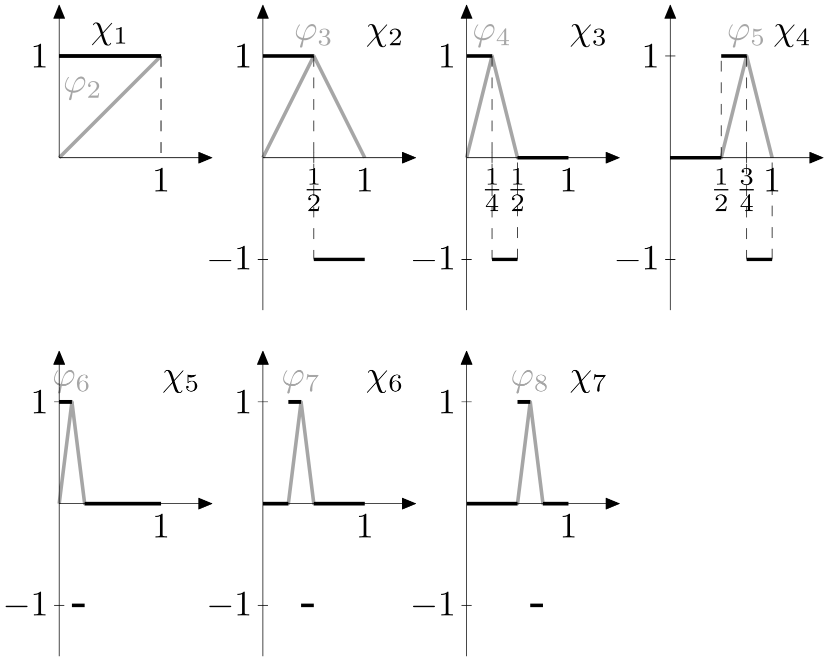
$$e_1 = (1,0,0,\ldots), \quad e_2 = (0,1,0,\ldots), \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad e_n = (\underbrace{0,\ldots,0}_{n \text{ koordinaati}},1,0,0,\ldots), \quad \ldots.$$

Lõigus $[0,1]$ pidevate funktsioonide ruumis $C[0,1]$ on Schauderi baasiks Faber–Schauderi süsteem $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, mille graafikud on toodud joonisel:



Lõigus $[0, 1]$ integreeruva p-astmega funktsioonide ruumis $L_p(0, 1)$ on Schauderi baasiks Haari süsteem $\chi_1, \chi_2, \ldots$, mille liikmed on Faber–Schauderi süsteemi funktsioonide tuletised:



Juba BANACH oma monograafias [1] märkis, et pole teada, kas igal Banachi ruumil on baas. Enflo kontranäitega sai see kasküsimus eitava vastuse.

Märgime samas, et enamik teadaolevaid Banachi ruume, millel puudub (mingit tüüpi) a.o., on spetsiaalselt konstrueeritud ning pole lihtsasti kirja pandavad. Paar erandit sellest “reeglist”: ruumil $\mathcal{L}(\ell_2)$ (pidevad lineaarsed operaatorid ruumil ℓ_2) (SZANKOWSKI, 1981) ja ruumil $\mathcal{L}(\ell_2)/\mathcal{K}(\ell_2)$ (GODEFROY, SAPHAR, 1989) puudub a.o. (Siin $\mathcal{K}(\ell_2)$ tähistab kompaktseid operaatoreid ruumil ℓ_2, see tähendab operaatoreid T, mille korral ruumi ℓ_2 ühikkera $B_{\ell_2} = \{x \in \ell_2 \colon \|x\| \leqslant 1\}$ kujutis $T\,[B_{\ell_2}]$ on suhteliselt kompaktne hulk.)

Rõhutame, et lõpmatumõõtmelistes ruumides Schauderi baas (jada, mille suhtes iga element esitub rea summana) erineb alati algebralisest (Hameli) baasist (süsteem, mille suhtes iga element esitub lõpliku lineaarkombinatsioonina). Algebralise baasi kasutamine normeeritud ruumide kontekstis on üsna kasutu, sest koordinaatfunktsionaalide seast ainult ülimalt lõplik arv on pidevad.

2. Millega veel tegeldakse

Klassikaline (tõkestatud) aproksimatsiooniomaduse definitsioon võimaldab mitmel viisil saada uut laadi teooriaid. Põhjusi selleks on erinevaid – kas lihtsalt püüda saada midagi uut või hoopis konstrueerida abimõisteid, kontranäiteid, vahetulemusi mingi olemasoleva raske probleemi "ründamiseks".

Nimetame siinkohal mõnda a.o. arendusvõimalust.

- Mis jääb tõkestatud a.o. ja *baasiomaduse* (ruumil on Schauderi baas) vahele? Eritletakse järgmisi tõkestatud a.o. versioone:
  - lisatingimus $S_\alpha \circ S_\alpha = S_\alpha$ annab π-*omaduse* (lähendamine projektoritega),
  - lisatingimus $S_n \circ S_{n+k} = S_{n+k} \circ S_n = S_n$ ($n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) annab *lõplikumõõtmelise lahutuse*,
  - lisatingimus $S_\alpha \circ S_\beta = S_\beta \circ S_\alpha$ (separaabli ruumi korral $S_n \circ S_{n+k} = S_{n+k} \circ S_n$, kus $n, k \in \mathbb{N}$) annab *kommuteeruva tõkestatud a.o.*,
  - lisatingimus $\forall \alpha \lim\limits_{\beta} \|S_\alpha \circ S_\beta - S_\beta \circ S_\alpha\| = 0$ annab *asümptootiliselt kommuteeruva tõkestatud a.o.*.

  Toome näiteks mõne tulemuse (vt. ülevaateartiklit [2], vt. ka [14]):

  - kui separaablil ruumil X on tõkestatud a.o., siis leidub $\lambda \geqslant 1$ ja pidevate lineaarsete operaatorite jada liikmetega $S_n\colon X \longrightarrow X$ nii, et

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \quad S_n[X] \text{ on lõplikumõõtmeline,} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \|S_n\| \leqslant \lambda, \\ \forall x \in X \quad \|S_n x - x\| \longrightarrow 0, \\ \forall n, k \in \mathbb{N} \quad S_{n+k} \circ S_n = S_n; \end{cases}$$

– kui separaablil ruumil X on asümptootiliselt kommuteeruv λ-tõkestatud a.o., on tal ka kommuteeruv λ-tõkestatud a.o.;
– kui separaablil ruumil X on 1-tõkestatud a.o., siis on ruumil X ka kommuteeruv 1-tõkestatud a.o. (Casazza, Kalton, 1989).

Tulemused näitavad, et kuigi formaalselt nõutakse normi poolest tõkestatud lõplikumõõtmeliste operaatorite jada (S_n) jaoks ainult, et $S_n x \longrightarrow x$, saab mõnikord "teatud osa" kommuteeruvusest "lisaks kätte".

- Võib täpsemalt nõuda, kui hästi lähendavad operaatorid säilitavad ruumi X alamruumide struktuuri. Artikliga [5] käivitati järgmise omaduse uurimine: öeldakse, et *paaril* (X, U) *on a.o.* (U on ruumi X kinnine alamruum), kui kehtib tingimus (1) ning lisaks $T[U] \subseteq U$. Sama tüüpi omaduse saab sõnastada ka ruumi X kinniste alamruumide ahela $\mathcal{N} = \{U_\alpha \colon \forall \alpha, \beta\, U_\alpha \subseteq U_\beta \vee U_\alpha \supseteq U_\beta\}$ jaoks: *paaril* $(X, \mathcal{N})$ *on a.o.* tähendab, et kehtib (1) ning $T[U] \subseteq U$ iga kinnise alamruumi $U \in \mathcal{N}$ korral. On lahtine probleem, kas kehtib samaväärsus

$$\begin{aligned} &\text{paaril } (X,U) \text{ on a.o.} \quad \forall U \text{ (kinnised alamruumid)} \iff \\ &\iff \text{paaril } (X,\mathcal{N}) \text{ on a.o.} \\ &\qquad \forall \mathcal{N} \text{ (kinniste alamruumide ahelad).} \end{aligned}$$

- A. Grothendiecki monograafias [7] on näidatud, et ruumil X on a.o. parajasti siis, kui iga Banachi ruumi Y korral kehtib tingimus

$$\overline{\mathcal{F}(Y,X)} = \mathcal{K}(Y,X). \tag{2}$$

(Hulk $\mathcal{F}(Y,X)$ koosneb pidevatest lineaarsetest operaatoritest $T\colon Y \longrightarrow X$, mille korral $T[Y]$ on lõplikumõõtmeline.) Pole selge, kui väikese ruumide Y klassiga võib tingimuses (2) piirduda a.o. kirjeldamisel. Artiklis [9] on tõestatud, et ruumi X aproksimatsiooniomaduse jaoks piisab tingimuse $\overline{\mathcal{F}(Y,X)} = \mathcal{K}(Y,X)$ kehtimisest kõigi refleksiivsete separaablite Banachi ruumide Y jaoks, või ruumi c_0 kõigi kinniste alamruumide jaoks. Lahtine probleem: kas kehtib samaväärsus

$$\text{ruumil } X \text{ on a.o.} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{\mathcal{F}(X,X)} = \mathcal{K}(X,X)?$$

- A.o. definitsioonis nõutakse iga kompaktse hulga K jaoks teatud lähendeid. Kui hulga K kompaktsus asendada mõne sarnase omadusega (nõrk kompaktsus [10], p-kompaktsus [3] jms), saadakse uued a.o. variandid.

- Lähendama ei pea sugugi lõplikumõõtmeliste operaatorite abil. Pea sama kaua on uuritud samasusteisenduse lähendamist kompaktsete operaatoritega. Arendatakse ühtset teooriat, kus lähendavad operaatorid on valitud mingist *operaatorideaalist*: lõplikumõõtmelised, kompaktsed, nõrgalt kompaktsed operaatorid, tuumaoperaatorid, integraaloperaatorid jms. Operaatorideaali mõiste ja teooria alused andis Pietsch [15].

  Sõltuvalt ruumile X seatud lisanõuetest võib kitsendada lähendavate operaatorite valikut, nt. kui ruumil X on tehetega kooskõlas olev järjestus, võib lähendamiseks kasutada *positiivseid* operaatoreid, st. operaatoreid T, et iga $x \geqslant 0$ korral $Tx \geqslant 0$ (*positiivne a.o.*). Lahtine probleem: kas iga Banachi võre X korral kehtib implikatsioon

$$\text{ruumil } X \text{ on a.o.} \quad \Longrightarrow \quad \text{ruumil } X \text{ on positiivne a.o.?}$$

- Klassikaline tingimus (λ-tõkestatud a.o. jaoks) on, et peab leiduma lõplikumõõtmeliste operaatorite pere (S_α) omadustega $\sup\limits_{\alpha} \|S_\alpha\| \leqslant \lambda$ ja $\|S_\alpha x - x\| \longrightarrow 0$. Nõudes, et iga Banachi ruumi Y ja operaatori $T\colon X \longrightarrow Y$ korral (kus T on valitud mingist *Banachi operaatorideaalist* $\mathcal{A}$) leiduks talle vastav lõplikumõõtmeliste operaatorite pere (S_α) omadustega, et $\limsup_\alpha \|T \circ S_\alpha\|_{\mathcal{A}} \leqslant \lambda \|T\|_{\mathcal{A}}$ ja $\|S_\alpha x - x\| \longrightarrow 0$, saame *$\lambda$-tõkestatud a.o. $\mathcal{A}$ jaoks*. See mõiste on λ-tõkestatud a.o. nõrgem variant ning võiks aidata lahendada lahtist probleemi: kas iga kaasruumi X^* (ehk pidevate lineaarsete funktsioonide $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ ruumi) jaoks kehtib implikatsioon

$$\text{ruumil } X^* \text{ on a.o.} \quad \Longrightarrow \quad \text{ruumil } X^* \text{ on 1-tõkestatud a.o.?}$$

Probleem on lahendatud (positiivselt) teatud erijuhtudel (nt. kui X^* on separaabel). Selleteemalised ülevaateartiklid on [12], [13].

- Kõigis ülaltoodud a.o. versioonides on siiski nõutud, et lähendavad operaatorid oleks lineaarsed (nn. klassikaline teooria). Seda tingimust saab nõrgendada; küllalt sügavalt uuritud on Lipschitzi kujutustega ja ühtlaselt pidevate kujutustega lähendamist (vt. nt. [8]). Osutub, et mõnevõrra määravad ka mittelineaarsed kujutused lineaarse struktuuri omadusi ning võimaldavad neid üle kanda. Tüüpiliselt kasutatakse töövahendina mõnda keerukamat ruumi (teine kaasruum, Lipschitzi vabaruum, ultraastmed vms.), et Lipschitzi kujutusi lineariseerida. Näiteks näitab vahetu kontroll, et tõkestatud a.o. kandub ühelt ruumilt teisele üle isomorfismi (lineaarne sürjektsioon, mis viib normi ekvivalentseks normiks) kaudu; Lipschitzi vabaruume kasutades saab aga tõestada [6], et tõkestatud a.o. kandub üle ka Lipschitz-isomorfismi ((üldiselt mittelineaarne) bijektsioon, mis ise ja mille pöördkujutus on Lipschitzi kujutused) kaudu.

Autor soovib mainida Eesti Haridus- ja Teadusministeeriumi institutsionaalset uurimistoetust IUT20-57.

Kirjandus

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne 1, Z Subwencjyi Funduszu Kultury Narodowej, Warsaw, 1932.

[2] P. G. Casazza, *Approximation properties*, Handbook of the Geometry of Banach spaces, Vol. 1, Elsevier, Amsterdam, 2001, lk. 271–316.

[3] J. M. Delgado, E. Oja, C. Piñeiro, E. Serrano, *The p-approximation property in terms of density of finite rank operators*, J. Math. Anal. Appl. **354** (2009), 159–164.

[4] P. Enflo, *A counterexample to the approximation property in Banach spaces*, Acta Math. **130** (1973), 309–317.

[5] T. Figiel, W. B. Johnson, A. Pełczyński, *Some approximation properties of Banach spaces and Banach lattices*, Israel J. Math. **183** (2011) 199–231.

[6] G. Godefroy, N. J. Kalton, *Lipschitz-free Banach spaces*, Studia Math. **159** (2003), 121–141.

[7] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires*, Mem. Amer. Math. Soc. **16** (1955).

[8] N. J. Kalton, *The nonlinear geometry of Banach spaces*, Rev. Mat. Complut. **21** (2008), 7–60.

[9] Å. Lima, O. Nygaard, E. Oja, *Isometric factorization of weakly compact operators and the approximation property*, Israel J. Math. **119** (2000), 325–348.

[10] E. Odell, H.–O. Tylli, *Weakly compact approximation in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), 1125–1159.

[11] E. OJA, *Banachi ruumide aproksimatsiooniomadused ja kaasruumide geomeetria*, EMS aastaraamat 2001, Tartu, Eesti Matemaatika Selts, 2003.

[12] E. OJA, On bounded approximation properties of Banach spaces, in: Banach Algebras 2009, vol. 91, Banach Center Publications, Polish Acad. Sci. Inst. Math, Warsaw, 2010, pp. 219–231.

[13] E. OJA, Bounded approximation properties via Banach operator ideals, in: Advanced Courses of Mathematical Analysis IV, World Sci. Publ, Hackensack, NJ, 2012, pp. 196–215.

[14] E. OJA, I. ZOLK, *The asymptotically commuting approximation property of Banach spaces*, Jour. Funct. Anal., **266** (2014), 1068–1087.

[15] A. PIETSCH, *Operator Ideals*, Volume 16 of Mathematische Monographien, Deutscher Verlag d. Wiss., VEB, 1978.