# Operaatorideaalid ja tensorkorrutised Banachi ruumide struktuuri-uuringutes

Eve Oja[1]
Tartu Ülikool

## 1. Eesti Vabariigi teaduspreemia 2014 täppisteaduste alal

Meie matemaatikuteperet rõõmustas 2014. aasta Riigi teaduspreemiate juures eriti see, et laureaatide seas oli koguni kolm matemaatikut – kolm Tartu Ülikooli Matemaatikateaduskonna vilistlast. Krista Lõhmus (minu kursusekaaslane) pälvis teaduspreemia põllumajandusteaduste alal, Ellu Saar sotsiaalteaduste alal ning täppisteaduste preemia tuli matemaatikasse. Selle sain ma uurimuste tsükli "Operaatorideaalid ja tensorkorrutised Banachi ruumide struktuuri-uuringutes" eest.

Auhinnatud töödetsükkel koosneb aastatel 2010–2013 ilmunud artiklitest [1]–[6], [8], [14]–[20]. Artiklid [14] ja [15] on ülevaateartiklid, mis telliti vastavalt plenaarettekannete põhjal esinduslikul rahvusvahelisel konverentsil "Banachi algebrad 2009" Poolas ja "Rahvusvahelisel matemaatilise analüüsi kongressil 2009" Hispaanias.

Uurimuste tsükkel "Operaatorideaalid ja tensorkorrutised Banachi ruumide struktuuri-uuringutes" tegeleb matemaatika alusuuringutega: luuakse funktsionaalanalüüsi ja operaatorite teooria piirimail asuvaid uusi meetodeid ning rakendatakse neid Banachi ruumide struktuuri uurimisel.

[1] Eve Oja sai 2014. a. Eesti Vabariigi teaduspreemia täppisteaduste alal.

 

## 2. Banachi ruumid

Banachi ruumide teooria, aga ka kaasaegse funktsionaalanalüüsi sünniaastaks peetakse aastat 1932, mil ilmus STEFAN BANACHI monograafia *Théorie des opérations linéaires* (*Lineaarsete operatsioonide teooria*).

Banachi ruumi mõistet on lihtne tajuda. Meil kõigil on olemas intuitiivne ettekujutus *hulgast* kui mingist objektide ehk elementide kogumist (näiteks: kõigi reaalarvude hulk $\mathbb{R}$, kõigi punktide hulk tasandil). *Banachi ruumiks* nimetatakse niisugust hulka, mille elemente saab liita ja arvudega korrutada (s.t. tegemist on *vektorruumiga*). Veel peab iga elemendi $x$ jaoks olema defineeritud *norm* $\|x\|$ – elemendi $x$ "pikkus" (norm ongi oma olemuselt arvu absoluutväärtuse ja ka vektori pikkuse üldistus). Lisaks kehtib nn. *täielikkuse* aksioom, mis kirjeldab selles ruumis koonduvaid jadasid (jada $(x_n)$ koondub, kui $\lim \|x_n - x_m\| = 0$).

**Näide 1**. Arvsirge $\mathbb{R}$ on Banachi ruum, kus arvu $x$ norm defineeritakse tema absoluutväärtusena: $\|x\| = |x|$.

**Näide 2**. Eukleidiline tasand $\mathbb{R}^2$ on Banachi ruum, kus vektori $x = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ norm defineeritakse tema pikkusena:

$$\|x\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,.$$

**Näide 3**. Lõigus $[a, b]$ pidevad funktsioonid moodustavad Banachi ruumi $C[a, b]$, kus funktsiooni $x = x(t)$ norm defineeritakse maksimumi abil:

$$\|x\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|\,.$$

Ruum $C[a, b]$ on Banachi ruumide teooria rakendustes üks sagedamini kasutatavaid ruume. Aga ei $C[a, b]$, rääkimata tasandist $\mathbb{R}^2$ või arvsirgest $\mathbb{R}$, peegelda vähemalgi määral seda teoreetilist ja rakenduslikku rikkust, mida pakuvad Banachi ruumid oma üldisuses ja abstraktsuses.

## 3. Kired baasiprobleemi ümber

Banachi ruumide teooria ja selle arvukate rakenduste jaoks (arvutusmatemaatikas, harmoonilises analüüsis, osatuletistega diferentsiaalvõrrandite teoorias, tõenäosusteoorias jm.) on kasulikud eelkõige niisugused ruumid, millel on teatav "rikas" struktuur, mis võimaldab Banachi ruumi üldiste elementide lähendamist lõplikumõõtmeliste, kompaktsete või muude "lihtsamate" objektide kaudu. Eriti hea on, kui ruumis on olemas baas.

Öeldakse, et Banachi ruumis $X$ on olemas *baas*, kui selles ruumis leiduvad niisugused elemendid $e_1, e_2, \ldots$ (baasielemendid), et ruumi $X$ iga element $x$ esitub üheselt lõpmatu summana

$$x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n + \ldots,$$

kus $a_1, a_2, \ldots$ on arvud. Baasiga Banachi ruumi igat elementi $x$ saab seega lähendada "lihtsa" lõpliku summaga $a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n$, kus on "mängus" ainult (arvudega korrutatud) baasielemendid.

Baasiga Banachi ruumile on lähedane *separaabli* ruumi mõiste. Seal saab elemente lähendada elementidega mingist loenduvast hulgast. Baasiga Banachi ruumid on separaablid. Kas aga igas separaablis Banachi ruumis on olemas baas? See nn. *baasiprobleem* oli sõnastatud juba Banachi monograafias 1932. aastal ning baasiprobleemi on peetud üheks kõige olulisemaks ja haaravamaks probleemiks Banachi ruumide teoorias. Baasiprobleem on tihedalt seotud aproksimatsiooniprobleemiga (vt. osa "Aproksimatsiooniprobleem ja valge hani" artiklist [10] või [11]). Tuhanded matemaatikud tegelesid baasi otsimisega separaablis Banachi ruumis, sest valdavalt usuti baasiprobleemi positiivsesse lahendusse.

Pisut sain minagi näha baasiprobleemi ümber möllavat kirge matemaatikute kogukonnas. Nimelt oli mul tudengina see õnn, et Gennadi Vainikko võttis ka mind (kuigi minu juhendaja oli Gunnar Kangro) kaasa Voroneži talvekooli, kuhu kogunesid matemaatikaprominendid kogu N. Liidust. Kõige elavamat vastukaja tekitas seal üks baasiprobleemile võimalikku positiivset lahendust ennustav ettekanne (F. Vaher). Pärast seda algas kirglik, pikk ja üsna tavatu arutelu. Auväärsed hallipäised akadeemikud ja professorid muutusid justkui poisikesteks, kes üksteist katkestades vaidlesid, et kas võib olla baasi või mitte. Nii et asi läks peaaegu hääletamiseks. Tudengile pakkus see igatahes üpris naljakat vaatepilti. See oli jaanuaris 1972.

Seda dramaatilisem oli *negatiivne* lahendus, mis saabuski juba 1972. aastal: noor rootsi matemaatik PER ENFLO konstrueeris separaabli Banachi ruumi (pealegi veel nii hea omadusega nagu refleksiivsus), milles ei olnud baasi (sel ruumil polnud isegi mitte aproksimatsiooniomadust). Äsja 28-aastaseks saanud Enflo kandis oma konstruktsiooni ette esinduslikul konverentsil Jeruusalemmas 1972. aasta juunis. Kuulus rumeenia matemaatik IVAN SINGER kirjeldas seda mulle (9 aastat hiljem) järgmiselt. Auditoorium oli alguses rõõmsalt-skeptiliselt meelestatud: loodeti, et Enflo tõestuses on ehk lünk sees. Aga tõestuskäigu arenedes muutus saal järjest tõsisemaks ning ettekande lõppedes valitses pikka aega sünge hauavaikus: liigagi paljud auditooriumi hulgast olid ju aastakümnete jooksul andnud kogu oma energia püüdmaks baasiprobleemi *positiivselt* lahendada.

## 4. Aproksimatsiooniomadus

Niisiis, baasi ei tarvitse olla isegi separaablites refleksiivsetes Banachi ruumides ning baasi pole ammugi olemas mitteseparaablites ruumides. Nendel ruumidel võib aga olla mingit sorti *aproksimatsiooniomadus*. See on teooria ja rakenduste jaoks kasulik Banachi ruumide struktuuriomadus, mis võimaldab ruumi üldiseid elemente lähendada elementidega teatud lõplikumõõtmelistest alamruumidest. Aproksimatsiooniomadustega ruumide kirjeldamine on olnud üheks kõige populaarsemaks klassikaliseks probleemiks funktsionaalanalüüsis, huvitõusudega 1970ndatel ja 1990ndatel aastatel (vt. osa "Aproksimatsiooniomaduse olemus" artiklist [10] või [11]). Märgatav huvitõus on täheldatav alates aastast 2005, mil ajakirjas *Mathematische Annalen* ilmus artikkel [7], kus evitasime *nõrga tõkestatud aproksimatsiooniomaduse* ning analüüsisime klassikalise aproksimatsiooniomadusega seotud probleeme täiesti uute vaatenurkade alt. Uuringutesse on olnud haaratud matemaatikud rohkem kui tosinast riigist üle maailma, nende seas näiteks niisugused tippmatemaatikud nagu Aron, Botelho, Figiel, Godefroy, Johnson, Å. Lima, Maestre, Pełczyński, Piñeiro, Plichko, Reinov, Yost jt. Auhinnatud töödetsükkel kuulub samasse "lainesse": Banachi ruumide struktuuri iseloomustatakse uute, viimasel kümnel aastal ilmunud aproksimatsiooniomaduste terminites. Töödetsüklis on selleks loodud uued tõestusmeetodid, mis paiknevad funktsionaalanalüüsi ja operaatorite teooria interaktsioonialal. Olulisemateks võtmesõnadeks on seejuures *tensorkorrutised* ja *operaatorideaalid*.

## 5. Tensorkorrutised ja operaatorideaalid

Käesoleva ridade autor sukeldus Banachi ruumide teooriasse 1980. aasta sügistalvel. Eelnevalt olin tegelenud summeeruvusteooriaga ning lokaalselt kumerate ruumidega (need on Banachi ruumidest tunduvalt üldisemad objektid, mistõttu nende struktuur pole nii rikkalik kui Banachi ruumidel), õppinud Leningradi Riiklikus Ülikoolis prantsuse keelt, õpetanud selles keeles tulevasi insenere Mali Vabariigi pealinnas Bamakos (vt. [9]) ning teinud paljut muudki. Nii et vahele oli jäänud tervelt viis aastat, mil ma üleüldse matemaatilist uurimistööd ei teinud.

1980–81 õppeaasta oli mul õnn veeta N. Liidu stažöörina ja ühtlasi Prantsuse Vabariigi stipendiaadina Marseille's. Marseille'sse sattusin ma seoses N. Liidu poolt vallapäästetud Afganistani sõjaga. Ise soovisin küll Pariisi ning N. Liidu poolne taotlus oligi Pariisi jaoks, kuid maailmakuulus matemaatik Laurent Schwartz (Fieldsi preemia 1950), kes Afganistani sõja asjus aktiivselt N. Liidu vastu välja astus, olevat soovinud vaenuliku N. Liidu esindajat iseendast ja seega ka Pariisist võimalikult kaugele saata. Sellest Marseille'sse pagendamise loost rääkis mulle professor Billard, kelle juurde Marseille'sse Schwartz mind suunaski.

 

Professor Billard'i seminaris uuriti parajasti RETHERFORDI ja STEGALLI fundamentaalset tööd (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 1972), mis tugines Banachi ruumide tensorkorrutiste teooriale. Niisiis pidin ma iseseisvalt ja kiiresti endale selle teooria selgeks tegema. Tensorkorrutiste teooria oli loonud ALEXANDER GROTHENDIECK (Fieldsi preemia 1966) 1950ndatel aastatel ja seda peetakse väga keeruliseks teooriaks. Õppisin põhiliselt Grothendiecki 1955. aastal ilmunud põhjapaneva, aga lakoonilises stiilis monograafia *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, nn. *Grothendiecki memuaari*, järgi. Juhtus nii, et mõtlesin enda tarbeks välja lihtsama alternatiivse käsitluse, mis võimaldas mul juba paari kuu pärast kirjutada oma esimene teadusartikkel tensorkorrutiste kohta. Igatahes peeti mind mõne aasta pärast tensorkorrutiste spetsialistiks ning kutsuti 1989. aastal sellekohast loengukursust lugema Pariisi VI ja VII Ülikooli doktorantidele, teaduritele ja õppejõududele.

Kui kahe Banachi ruumi *tensorkorrutis* on üks uus (rikkalike omadustega) Banachi ruum, mis nende kahe põhjal moodustatakse, siis operaatorideaali jaoks peaks kõigepealt rääkima operaatorist. Operaator on koolimatemaatikast tuntud funktsiooni üldistus: *operaator* on niisugune funktsioon, mille määramispiirkonnaks on mingi Banachi ruum ja ka muutumispiirkonnaks on mingi Banachi ruum. Lisaks eeldatakse operaatorilt lineaarsust ja pidevust. Kui operaatori väärtuste hulk on lõplikumõõtmeline vektorruum, siis räägitakse *lõplikumõõtmelisest operaatorist.*

*Operaatorideaal* on mugav abstraktsioon, mis võimaldab käsitleda teatud liiki operaatoreid kui ühte tervikut, täpsustamata seejuures operaatorite määramis- või muutumispiirkonnaks olevaid Banachi ruume. Näiteks kõigi operaatorite ideaal on kõige suurem operaatorideaal. Lõplikumõõtmeliste operaatorite ideaal on aga kõige väiksem: ta sisaldub igas operaatorideaalis. Operaatorideaalide teooria lõi saksa matemaatik ALBRECHT PIETSCH 1970ndatel aastatel. Praegu on Pietsch 82-aastane klassik. Kui matemaatikategemist kiputakse pidama noorte pärusmaaks (Fieldsi preemiat antaksegi ainult noortele matemaatikutele), siis Pietsch on küpse matemaatikuna jäänud samas "nooreks matemaatikuks", demonstreerides aina uusi nutikaid ideesid ja tõestades tugevaid teoreeme.

Operaatorideaalide teooria ja tensorkorrutiste teooria "kohtuvad" lõplikumõõtmelistel operaatoritel. See on üldteada lihtne fakt, millele siiamaani pole erilist tähelepanu pööratud. Auhinnatud töödetsükli artiklis [16] pannakse tähele, et ülalmainitud "kohtumispaigas" tekivad teatud võrratused, mille abil saab väljendada Banachi ruumi omadusi nii ruumi enese terminites (*sisevõrratused*) kui ka sellest ruumist erinevate ruumide klasside kaudu (*välisvõrratused*). Matemaatikas on aga üheks laialt levinud *üldiseks probleemiks* küsimus, kuidas ruumi "välisterminites" kirjeldatud omadusi mõista ruumi enese terminites? Ning, vastupidi, kuidas ruumi sisestruktuur mõjutab "koostegevust" teiste ruumidega?

Sedasorti üldist huvi pakkuvate küsimuste lahendamiseks sobib hästi artiklis [16] loodud tensorkorrutisi ja operaatorideaale siduv sise- ja välisvõrratuste teooria. Teooria rakendusena on näiteks antud uus lihtne tõestus Grothendiecki teoreemile projektiivse ja injektiivse tensorkorrutise kokkulangemise kohta ning on välja töötatud ühtne meetod Grothendiecki klassikaliste, Lima–Oja nõrga tõkestatud ja SAPHARI $p$-aproksimatsiooniomaduste (kus $p \geqslant 1$ on arvuline parameeter) uurimiseks. Muuhulgas on tuletatud nõrga tõkestatud aproksimatsiooniomaduse olemuslik kriteerium ruumi enese terminites (varasemates töödes olid alati "appi võetud" ka teised, "välised" Banachi ruumid) ning tõestatud BOURGAINI (Fieldsi preemia 1994) ja Reinovi tulemuse parendus Saphari $p$-aproksimatsiooniomaduste separaabli ja refleksiivse määratuse kohta. Töö [16] ilmus ülimalt selektiivses ajakirjas *Trans. Amer. Math. Soc.*, mis on matemaatikute kogukonnas sama prestiižne nagu *Nature* loodusteadlastel.

## 6. Kompaktsuse vormid ja nendega seotud operaatorideaalid

Banachi ruumide teoorias ning rakendustes mängib tähtsat rolli hulkade kompaktsus. Põhjus on selles, et kompaktsed hulgad on küllastunud koonduvate jadadega: iga jada sisaldab endas koonduva osajada. Koonduvate jadade abil saab aga lähendada ruumi üldiseid elemente, mis omakorda – tänu rakendusmatemaatika vahendusele – avab tee arvutite kasutamisele. Kompaktsuse tugevam vorm on $p$-kompaktsus (kus $p \geqslant 1$ on arvuline parameeter). Sedasorti tugevat kompaktsust ja vastavate $p$-kompaktsete operaatorite poolt moodustuvaid operaatorideaale on viimasel kaheksal aastal aktiivselt uurinud paljud matemaatikud üle ilma. Mitmed taoliste operaatorideaalide kohta püstitatud struktuuriprobleemid leiavad lahenduse töödetsükli artiklites [1], [2], [17], [18].

Näiteks oli artikli [18] ajendiks hispaania matemaatikute DELGADO ja Piñeiro (*Proc. Amer. Math. Soc.*, 2011) poolt püstitatud väljakutsuvalt elementaarse sõnastusega probleem: kas Banachi ruumis nulliks koonduv $p$-kompaktne jada on alati $p$-null jada? Matemaatika ajalugu on korduvalt näidanud, et lihtsalt sõnastatavad probleemid võivad olla raskesti lahendatavad. Lahendamisel tekivad aga reeglina uued meetodid, mis võivad kasutada üsnagi keerulist matemaatilist aparatuuri. Nii juhtus ka Delgado–Piñeiro probleemiga: probleemi lahendusvõti oli peidus operaatorideaalide ja tensorkorrutiste teooriate piirimail [18]. Artikli [18] üheks põhitulemuseks on Grothendiecki kuulsa tuumaoperaatorite teoreemi parendusüldistus, mis annab kvalitatiivse panuse isegi tuumaoperaatorite teooria klassikasse. Selle rakendusena arendatud teooria sisaldab uusi tulemusi mitmesuguste operaatorideaalide vallas ($p$-tuumaoperaatorid, $(r, p, q)$-tuumaoperaatorid, $p$-kompaktsed operaatorid) ning võimaldas pärast $p$-null jadade kirjeldamist Chevet–Saphari tensorkorrutiste kaudu (veel üks oluline tulemus) lahendada positiivselt Delgado–Piñeiro probleem. Töö [18] ilmus ajakirjas *J. Funct. Anal.*, mis on funktsionaalanalüüsi valdkonna absoluutne tippajakiri.

Artiklis [17] on tõestatud, et india matemaatikute SINHA ja KARNI (*Studia Math.*, 2002) poolt sisse toodud $(p, p)$-aproksimatsiooniomadus ühtib alati klassikalise aproksimatsiooniomadusega, ning ta ei ole mitte viimase üldistus nagu siiamaani arvati. Rakendusena on iseloomustatud Lebesgue'i ruumide kinniste alamruumide ja faktorruumide aproksimatsiooniomadust $p$-kompaktsete operaatorite ideaali kaudu. Samuti on lahendatud üks Delgado, Piñeiro ja Serrano (*J. Math. Anal. Appl.*, 2010) püstitatud probleem ning näidatud, et $p$-kompaktsete ja klassikaliste Pietsch–Fourie–Swarti $p$-kompaktsete operaatorite ideaalid on omavahel täiesti erinevad operaatorite klassid.

Artiklis [1] on evitatud $(p, r)$-kompaktse operaatori mõiste, mis erijuhtudena haarab endasse nii Bourgain–Reinovi kui ka Sinha–Karni $p$-kompaktsete operaatorite versioonid. On tõestatud, et $(p, r)$-kompaktsed operaatorid moodustavad teatavate tuumaoperaatorite ideaali sürjektiivse katte. Sellest tulemusest lähtudes arendatakse $(p, r)$-kompaktsete operaatorite ideaali kui teatava kvaasi-Banachi operaatorideaali süstemaatilist teooriat. Selle uue teooria erijuhuna tekib alternatiivne tunduvalt lihtsam teooria ka $p$-kompaktsete operaatorite käsitlemiseks. Artikkel [2] on ulatuslik süstemaatiline uurimus kompaktsete operaatorite ideaalistruktuuri kohta, mille põhitulemusena on olemuslikult avatud $M(r, s)$-ideaalistruktuuri tekkemehhanism.

## 7. Meetrilise aproksimatsiooni probleem ikka veel lahtine

Klassikaline *aproksimatsiooniomadus* tähendab seda, et Banachi ruumi elemente saab lähendada, kasutades lõplikumõõtmelisi operaatoreid. Kui neid lõplikumõõtmelisi operaatoreid on võimalik valida nii, et operaatorite normid on väiksemad mingist kindlast arvust, näiteks väiksemad kui 1 000 000, siis öeldakse, et ruumil on *tõkestatud aproksimatsiooniomadus*. Väikseim selline tõke saab olla arv 1. Sel juhul öeldakse, et ruumil on *meetriline aproksimatsiooniomadus*. See oleks siis kõige parem aproksimatsiooniomadus!

*Grothendiecki memuaari* nähtamatuks telgjooneks, millest kord kaugenetakse ja millele kord lähenetakse, tundub olevat küsimus, millises olukorras aproksimatsiooniomadus saab olla meetriline? Sealt pärineb ka *meetrilise aproksimatsiooni probleem*: kas Banachi ruumi kaasruumi aproksimatsiooniomadus on alati meetriline?

 

(Märgime, et Banachi ruumi $X$ *kaasruum* on ruumist $X$ lähtuvate kõigi arvuliste väärtustega operaatorite ruum; kaasruum on ka ise Banachi ruum.)

Meetrilise aproksimatsiooni probleem on Banachi ruumide teooria klassikaline probleem, mida 60 aasta jooksul on "rünnanud" paljud silmapaistvad matemaatikud (õigem oleks vast öelda, et seda probleemi on (mõnevõrra) uurinud enamus Banachi ruumide huvilisi). Hoolimata kõigist jõupingutustest, on probleem ikka veel lahtine. Kõige kaugeleulatuvam lahendus positiivses suunas on: "jah", kui kaasruumil või kaasruumi kaasruumil on Radon–Nikodými omadus. Kuid seegi teoreem on vana, pärinedes 1970ndate aastate lõpust. Sedalaadi teoreemide tõestusi iseloomustab kuulus ameerika matemaatik CASAZZA kui "müstilisi": iga samm tõestuses on küll arusaadav, aga müstiliseks jääb üldpõhjus, miks need sammud kokku ikkagi tõestuse annavad!?! Selle vana teoreemi (või erijuhtude) üksteisest erinevaid tõestusi on leitud palju (autoriteks näiteks CHO, DIESTEL, Godefroy, Grothendieck, Johnson, Å. Lima, LINDENSTRAUSS, NYGAARD, Oja, Reinov, Saphar, TZAFRIRI, UHL). Kuigi on ilmunud ka asja olemust selgelt avavaid tõestusi ([7], [12], [16]), pole siin veel mitte keegi suutnud ületada 1970ndatest aastatest pärinevat Radon–Nikodými omaduse "piiri".

Meetrilise aproksimatsiooni probleemile lahendusteede otsimisel peetakse läbimurdeks artikleid [7] (kus tõestasime, et kaasruumi aproksimatsiooniomadus on alati nõrgalt(!) meetriline) ning [12] (mis näitab kätte probleemi lahendustee, kui ainult keegi oskaks sobivalt kirjeldada kompaktsete operaatorite kaasruumi!). Minu hea kolleeg Åsvald Lima (Norra) emeriteerus 62-aastasena selleks, et viimaks ometi olla vaba bürokraatlikust tegevusest ning püüda probleemi põhjalikult uurida. See oli ligi 13 aastat tagasi. Meiega on töötanud koos ka Åsvaldi poeg Vegard ning auhinnatud artiklitest neli ongi selle "sünergia" tulem.

Artiklis [3] on evitatud uudne Banachi operaatorideaalist sõltuva tõkestatud aproksimatsiooniomaduse mõiste. Originaalse tensorkorrutiste ja lõplikumõõtmeliste operaatorite faktorisatsiooni meetodiga on tõestatud, et integraalsete operaatorite ideaal määrab tõkestatud aproksimatsiooniomaduse, kuid tuumaoperaatorite ideaal määrab nõrga tõkestatud aproksimatsiooniomaduse. Rakendusena selgub, et esimesel juhul sobib testruumiks absoluutselt summeeruvate jadade ruum $\ell_1$, teisel juhul aga nulljadade ruum $c_0$. Siit püstitub loomulik küsimus, kas testruumiks võiks sobida ka mingi üks klassikaline ruum? Artiklites [5] ja [6] ongi tõestatud, et mõlemil juhul sobivad testruumiks nii ruum $C[0,1]$ (vt. Näide 3) kui ka lõigus $[0,1]$ integreeruvate funktsioonide ruum $L_1[0,1]$, samuti suvaline Lindenstraussi ruum, mille kaasruumil puudub Radon–Nikodými omadus. Tõestusmeetod on küllaltki komplitseeritud ning kasutab artikli [16] tulemusi.

Artikli [3] edasiarendusena (tuues sisse uudse momendina lineaarsplainid) avastati artiklis [4], et Banachi ruumidel võib esineda täiesti uut tüüpi struktuur, mis meenutab kahe tüvega puud. Artiklis [4] evitataksegi kahe tüvega puu mõiste ja põhitulemusena kirjeldakse absoluutselt summeerivate operaatorite ruumi kahe tüvega puude terminites. Põhitulemusel on olulisi rakendusi isegi Banachi ruumide klassikasse: näiteks lõigus pidevate (ka vektorväärtustega) funktsioonide ruumi uued struktuuriomadused ja Radon–Nikodými omaduse uus kriteerium. Artikli [4] edasiarendusena on artiklis [6] saadud olulisi tulemusi Lindenstraussi ruumidelt lähtuvate operaatorite ruumide struktuuri kohta, kusjuures on evitatud separaabli Lindenstraussi ruumiga seotud puu mõiste.

## 8. Uued aproksimatsiooniomadused

Matemaatikaklassikud Figiel, Johnson ja Pełczyński (*Israel J. Math.*, 2011) tõid sisse uue olulise Banachi ruumide struktuuriomaduse – *paaride tõkestatud aproksimatsiooniomaduse*. Paari moodustavad siin Banachi ruum $X$ ja tema alamruum $Y$ ning tegemist on niisuguse tõkestatud aproksimatsiooniomadusega, mille puhul lähendavad lõplikumõõtmelised operaatorid peavad viima alamruumi $Y$ elemendid tagasi ruumi $Y$.

Selle uue omaduse uuringutesse annavad panuse artiklid [8] ja [20]. Artiklis [20] sisaldub vähemalt kaks olulist teoreemi, sealhulgas paaride tõkestatud aproksimatsiooniomaduse duaalsusteoreem. Tõestamiseks on loodud üldine meetod, mis tugineb nii integraalsete operaatorite ideaali ärakasutamisele (teoreemide sõnastuses ei viita miski integraalsetele operaatoritele) kui ka operaatorideaalide poolt määratud tõkestatud aproksimatsiooniomaduse kriteeriumile artiklist [13]. Artiklis [8] on evitatud operaatorite kumera hulga poolt defineeritud aproksimatsiooniomaduse mõiste – *kumer aproksimatsiooniomadus* – ning loodud vastav ühtne tõestusmetoodika. See sobib näiteks Banachi võrede positiivsete aproksimatsiooniomaduste käsitlemisel asendama Nielseni (*Israel J. Math.*, 1988) vägagi tehnilist võrespetsiifilist aparatuuri. See hõlmab aga ka Banachi ruumide paaride aproksimatsiooniomadust.

Üheks kõige vahetumaks baasi üldistuseks on *kommuteeruv tõkestatud aproksimatsiooniomadus*, mille korral lähendavad lõplikumõõtmelised operaatorid on omavahel paarikaupa kommuteeruvad. Seda omadust on põhjalikult uuritud üle 20 aasta. 2001. aastal ilmus Casazza, Kaltoni ja Wojtaszczyki teoreem, millest selgus, et kommuteeruv tõkestatud aproksimatsiooniomadus on üsna haruldane omadus, mida pole isegi tõkestatud jadade ruumil $\ell_\infty$. Töös [19] on evitatud *asümptootiline kommuteeruv tõkestatud aproksimatsiooniomadus*, mis on laialt levinud (nt. on olemas kõigil Banachi ruumide kaasruumidel, sh. ruumil $\ell_\infty$). Artikkel [19] sisaldab vähemalt neli olulist teoreemi, kust selgub, et kui ruumil on asümptootiline kommuteeruv tõkestatud aproksimatsiooniomadus, siis see ruum on küllastunud alamruumidega, millel on "väga heal" kujul kommuteeruv tõkestatud aproksimatsiooniomadus; need alamruumid on lokaalselt täiendatavad ja erijuhtudel koguni täiendatavad. Tõestusmeetod on suhteliselt komplitseeritud ning kasutab mitmekesist operaatorite teooria ja funktsionaalanalüüsi aparatuuri.

Lõpetuseks soovib autor mainida Eesti Haridus- ja Teadusministeeriumi institutsionaalset uurimistoetust IUT20-57.

## Kirjandus

[1] K. Ain, R. Lillemets, E. Oja. Compact operators which are defined by $\ell_p$-spaces. Quaest. Math. 35 (2012), 145–159.

[2] R. Haller, M. Johanson, E. Oja. $M(r,s)$-ideals of compact operators. Czechoslovak Math. J. 62 (2012), 673–693.

[3] Å. Lima, V. Lima, E. Oja. Bounded approximation properties via integral and nuclear operators. Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010), 287–297.

[4] Å. Lima, V. Lima, E. Oja. Absolutely summing operators on $C[0,1]$ as a tree space and the bounded approximation property. J. Funct. Anal. 259 (2010), 2886–2901.

[5] Å. Lima, V. Lima, E. Oja. Bounded approximation properties in terms of $C[0,1]$. Math. Scandinavica 110 (2012), 45–58.

[6] Å. Lima, V. Lima, E. Oja. Absolutely summing operators on separable Lindenstrauss spaces as tree spaces and the bounded approximation property. Banach J. Math. Anal. 8 (2014), 190–210.

[7] Å. Lima, E. Oja. The weak metric approximation property. Math. Annalen 333 (2005), 471–484.

[8] A. Lissitsin, E. Oja. The convex approximation property of Banach spaces. J. Math. Anal. Appl. 379 (2011), 616–626.

[9] E. Oja. Bamako-päevade pudemeid. Noorus 11 (1979), 22–25; Noorus 12 (1979), 26–28.

[10] E. Oja. Teaduspreemia täppisteaduste alal tööde tsükli "Banachi ruumide aproksimatsiooniomadused ja kaasruumide geomeetria" eest. Eesti Vabariigi teaduspreemiad 2001. Eesti Teaduste Akadeemia, Tallinn, 2001, 22–29.

[11] E. Oja. Banachi ruumide aproksimatsiooniomadused ja kaasruumide geomeetria. Eesti Matem. Seltsi Aastaraamat 2001. Eesti Matem. Selts, Tartu, 2003, 93–103.

[12] E. Oja. The impact of the Radon-Nikodým property on the weak bounded approximation property. Rev. R. Acad. Cien. Ser. A. Mat. 100 (2006), 325–331.

 

[13] E. Oja. Lifting bounded approximation properties from Banach spaces to their dual spaces. J. Math. Anal. Appl. 323 (2006), 666–679.

[14] E. Oja. On bounded approximation properties of Banach spaces. Banach Algebras 2009. Banach Center Publ. Vol. 91. Banach Center, Warszawa, 2010, 219–231.

[15] E. Oja. Bounded approximation properties via Banach operator ideals. Advanced Courses of Mathematical Analysis IV - Proceedings of the Fourth International School - In Memory of Professor Antonio Aizpuru Tomas, Jerez de la Frontera, 8-12 September 2009. World Scientific, New Jersey–London–Singapore, 2011, 196–215.

[16] E. Oja. Inner and outer inequalities with applications to approximation properties. Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011), 5827–5846.

[17] E. Oja. A remark on the approximation of $p$-compact operators by finite-rank operators. J. Math. Anal. Appl. 387 (2012), 949–952.

[18] E. Oja. Grothendieck's nuclear operator theorem revisited with an application to $p$-null sequences. J. Funct. Anal. 263 (2012), 2876–2892.

[19] E. Oja, I. Zolk. The asymptotically commuting bounded approximation property of Banach spaces. J. Funct. Anal. 266 (2014), 1068–1087.

[20] E. Oja, S. Treialt. Some duality results on bounded approximation properties of pairs. Studia Math. 217 (2013), 79–94.

(Käesolev artikkel on Eve Oja artikli *Teaduspreemia täppisteaduste alal uurimuste tsükli "Operaatorideaalid ja tensorkorrutised Banachi ruumide struktuuri-uuringutes" eest* (Eesti Vabariigi teaduspreemiad 2014, Tallinn, 2014, 32–43) ümbertöötatud variant.)

 