

# Kompleksarvud ja pöörded tasandil (miks see füüsikas nii vajalik on)

MAIDO RAHULA

Tartu Ülikool

## 1. Euleri valemid

On olemas kolm *ühikut*: naturaalarv 1, imaginaarühik  $i$  omadusega  $i^2 = -1$  ja sümbol  $j$ , millel polegi õiget nime, kuid tema omaduseks on  $j^2 = 1$ . Seame nendele vastavusse kolm 2. järku maatriksit  $E$ ,  $I$ ,  $J$ ,

$$(1, i, j) \rightsquigarrow (E, I, J),$$
$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Maatriksel  $I$  ja  $J$  on samasugused omadused, mis ühikutel  $i$  ja  $j$ :

$$i^2 = -1, \quad j^2 = 1 \quad \rightsquigarrow \quad I^2 = -E, \quad J^2 = E.$$

Kehtivad tuntud valemid

$$e^{it} = \cos t + i \sin t, \quad e^{jt} = \cosh t + j \sinh t \quad (1)$$

ning sellised valemid kehtivad ka maatriksite  $It$  ja  $Jt$  eksponentsiaalide puhul:

$$e^{It} = E \cos t + I \sin t, \quad e^{Jt} = E \cosh t + J \sinh t. \quad (2)$$

Kõiki nelja valemit (1) ja (2) nimetame *Euleri valemiteks*, kuigi tegelikult Euleri valemi all tuntakse vaid valemit  $e^{it} = \cos t + i \sin t$ .

**Vihje Euleri valemite tõestuseks.** Valemid (1) tõestame järgmise skeemi järgi (arutlused jätame lugejale; mainime vaid, et rida  $e^x$  koondub absoluutselt ja selletõttu saab teda esitatada kahe rea summana):

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \\ &= \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) + \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right), \\ x = it &\rightsquigarrow e^{it} = \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \dots\right) + i\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots\right) = \cos t + i \sin t, \\ x = jt &\rightsquigarrow e^{jt} = \left(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + \dots\right) + j\left(t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots\right) = \cosh t + j \sinh t. \end{aligned}$$

Sama skeemi järgi tõestame valemid (2).

Esitame valemid (2) maatrikskujul

$$e^{It} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}, \quad e^{Jt} = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Sellisel kujul näeme, et iga eksponentsiaal  $e^{It}$  ja  $e^{Jt}$  määrab lineaarrühmas  $GL(2, \mathbb{R})$  1-parameetrilise alamrühma, ehk ka kõverjoone, mille puutujavektoriks rühma ühikus  $E$  on Lie algebra  $gl(2, \mathbb{R})$  element, kas  $I$  või  $J$ ,

$$I, J \in gl(2, \mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad e^{It}, e^{Jt} \in GL(2, \mathbb{R}).$$

Rühma  $GL(2, \mathbb{R})$  toimeks tasandil on *tsentroafiinsed teisendused*.

## 2. Lineaarne vektorväli ja lineaarne voog

Tasandi koordinaatfunktsioonid  $(u, v)$  määravad üheaegselt *naturaalse baasi* – osatuletiste operaatoritest *reeperi* ja diferentsiaalidest duaalse *koreeperi*. Kasutame veerumaatrikseid  $U, U', dU$  ja reemaatriksit  $\partial_U$ ,

$$U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad U' = \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}, \quad dU = \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}, \quad \partial_U = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

Baasi  $(\partial_U, dU)$  duaalsus tähendab võrdust  $dU(\partial_U) = E$ .

Kõneleme vektorväljadest. Vektorväli  $X$  reeperis  $\partial_U$  on määratud komponentidega  $(x, y)$ , mis on koordinaatide  $(u, v)$  siledad funktsioonid<sup>1</sup>. Seega vektorväli  $X$  on diferentsiaaloperaator ja seda võib rakendada funktsioonile  $f$ . Tulemuseks on tuletis  $Xf$  ehk lihtsamalt tähistuses<sup>2</sup>  $f'$ ,

$$X = x \frac{\partial}{\partial u} + y \frac{\partial}{\partial v}, \quad f' = x \frac{\partial f}{\partial u} + y \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Rakendades vektorvälja  $X$  koordinaatfunktsioonidele saame tulemuseks vektorvälja komponendid  $(x, y)$ :

$$\begin{cases} u' = x(u, v) \\ v' = y(u, v). \end{cases} \quad (4)$$

Vektorvälja iseennast on hea esitada ka maatrikskujul:

$$X = \partial_U U'.$$

Samas on tegu diferentsiaalvõrrandite süsteemiga (4). Selle lahend määrab voo<sup>3</sup>  $a_t = \exp tX$  ning ka iga punkti  $(u, v)$  trajektoori  $(u_t, v_t)$  voos  $a_t$ .

Eristel huvi pakub *lineaarne vektorväli*  $X$ , kui tema komponendid  $U'$  on koordinaatide  $U$  lineaarfunktsioonid, st  $U' = CU$ , kus  $C$  on konstantne 2. järku maatriks. Võrdus  $U' = CU$  on siin süsteem (4) ja selle lahendi määrab antud juhul maatriksi  $Ct$  eksponentsiaal:

$$U' = CU \Rightarrow U_t = e^{Ct}U.$$

Erijuhul maatriks  $C$  võib olla kas maatriks  $I$  või ka maatriks  $J$ . Esimesel juhul süsteemi  $U' = IU$  lahendiks on  $U_t = e^{It}U$  ja sellest järeldub süsteem  $U'' + U = 0$ , mille lahendiks omakorda on  $U_t = U \cos t + U' \sin t$ ; teisel juhul süsteemi  $U' = JU$  lahendiks on

<sup>1</sup>Vektorväljadega saab lähemalt tutvuda raamatust [1]. Siledus tähendab diferentseeruvust.

<sup>2</sup>Sobiv on kasutada priime, kui teame, millise vektorvälja suhtes diferentseerimine toimub.

<sup>3</sup>Voog  $a_t$  on tasandi teisenduste 1-parameetiline rühm.

$U_t = e^{Jt}U$  ja sellest järeldub süsteem  $U'' - U = 0$ , mille lahendiks on omakorda  $U_t = U \cosh t + U' \sinh t$ . Mängu tulevad Euleri valemid (2):

a)  $C = I, U' = IU, U'' + U = 0, U_t = e^{It}U = U \cos t + U' \sin t,$

$$\begin{cases} u_t = u \cos t - v \sin t \\ v_t = u \sin t + v \cos t, \end{cases} \quad u_t^2 + v_t^2 = u^2 + v^2,$$

b)  $C = J, U' = JU, U'' - U = 0, U_t = e^{Jt}U = U \cosh t + U' \sinh t,$

$$\begin{cases} u_t = u \cosh t + v \sinh t \\ v_t = u \sinh t + v \cosh t, \end{cases} \quad u_t^2 - v_t^2 = u^2 - v^2.$$

Juhul a) on tegemist vektorväljaga

$$X = -v \frac{\partial}{\partial u} + u \frac{\partial}{\partial v},$$

mille trajektoorideks on ringjooned ning invariandiks on funktsioon  $u^2 + v^2$ ; tasandil  $uv$  toimib *elliptiline pööre*<sup>4</sup>.

Juhul b) on tegemist vektorväljaga

$$X = v \frac{\partial}{\partial u} + u \frac{\partial}{\partial v},$$

mille trajektoorideks on hüperboolid ja invariandiks on funktsioon  $u^2 - v^2$ ; tasandil  $uv$  toimib *hüperboolne pööre*.

Süsteemid a) ja b) kirjutame lahti, et lihtsam oleks täpsustada eksponentsiaalide  $e^{It}$  ja  $e^{Jt}$  esitusi  $uv$ -tasandil, vt (3):

$$\begin{bmatrix} u \\ u \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ u \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u \\ u \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ u \end{bmatrix}.$$

Üldjuhul maatriks  $C$  erineb maatrikseist  $I$  ja  $J$ , kuid peamiseks jäävad siiski elliptilised ja hüperboolsed pöörded, mida üldjuhul võib mõjutada *homoteetia* – tasandi paisumine või kahanemine.

<sup>4</sup>Afinsel tasandil tuleb rääkida ellipsitest, kuna ringjoone mõistet seal pole.

### 3. Klassifikatsioon: fookused, sadulad, sõlmed

Esineb kolm erinevat tüüpi lineaarseid vektorvälju tasandil. Lineaarsel vektorväljal on 0-punktis iseärasus (singulaarsus) ja selle punkti läheduses trajektoorid moodustavad nn *faasiportree* – kas *fookuse*, *sadula* või *sõlme*. Uurime neid singulaarsusi lähemalt.

Maatriksil  $C$  on selle *determinant*, *jälg* – peadiagonaali elementide summa, ning ruutvõrrandi  $\det(C - \lambda E) = 0$  lahendid – maatriksi  $C$  *omaväärtused*  $\lambda_1$  ja  $\lambda_2$  :

$$\begin{aligned} C, \quad \det C, \quad \operatorname{tr} C, \\ \det(C - \lambda E) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} C + \det C, \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} C, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \det C. \end{aligned}$$

Kehtivad *Viete'i valemid* – omaväärtuste summa võrdub jäljega ja korrutis determinandiga. Ruutvõrrandi diskriminandi esitame kujul

$$\Delta = \frac{1}{4} \operatorname{tr}^2 C - \det C = \left( \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{4} \right)^2.$$

Sõltuvalt diskriminandi märgist esineb kolm juhtu: omaväärtused on kas kaaskomplekssed, reaalsed erinevad või võrdsed. Igal juhul eksponentsiaal  $e^{Ct}$  avaldub omamoodi:

$$1) \lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \operatorname{tr} C = 2\alpha, \det C = \alpha^2 + \beta^2, \Delta = -\beta^2,$$

$$e^{Ct} = e^{\alpha t} \left\{ E \cos \beta t + (C - \alpha E) \frac{\sin \beta t}{\beta} \right\},$$

$$2) \lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta, \operatorname{tr} C = 2\alpha, \det C = \alpha^2 - \beta^2, \Delta = \beta^2,$$

$$e^{Ct} = e^{\alpha t} \left\{ E \cosh \beta t + (C - \alpha E) \frac{\sinh \beta t}{\beta} \right\},$$

$$3) \lambda_1 = \lambda_2 = \alpha, \operatorname{tr} C = 2\alpha, \det C = \alpha^2, \Delta = 0,$$

$$e^{Ct} = e^{\alpha t} \left\{ E + (C - \alpha E) t \right\}.$$

**Vihje tõestuseks.** Esiteks, võttes arvesse  $e^{\alpha Et} = e^{\alpha t} E$ , kirjutame

$$e^{Ct} = e^{\alpha Et} e^{(C-\alpha E)t} = e^{\alpha t} e^{(C-\alpha E)t},$$

teiseks, märkame  $(C - \alpha E)^2 = \beta^2 E$  ja arvutame Euleri valemite eeskujul eksponentsiaali  $e^{(C-\alpha E)t}$ , vt avaldised sulgudes  $\{\dots\}$ . Minnes juhtudel 1) ja 2) piirväärtustele:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \cos \beta t = \lim_{\beta \rightarrow 0} \cosh \beta t = 1, \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\sin \beta t}{\beta} = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\sinh \beta t}{\beta} = t,$$

tuleme juhule 3).

Ekspponentsiaalile  $e^{\alpha Et}$  ehk  $e^{\alpha t} E$  vastab *homoteetiate rühm*; juhul  $\alpha > 0$  vektorvälja trajektoorid eemalduvad kiirtena 0-punktist (tasand paisub) ja juhul  $\alpha < 0$  lähenevad 0-punktile (tasand tõmbub kokku):

$$X = \partial_U(\alpha U), \quad U' = \alpha U, \quad U_t = e^{\alpha t} U.$$

Fookused, sadulad ja sõlmed homoteetiate mõjul moonduvad.

Euleri valemid kuuluvad juhtude 1) ja 2) alla, kui homoteetiad puuduvad ( $\alpha = 0$ ):

$$1)^* C = I \Rightarrow \det I = 1, \operatorname{tr} I = 0, \Delta = -1, \lambda_{1,2} = \pm i, \alpha = 0, \beta = 1,$$

$$e^{It} = E \cos t + I \sin t,$$

$$2)^* C = J \Rightarrow \det J = -1, \operatorname{tr} J = 0, \Delta = 1, \lambda_{1,2} = \pm 1, \alpha = 0, \beta = 1,$$

$$e^{Jt} = E \cosh t + J \sinh t.$$

**Singulaarsused.** Lineaarsel vektorväljal on 0-punktis *iseärasus* ehk *singulaarsus*<sup>5</sup>:

1a) ( $\alpha > 0, \Delta < 0$ )  $\Rightarrow$  *ebastabiilne fookus*: elliptiline pööre paisuval tasandil, spiraalsed trajektoorid eemalduvad 0-punktist.

1b) ( $\alpha < 0, \Delta < 0$ )  $\Rightarrow$  *stabiilne fookus*: elliptiline pööre kahaneval tasandil, spiraalsed trajektoorid lähenevad 0-punktile.

2a) ( $\alpha > 0, \Delta > 0$ )  $\Rightarrow$  *ebastabiilne sõlm*: hüperboolne pööre paisuval tasandil, trajektoorid eemalduvad 0-punktist, asümptoodid ei kooldu.

2b) ( $\alpha < 0, \Delta > 0$ )  $\Rightarrow$  *stabiilne sõlm*: hüperboolne pööre kahaneval tasandil, trajektoorid lähenevad 0-punktile, asümptoodid ei kooldu.

3a) ( $\alpha > 0, \Delta = 0$ )  $\Rightarrow$  *ebastabiilne paraboolne sõlm*: rööplüke paisuval tasandil, trajektoorid eemalduvad 0-punktist, ei kooldu lükkesuunaline sirge.

3b) ( $\alpha < 0, \Delta = 0$ )  $\Rightarrow$  *stabiilne paraboolne sõlm*: rööplüke kahaneval tasandil, trajektoorid lähenevad 0-punktile, ei kooldu lükkesuunaline sirge.

Suurus  $\beta$  määrab voo kiiruse ja fookuste puhul ka pöörlemise suuna.

**Kompleksarvu tõlgendus üldjuhul:**

$$z = \alpha + \beta i, Z = \alpha E + \beta I, \operatorname{tr} Z = 2\alpha, \det Z = \alpha^2 + \beta^2,$$

$$\Delta = -\beta^2, \lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i,$$

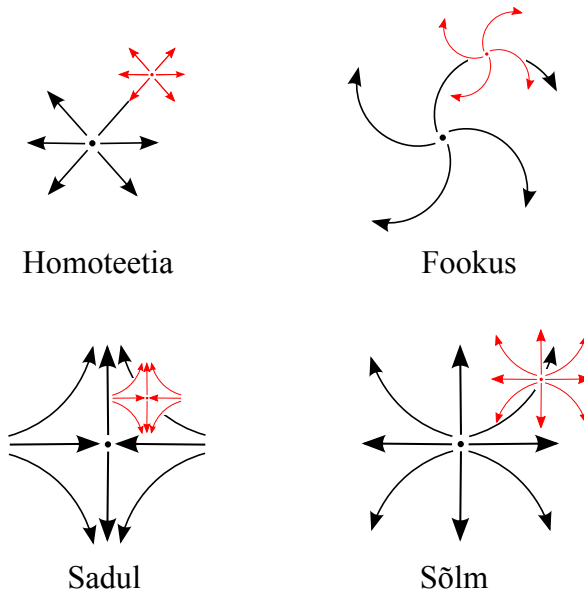
$$e^{Zt} = e^{\alpha t} \left( E \cos \beta t + I \sin \beta t \right).$$

Kompleksarvule  $z$  vastab ebastabiilne või stabiilne fookus, st pöörete rühm paisuval või kahaneval tasandil. Kaaskompleksarvule  $\bar{z}$  vastavad samad pöörded, kuid vastassuunalised.

## 4. Lineariseerimine

Lineaarsel vektorväljal on üks tähtis ja eriskummaline omapära. Kui kõneleme paisuvast/kahanevast tasandist, siis see paisumine/kahanemine ei toimu vaid 0-punkti suhtes, samamoodi tasand paisub/kahaneb ükskõik millise teise punkti suhtes. Veelgi enam, kui vaatleja liigub lineaarse vektorvälja trajektooril ja jälgib teiste punktide liikumist igäülte oma trajektooril, siis tema liikuvus teljestikus ta näeb samasugust voogu ja samasugust singulaarsust (fookust, sadulat, sõlme), mida me näeme 0-punkti ümbruses.

<sup>5</sup>Allpool joonisel 1 on näidatud neli voogu: homoteetia, fookus, sadul ja sõlm. Iga voog kordub liikuvus teljestikus.



Joonis 1. Globaalne ja lokaalne.

Sellist olukorda tasub analüüsida. Vektorvälja  $X$  voos  $a_t$  toimub nii funktsiooni  $f$  kui ka vektorvälja  $Y$  ja 1-vormi  $\Phi$  teisendus ning me saame kõnelda nende *Lie tuletistest*<sup>6</sup> vektorvälja  $X$  suhtes:

$$f' \doteq Xf, \quad Y' \doteq \mathcal{L}_X Y = XY - YX, \quad \Phi' \doteq \mathcal{L}_X \Phi.$$

Arvutame esiteks Lie tuletise  $Y'$ . Rakendame Leibnizi valemit puhtformaalselt “korrutisele”  $Yf$ . Kuna  $f$  on siin suvaline funktsioon, saame  $Y' = [XY]$ :

$$(Yf)' = Y'f + Yf', \quad Y'f = XYf - YXf, \quad Y' = XY - YX \doteq [XY].$$

Lie tuletise  $\Phi'$  leidmiseks rakendame Leibnizi valemit “korrutisele”  $\Phi(Y)$ :

$$(\Phi(Y))' = \Phi'(Y) + \Phi(Y'), \quad \Phi'(Y) = (\Phi(Y))' - \Phi(Y').$$

<sup>6</sup>Lie arvutuse alused on põhjalikult esitatud kirjanduses, vt näiteks [2], [3].



Juhul, kui 1-vorm  $\Phi$  on funktsiooni  $f$  diferentsiaal, siis, kuna kehtivad võrdused  $\Phi = df$ ,  $df(Y) = Yf$ ,  $df(Y') = Y'f$ , annab viimane valem järeltuleks

$$(df)'(Y) = XYf - XYf + YXf = df'(Y),$$

kus  $Y$  on suvaline vektorväli. Jätame ära  $Y$  ning saame reegli:

*funktsiooni  $f$  tuletise diferentsiaal on diferentsiaali  $df$  tuletis,*

$$\boxed{d(f') = (df)', \quad d(Xf) = \mathcal{L}_X(df)}. \quad (5)$$

Reegel annab tähtsa implikatsiooni – *lineaarne voog koordinaatides  $U$  kordub täpselt liikuva teljestiku koordinaatides  $dU$ :*

$$\boxed{U' = CU \Rightarrow U_t = e^{Ct}U} \Rightarrow \boxed{(dU)' = CdU \Rightarrow (dU)_t = e^{Ct}dU}.$$

Sellega on põhjendatud lineaarse vektorvälja ja selle voo globaalne-lokaalne omapära.

Naturaalne baas  $(R, \Theta) = (\partial_U, dU)$  teiseneb lineaarses voos vastavalt *derivatsioonivalemitele:*

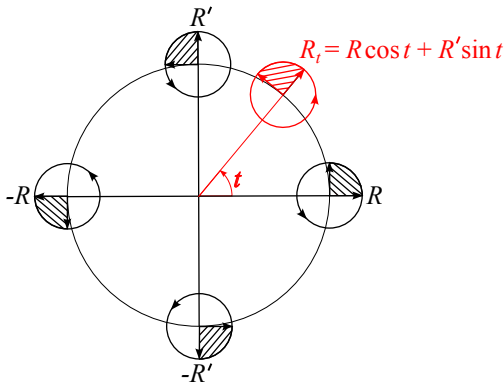
$$\begin{cases} R' = -RC \\ \Theta' = C\Theta \end{cases} \implies \begin{cases} R_t = Re^{-Ct} \\ \Theta_t = e^{Ct}\Theta. \end{cases}$$

Reeperi ja koreeperi duaalsus  $\Theta(R) = E$  säilib<sup>7</sup>.

Juhul  $C = -I$  ilmutab end jälle Euleri valem  $e^{It} = E \cos t + I \sin t$ , baas  $(R, \Theta)$  pöörleb positiivses suunas (vastu kellaosutit):

$$\begin{cases} R'' + R = 0 \\ \Theta'' + \Theta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} R_t = R \cos t + R' \sin t \\ \Theta_t = \Theta \cos t + \Theta' \sin t. \end{cases}$$

<sup>7</sup>Kuna teisendusel  $a_t$  kontravariantsed suurused, nagu vektorväljad, liiguvad ühes suunas ja kovariantsed suurused, nagu 1-vormid, teises suunas, siis baasi  $(R, \Theta)$  puhul, et duaalsus säiluks, on reeperile  $R$  vaja rakendada teisendust  $a_t$  ja koreeperile  $\Theta$  pöördteisendust  $a_{-t}$ , või vastupidi.



Joonis 2. Euleri pöörded.

Joonisel 2 on näidatud pöörded tasandil. Reeper  $R$  pöörab end samamoodi, nagu voog ümber 0-punkti<sup>8</sup>. Sellise pöörlemise tekitab maatriks  $I$  ning ka imaginaarühik  $i$  selle laiemas tõlgenduses. Täpsemalt, maatriks  $I$  tekitab eksponentsiaali  $e^{It}$  ja see omakorda tekitab pöörete rühma tasandil.

**Märkus.** Müstilisel kombel on kolm suurust  $e$ ,  $\pi$  ja  $i$  koos ühes valemis  $e^{\pi i} = -1$ , vt Euleri valem juhul, kui  $t = \pi$ . Joonisel 2 see valem demüstifitseerub:  $R_{\pi} = -R$ , reeper teeb pöörde  $180^\circ$ .

## 5. Mittelineaarne vektorväli

Kui vektorväli  $X$  on *mittelineaarne*, siis süsteemist (4) järeldub ka lineaarne süsteem, kuid diferentsiaalide jaoks:

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}.$$

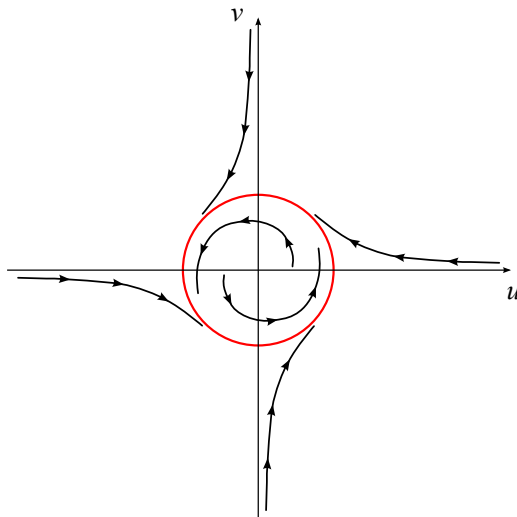
Komponentide  $x$  ja  $y$  osatuletised on siin Jacobi maatriksi elementideks. Fikseeritud punktis Jacobi maatriks fikseerub, see on

<sup>8</sup>Nagu eespool öeldud: lineaarne voog muutkonnal kordub muutkonna puutujaruumis.

konstantne ning puutajaruumis (koordinaatides  $dU$ ) tekitab lineaarse voo. Ilmselt, lineaarne voog iseloomustab globaalset voogu vaid antud punkti ümbruses. Teisisõnu, *globaalne mittelineaarsus lokaalselt lineariseerub*.

Mõistagi, lokaalne ettekujutus globaalsest voost muutub punktist punktisse. Küll aga globaalset lineaarse voo puhul selle lokaalne esitus ei erine globaalsest ja minnes ühest punktist teise selle muutust ei toimu<sup>9</sup>.

**Näide.** Olgu  $uv$ -tasandil antud mittelineaarne vektorväli  $X$ .



Joonis 3. Mittelineaarsus.

Süsteem (4) määrab voo  $a_t$ . Seda voogu iseloomustavad lokaalselt Jacobi maatriks  $C$ , selle jälg, determinant ja diskriminant  $\Delta$ :

---

<sup>9</sup>Sageli väidetakse, et kuna meie  $\varepsilon$ -ümbruses toimub paisumine, siis ka universum paisub. Tegelikult lokaalne pilt pole adekvaatne globaalselt toimuvaga.

$$\begin{cases} u' = u - v - u(u^2 + v^2) \\ u' = u + v - v(u^2 + v^2), \end{cases} \quad C = \begin{bmatrix} 1 - 3u^2 - v^2 & -1 - 2uv \\ 1 - 2uv & 1 - u^2 - 3v^2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} C &= 2(1 - 2u^2 - 2v^2), \\ \det C &= 3(u^2 + v^2)^2 - 4(u^2 + v^2) + 2 > 0, \\ \Delta &= (u^2 + v^2)^2 - 1. \end{aligned}$$

Kohe näeme, et vektorvälja  $X$  vektori pikkuse ruut (komponentide ruutude summa) on  $(u^2 + v^2)^5$ , mis tähendab, et 0-punktist eemaldudes liikumise kiirus trajektooridel kasvab ja 0-punktile lähenedes kiirus aeglustub.

Joonisel 3 on näidatud faasiportree ja selle *atraktor* – ringjoon  $r = 1$ , millele lähenevad seest- ja väljaspoolt vektorvälja trajektoorid.

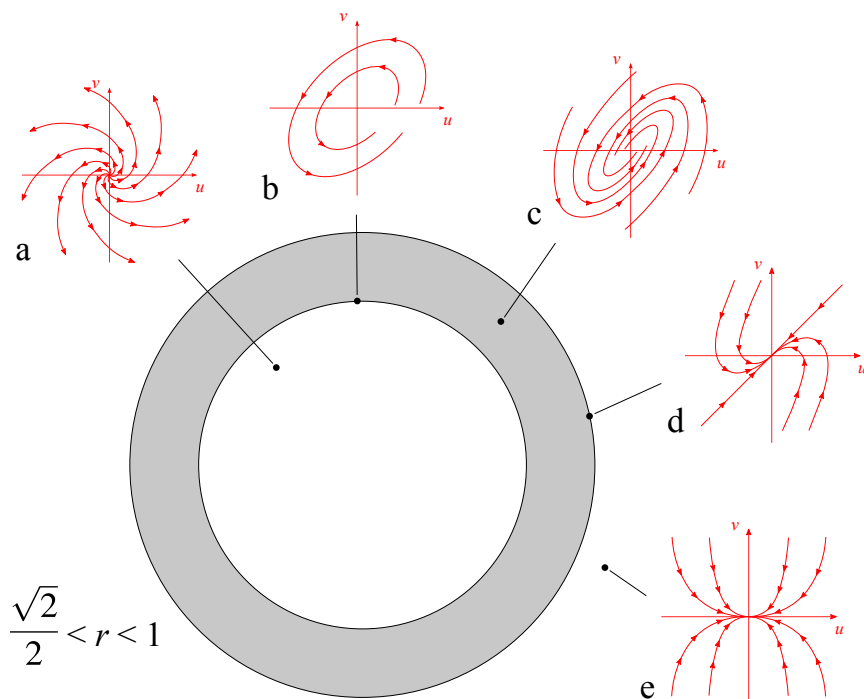
Joonisel 4 allpool näeme kaht kontsentrilist ringjoont  $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ja  $r = 1$  moodustamas rõngast. Väiksemat ringjoont  $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$  läbides muudab märki jälg  $\operatorname{tr} C$ , läbides suuremat ringjoont  $r = 1$  muudab märki diskriminant  $\Delta$ . Kui liikuda rõnga seest rõngast välja, siis kahel ringjoonel toimivad *bifurkatsioonid*. Vahelduvad *režiimid*: rõngale minnes ebastabiilne fookus muutub stabiilseks (paisumine kahanemiseks) ning rõngalt väljudes elliptiline voog teiseb hüperboolseks (fookusest saab sõlm). Muuseas, üleminekul on vaid hetkelised ja toimivad sujuvalt, nii, nagu näiteks tavaline funktsioon muudab tuletise märki ekstreemumpunkte läbides.

Olukord on vast lihtsam polaarkoordinaatides  $(r, \varphi)$ :

$$\begin{cases} u = r \cos \varphi \\ v = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r' = r(1 - r^2) \\ \varphi' = 1, \end{cases}$$

$$\operatorname{tr} C = 2(1 - 2r^2), \quad \det C = 3r^4 - 4r^2 + 2, \quad \Delta = r^4 - 1,$$

$$X = r(1 - r^2) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$



Joonis 4. Bifurkatsioonid ja režiimid.

Teeme veel ülevaate, kuidas režiimid vahelduvad:

- a) rõnga sees:  $r < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\Delta < 0$ ,  $\text{tr } C > 0$  – ebastabiilne fookus,
- b) rõnga sisepiiril:  $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\Delta < 0$ ,  $\text{tr } C = 0$  – fookus (elliptiline pööre),
- c) rõnga peal:  $\frac{\sqrt{2}}{2} < r < 1$ ,  $\Delta < 0$ ,  $\text{tr } C < 0$  – stabiilne fookus,
- d) rõnga välispiiril:  $r = 1$ ,  $\Delta = 0$ ,  $\text{tr } C < 0$  – stabiilne parabolne sõlm,
- e) rõngast väljas:  $r > 1$ ,  $\Delta > 0$ ,  $\text{tr } C < 0$  – stabiilne sõlm.

Lõpetuseks üks huvitav arutluskäik. Eeldame, et universum on mittelineaarne, nagu näidatud joonisel 3. Võttes arvesse kõik galaktikad ja kõikkõimalikud struktuurid, mis meid ümbritsevad, oleme ikkagi oma väikeses  $\varepsilon$ -ümbruses, kus valitseb lineaarsus. Meie

maailm nagu paisub ja me arvame, et kogu universumis toimib homoteetia, nagu kujutatud joonisel 1. Võib pidada võimalikuks, et meie oma  $\varepsilon$ -ümbrusega liigume mingis hajuvas voos, näiteks, mittestabiilses sõlmes; sel juhul oleks põhjendatud ka nn esmapaugu teooria. On ka teisi võimalusi – me tajume oma maailma, näiteks sellisena, nagu näeme ühel juhtudest a, b, c, d, e joonisel 4. Võib arvata, et kõik need lineaarsed maailmad eksisteerivad, kuid universumi erinevates paikades. Kas on meil sel juhul võimalik minna ühest lokaalsest maailmast teise? Mõistagi, see oleks võimalik, kui meie oma  $\varepsilon$ -ümbrusega liiguksime, nagu ülalpool näidatud, asendist a asendisse b, sealt asendisse c jne, elades üle vast mingil ajal ja mingis kohas ruumi ümberkorraldusi, st bifurkatsioone. Põhiliseks meie arutlustes jääb igal juhul kindlalt see, et lähtudes lokaalsest maailmast ei saa teha järeldusi universumi kohta globaalselt. Sest valdavad struktuurid universumis on ilmselt mittelineaarsed.

Autor avaldab tänu Reimo Palmile abi eest artikli vormistamisel.

Olgu mainitud Eesti Haridus- ja Teadusministeeriumi institutsionaalne uurimistoetus IUT20-57.

## Kirjandus

- [1] M. Rahula. *Sissejuhatus diferentsiaalgeomeetriasse*. Tartu Ülikool, Tartu, 1991, 136 lk.
- [2] M. Rahula. *New Problems in Differential Geometry*. World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1993, 172 pp.
- [3] G. Atanasiu, V. Balan, N. Brînzei, M. Rahula. *Differential-Geometric Structures: Tangent Bundles, Connections in Fiber Bundles, Exponential Law and Jet Spaces* (in Russian). Librokomp, Moskva, 2009, 320 pp.