MATEMAATIKA

Kunstliku baasi meetodi uus versioon lineaarses planeerimises

Evald Übi, Jaan Übi
Tallinna Tehnikaülikool

Töös on kirjeldatud suure M-meetodi uut varianti, kus selle parameetri määramine on oluliselt lihtsam kui klassikalisel juhul. Lähteülesande sihifunktsioonile lisatakse üks täiendav muutuja, mille optimaalse väärtuse korral on täidetud kõik selle ülesande kitsendused. Koostatakse lisakitsendus kunstlike muutujate kohta, mis garanteerib nende lahkumise baasist. Kui optimaalne lahend on olemas, siis esitatava meetodi kasutamiseks tuleb klassikalist simpleksalgoritmi muuta ainult vähesel määral.

1. Sissejuhatus

Paljude asjatundjate arvates on simpleksalgoritm operatsioonianalüüsi kõige efektiivsem meetod. Seda kasutatakse kogu maailmas tuhandeid kordi päevas rongide, lennukite ja laevade sõiduplaanide koostamisel, äritegevuse optimeerimiseks, kütusesegude koostamisel jm, vt [1]. Öeldakse isegi, et simpleksalgoritm juhib maailma.

Simpleksmeetodi täiustamine on endiselt päevakorras. Eelmise sajandi kaheksakümnendatel aastatel algas intensiivne iteratiivsete lahendusalgoritmide uurimine. Nende kaht tüüpi lahendusmeetodite võrdlemine ja täiustamine jätkub ka käesoleval ajal. Sellele vaatamata leiab kõige rohkem praktikas rakendust kaheetapiline simpleksmeetodi variant. Klassikalise M-meetodi kõige raskem küsimus on selle trahvikordaja etteandmine. Lahendatud näidete põhjal võime väita, et lisakitsenduse kasutamine lihtsustab olulisel määral parameetri M määramist.

Vähimruutude meetodi kasutamist alglahendi leidmiseks on vaadeldud G. Dantzigi ja kaasautorite töös [5], samuti käesoleva kirjutise ühe autori artiklites [3, 4, 6]. Viimases kirjeldatud meetodiga leitud alglahend võib osutuda optimaalseks.

Töös kirjeldame esmalt vaadeldavat algoritmi. Selle rakendamise näited on toodud kolmandas osas eeldusel, et ülesandel on tõkestatud optimaalne lahend. Kui see eeldus pole täidetud, siis lisakitsendusega ülesande sihifunktsioon on tõkestamata. Selliseid ülesandeid vaatleme neljandas ja viiendas osas.

Käesoleva töö põhieesmärk on täiustada kunstliku baasi meetodit ühe kitsenduse lisamise kaudu.

2. Uus kunstliku baasi meetodi versioon

Vaatleme lineaarse planeerimise ülesannet kujul

$$\begin{aligned} z = (c,x) := \sum c_i x_i \to max \\ Ax = b, \\ x \geqslant 0 \end{aligned} \tag{1}$$

ja selle duaalülesannet

$$\begin{aligned} w = (y,b) \to min \\ yA \geqslant c, \end{aligned} \tag{2}$$

kus A on $m \times n$ maatriks, b ja y on m-vektorid, x ja c on n-vektorid.

Kui klassikalise kunstliku baasi meetodi korral on täidetud võrratused

$$y_i \leqslant M,\ i = 1, ..., m, \tag{3}$$

kus M on küllalt suur etteantud konstant, ja duaalülesande kitsendused, siis on leitud ülesannete optimaalsed lahendid, vt [2].

Viiendas osas vaatleme erijuhtu, kus parem pool $b = 0$.

Eeldus 1.1 Ülesandes (1) on kõik paremad pooled mittenegatiivsed, vektor $b \geqslant 0$.

Võtame kasutusele mittenegatiivsed abimuutujad $u = (u_1, \ldots, u_n)$, kunstlikud muutujad $v = (v_1, ..., v_m), v_{m+1}$ ja muutuja t. Koostame lineaarse planeerimise ülesande

$$z_1 = (c, u) - M \sum v_i - M v_{m+1} \to max$$

$$Au + v - tb = 0, \tag{4}$$

$$\sum v_i + v_{m+1} + t = 1$$

$$u, v, t \geqslant 0,$$

kus M on piisavalt suur positiivne arv.

Kui selle ülesande lahendamisel saime valitud M korral lõpliku z_{1max} ja

$$v_1 = v_2 = v_m = v_{m+1} = 0, \;\; t > 0,$$

siis lähteülesande (1) optimaalne lahend avaldub kujul $x = u/t$. Vastuoluliste kitsendustega või tõkestamata sihifunktsiooniga ülesandeid vaatleme neljandas ja viiendas osas.

Kõrvaldame ülesande (4) sihifunktsioonist kunstlikud muutujad, kasutades selleks viimast kitsendust:

$$z_2 = (c, u) + Mt \to max$$

$$Au + v - tb = 0, \tag{5}$$

$$\sum v_i + v_{m+1} + t = 1$$

$$u, v, t \geqslant 0.$$

Sellel laiendatud ülesandel on alati lubatav lahend $v_{m+1} = 1$, ülejäänud muutujad võrduvad nulliga. Koostame laiendatud ülesandele vastava duaalülesande

$$w_2 = y_{m+1} \to min,$$

$$(y, A_j) \geqslant c_j, \; j = 1, ..., n \tag{6}$$

$$y_i + y_{m+1} \geqslant 0$$

$$i = 1, ..., m$$

$$-(y, b) + y_{m+1} \geqslant M$$

$$y_{m+1} \geqslant 0,$$

kus A_j on j-s veerg maatriksis A. Olgu $x*$ ja $y*$ ülesannete (1) ja (2) optimaalsed lahendid, olgu täidetud eeldus 1.1 ja võtame $u* = x*, t* = 1, y_{m+1} = M + (y*, b)$. Kui parameeter M on piisavalt suur, siis on täidetud kõik duaalülesande (6) kitsendused ja sihifunktsioonide optimaalsed väärtused võrduvad,

$$w_2 = y_{m+1} = M + (y*, b) = z_2 = (c, u*) + M. \qquad (7)$$

Seega on muutujad $u*, t*, y*, y_{m+1}$ ülesannete (5) ja (6) optimaalsed lahendid ja kuna $t* = 1$, siis kõik kunstlikud muutujad võrduvad nulliga.

Eelduse 1.1 korral kehtib ka vastupidine väide: kui lisakitsendusega ülesande (5) optimaalses lahendis $t* = 1$, siis kunstlikud muutujad on lahkunud baasist ja piisavalt suure M korral on täidetud kõik duaalülesande (6) kitsendused. Ülesannete (5)–(6) sihifunktsioonide võrdsusest järeldub sama väide ka ülesannete (1) ja (2) kohta. Kõik eelöeldu kehtib ka siis, kui ülesannete (1)–(2) optimaalsed lahendid pole ühesed.

Seega lahendades laiendatud ülesande (5) piisavalt suure M korral, kui optimaalses lahendis kehtib ligikaudne võrdus $t = 1$, oleme saanud ka lähteülesande optimaalse lahendi $x = u/t$.

3. Meetodi kasutamise näited

Näide 3.1. Vaatleme ülesannet

$$z = -4x_1 - x_2 - 5x_3 + x_4 \to max$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 6$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$$

$$x \geqslant 0.$$

Koostame ülesande (5):

$$z_1 = -4u_1 - u_2 - 5u_3 + u_4 + Mt \to max$$
$$u_1 + 3u_2 + u_3 + u_4 + v_1 \quad - 6t = 0$$
$$-u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \quad + v_2 - 4t = 0$$
$$v_1 + v_2 + v_3 + t = 1$$
$$u, v, t \geqslant 0.$$

Lahendame selle ülesande modifitseeritud simpleksmeetodiga $M = 0$ korral. Lähtume töös [2] toodud selle meetodi kirjeldusest.

c	var	val	1	2	3	.
0	v_1	0	1	0	0	1
0	v_2	0	0	1	0	1
0	v_3	1	-1	-1	1	-2
	z_1, y	0	0	0	0	-1

Tabel 1

c	var	val	1	2	3	.
0	v_1	0	1	-1	0	-2
1	u_4	0	0	1	0	-4
0	v_3	1	-1	1	1	3
	z_1, y	0	0	1	0	-4

Tabel 2.

c	var	val	1	2	3	.
0	v_1	2/3	1/3	-1/3	2/3	2/3
1	u_4	4/3	-4/3	7/3	4/3	-5/3
0	t	1/3	-1/3	1/3	1/3	-2/3
	z_1, y	4/3	-4/3	7/3	4/3	-2/3

Tabel 3.

c	var	val	1	2	3
-1	u_2	1	1/2	-1/2	1
1	u_4	3	-1/2	3/2	3
0	t	1	0	0	1
	z_1, y	2	-1	2	2

Tabel 4.

Tabelite 1–3 viimase rea viimane element võrdub baasiväliste muutujate minimaalse hinnanguga. Esimeses tabelis on see muutuja u_4 jaoks $r_4 = -1$, teises tabelis t jaoks -4 jne. Laiendatud ülesande (5) optimaalne lahend $u = (0, 1, 0, 3)^T, t = 1$ ja lähteülesande (1) lahend $x = u/t = (0, 1, 0, 3)^T$.

Näide 3.2. Olgu

$$A, b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 & -1 & 8 \\ 4 & 0 & 2 & -1 & 5 & 10 \\ 2 & 0 & 5 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 1, & -1, & -3, & -1.5, & 0.1 \end{pmatrix}$$

Selle ülesande optimaalne lahend on $x = (2, 0, 0, 4/3, 2/3)^T$, $z_{max} = 2/30$. Kui $M = 0.1$ korral koostada laiendatud ülesanne (5), siis optimaalses baasis on üks kunstlik muutuja,
$u = (0,317; 0; 0; 0; 0,0317)^T, v_1 = 0,857, t = 0,143$. Aga $M = 4$ korral saame lahendi $u = (2, 0, 0, 4/3, 2/3), t = 1$, kus kunstlikud muutujad võrduvad nulliga. Võib näidata et kunstlikud muutujad pole optimaalses baasis, kui kehtib võrratus $8/27 < M$.

Märkus 3.1. Sarnaselt viimase näitega võib ülesandes (5) olla optimaalses baasis mõni kunstlik muutuja positiivse väärtusega, kui parameeter M pole piisavalt suur. Et see parameeter ei peaks olema väga suur, tuleb kitsenduste abil suurendada sihifunktsiooni maksimumi. Selles näites liidame sihivektorile kitsenduste maatriksi teise rea, siis ülesande (5) lahendamisel parameetri $M = 0.1$ korral pole optimaalses baasis enam kunstlikke muutujaid. Vektorile c liitmise asemel saame optimaalse lahendi $M = 0.1$ korral ka siis, kui jagame seda vektorit arvuga 10. Kui lähteülesandel (1) on optimaalne lahend, siis duaalülesandes (6) on kitsendus

$$-(y,b) + y_{m+1} \geqslant M$$

täidetud kui võrdus. Selle ülesande kitsenduses

$$y_i + y_{m+1} = y_i + M + (y,b) = y_i + M + z_{max} \geqslant 0$$

ei pea trahvikordaja M olema suur, kui eelnevalt on kitsenduste abil suurendatud z_{max} või vähendatud sihivektori normi. Kui ülesandes on veel kitsendused

$$alumine \leqslant x \leqslant ulemine,$$

siis on lihtsam hinnata sihifunktsiooni maksimumi. Kui ülesandel (1) on olemas optimaalne lahend, siis piisavalt suure M korral muutub selle parameetri kasvamisel vaid y_{m+1}, ülejäänud duaalmuutujad jäävad samaks.

Märkus 3.2. Eellahendamise käigus tuleb muuta sihivektori normi või nende kitsenduste abil, kus $b_i > 0$, suurendada lähteülesande sihifunktsiooni optimaalset väärtust. Kui muuta sihivektorit, liites sellele teguriga s korrutatud kitsenduste maatriksi mingi rea, siis suurenevad mõlema ülesande sihifunktsioonid sb_i võrra. Samaaegselt suureneb ka duaalülesande kitsenduse $y_i + y_{m+1} \geqslant 0$ vasak pool sb_i võrra.

Näide 3.2. Vaatleme ülesannet

$$z = -x_1 + 2x_2 \to max$$

$$2x_1 - 10x_2 \geqslant 5$$

$$x_1 - 9x_2 \leqslant 2$$

$$x \geqslant 0.$$

Selles ülesandes pole ei primaalselt ega duaalselt lubatavat alglahendit ja $z_{max} = -23/8 < 0$. Kasutame kaht kunstlikku muutujat ja võtame $M = 4$.

$$z_1 = -u_1 + 2u_2 + 4t \to max$$

$$2u_1 - 10u_2 - u_3 \quad + v_1 \quad - 5t = 0$$

$$u_1 - 9u_2 \quad + u_4 \quad - 2t = 0$$

$$v_1 + v_2 + t = 1$$

$$u, v, t \geqslant 0.$$

Selle ülesande optimaalsele lahendile $u = (25/8,\ 1/8,\ 0,\ 0)^T$, $v_1 = v_2 = 0$, $t = 1$ vastab lähteülesandes $x = (25/8,\ 1/8)^T$. Aga väärtus $M = 3$ pole piisav, sest siis on v_1 optimaalses baasis.

4. Vastuolulised kitsendused

Teoreem 4.1. *Kui lähteülesande (1) kitsendused on vastuolulised, siis laiendatud ülesande (5) sihifunktsioon on tõkestamata.*

Oletame vastuväiteliselt, et ülesandel (5) on tõkestatud optimaalne lahend. Siis duaalülesande (6) optimaalne lahend rahuldab kitsendusi $yA \geqslant c$. Seega pole duaalülesande (2) kitsendused vastuolulised ja võrrandist $y_{m+1} = M + (y, b)$ saame, et ülesannete (1) ja (2) sihifunktsioonid on tõkestatud. Aga see on vastuolus teoreemi eeldusega.

Näide 4.1. Vaatleme ülesannet

$$z = 2x_1 - x_2 \to max$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \quad = 2$$

$$x_1 - x_2 \quad - x_4 = 3$$

$$x \geqslant 0.$$

Selle vastuoluliste kitsendustega ülesande jaoks koostame laiendatud ülesande (5), algbaasi moodustavad muutujad u_3, v_1, v_2. Parameetri $M = 1$ korral on toodud kolmas simplekstabel.

c	var	val	1	2	3	.
0	t	1/2	1/2	-1/2	1/2	0
2	u_1	1	2	-1	1	-1
0	v_1	1/2	-1/2	1/2	1/2	0
	z_1, y	2	4	-2	2	-1

Tabel 5

Baasi tuleb minimaalse hinnangu $r_2 = -1$ põhjal muutuja u_2, ja viimase veeru järgi on ülesandes (3) sihifunktsioon tõkestamata. Aga kuna üks kunstlik muutuja on baasis, siis pole leitud lahend lähteülesande jaoks lubatav.

Nüüd algab **lahendamise teine etapp** uue sihifunktsiooniga

$$z_3 = t - M \sum v_i \rightarrow max. \tag{8}$$

Valime jälle parameetri väärtuse $M = 1$ ja lähtume viimasel sammul arvutatud simplekstabelist.

c	var	val	1	2	3
1	t	1/2	1/2	-1/2	1/2
0	u1	1	2	-1	1
-1	v1	1/2	-1/2	1/2	1/2
	z1,y	0	1	-1	0

Tabel 6

Kuna kõik hinnangud $r_i \geqslant 0$, siis lähteülesande kitsendused on vastuolulised, sest pole võimalik viia üht kunstlikku muutujat baasist välja.

Märkus 4.1. Kui laiendatud ülesande (5) sihifunktsioon on tõkestamata, siis ülesanne (1) on vastuoluline või selle sihifunktsioon tõkestamata. Kunstlike muutujate optimaalsed väärtused sihifunktsiooni (8) korral iseloomustavad vastuolu suurust lähteülesandes. Kui need kunstlikud muutujad on optimaalses baasis ja võrduvad nulliga arvutustäpsuse piires, siis võivad lähteülesande kitsendused mitte olla vastuolulised, vt näidet 4.2. Vastasel korral, nagu näites 4.1 on ülesanne vastuoluline. Järelikult pole teine etapp kohustuslik, see on vajalik vaid selgitamaks, kas kitsendused on vastuolulised või sihifunktsioon tõkestamata. Teist lahendusvarianti vastuoluliste kitsenduste või tõkestamata sihifunktsiooni korral on vaadeldud märkuses 5.1.

Näide 4.2. Ülesande

$$z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to max$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 6$$

$$x \geqslant 0$$

lahendamisel saame $u = (0, 6, 0)^T, t = 1$, baasis on ka kunstlik muutuja $v_2 = 2E - 18$.

5. Tõkestamata sihifunktsioon

Kui lähteülesande sihifunktsioon on tõkestamata, siis on nii ka laiendatud ülesandes (5).

Näide 5.1. Vaatleme ülesannet

$$z = 4x_1 - 3x_2 \to max$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2$$

$$x \geqslant 0.$$

Koostame laiendatud ülesande (5), algbaasi moodustavad muutujad v_1, v_2, v_3. Parameetri $M = 1$ korral on toodud neljas simplekstabel.

c	var	val	1	2	3	.
0	t	1/2	1/2	-1/2	1/2	0
4	u_1	1/2	3/2	-1/2	1/2	-1
0	v_2	1/2	-1/2	1/2	1/2	0
	z_1, y	2	6	-2	2	-1

Tabel 7

Hinnangu $r_2 = -1$ põhjal tuleb baasi muutuja u_2, ja viimase veeru põhjal on sihifunktsioon tõkestamata. Nüüd jätkame, kasutades sihifunktsiooni (8) mingi lubatava lahendi leidmiseks.

c	var	val	1	2	3	.
1	t	1/2	1/2	-1/2	1/2	-1/2
0	u1	1/2	3/2	-1/2	1/2	1/2
-2	v2	1/2	-1/2	1/2	1/2	1/2
	z1,y	0	3/2	-3/2	-1/2	-3/2

Tabel 8

c	var	val	1	2	3
1	t	1	0	0	1
0	u1	0	2	-1	0
0	u4	1	-1	1	1
	z1,y	1	0	0	1

Tabel 9

Leitud lahend $u = (0,0,0,1)^T, t = 1$ rahuldab laiendatud ülesande ja $x = (0,0,0,1)^T$ lähteülesande kitsendusi. Järelikult viimane ülesanne pole vastuoluline, lähteülesande sihifunktsioon on tõkestamata.

Märkus 5.1. Teine võimalus ülesande lahendamiseks tõkestamata sihifunktsiooni või vastuoluliste kitsenduste korral seisneb veel ühe muutuja ja ühe kitsenduse lisamises kõikide muutujate summa kohta. Näites 5.1 oleks see kujul

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = N,$$

kus N on piisavalt suur arv. Tõkestamata sihifunktsiooni korral saab kahe lisakitsendusega ülesande optimaalse lahendi abil määrata, milliste baasimuutujate korral kasvab sihifunktsioon tõkestamatult. See kitsendus ei muuda lõppvastust, kui lähteülesanne on vastuoluline.

Lõpuks vaatleme erikuju, kui kõik paremad pooled $b = 0$.

Näide 5.2.

$$z = 2x_1 - x_2 - 6x_3 \to max$$

$$3x_1 - 3x_2 - 6x_3 \quad = 0$$

$$-2x_1 + x_2 + 9x_3 + x_4 = 0$$

$$x \geqslant 0.$$

Koostame laiendatud ülesande (5), esimesele kitsendusele lisame kunstliku muutuja v_1, lisakitsendusele vastab v_2:

$$z_1 = 2u_1 - u_2 - 6u_3 \to max$$

$$3u_1 - 3u_2 - 6u_3 \quad + v_1 \quad = 0$$

$$-2u_1 + u_2 + 9u_3 + u_4 = 0$$

$$v_1 + v_2 = 0$$

$$u, v \geqslant 0.$$

Simpleksmeetodiga lahendamisel näeme, et sihifunktsioon on tõkestamata. Järelikult on see nii ka lähteülesandes. Kui aga muuta tingimusi, võtta näiteks $c_1 = 0,5$ siis on lähteülesande optimaalne lahend $x = 0, z_{max} = 0$.

6. Kokkuvõte

Töös kirjeldatud M-meetodi versiooni korral lisatakse ülesandele üks kitsendus. Olemasolevaid simpleksalgoritmi programme tuleb muuta ainult vähesel määral. Vastuoluliste kitsendustega või tõkestamata sihifunktsiooni korral on laiendatud ülesande sihifunktsioon tõkestamata. Sel juhul pole tingimata vaja lahendada teise etapi ülesannet (8), vaid tuleb korrigeerida lähteülesande andmeid.

Kirjandus

[1] www.Forte.ee, *Algoritm, mis juhib maailma.*

[2] D.G. Luenberger, *Linear and nonlinear programming*, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 2003.

[3] E. Übi, *Mathematical programming via the least squares method*, Cent. Eur. J. Math. **8** (2010), 795–806.

[4] E. Übi, K. Keres, *Rakendusmatemaatika*, TTÜ Kirjastus, 2013.

[5] G. Dantzig, M. Thapa, *Linear programming 2: Theory and Extensions*, Standford, 2003.

[6] E. Übi, *Linear inequalities via least squares*, Proc. Est. Acad. Sci. **62** (2013), 238–248.