Kervaire'i invariandi probleem

Viktor Abramov ja Olga Liivapuu
Tartu Ülikool

Probleemist

2009. aasta aprillis Edinburghis toimunud Michael Atiyahle[7] pühendatud konverentsil *Geomeetria ja Füüsika* (*Geometry and Physics*) teatas Michael Hopkins (Harvardi Ülikool) oma ettekandes, et ta on koostöös oma kolleegide Michael Hilliga (Virginia Ülikool) ja Douglas Raveneliga (Rochesteri Ülikool) lahendanud *Kervaire'i invariandi probleemi*, mis oli oodanud lahendust juba 45 aastat.

1960. aastal defineeris Michael Kervaire [6] sileda $(4k+2)$-mõõtmelise taglasmuutkonna jaoks $(k \neq 0, 1, 3)$ invariandi, mida hiljem hakati nimetama *Kervaire'i invariandiks*. Selle invariandi väärtused kuuluvad rühma $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/\operatorname{mod} 2 = \{0, 1\}$. Samas artiklis näitas ta, et 10-mõõtmelise taglasmuutkonna invariant võrdub nulliga. Samuti kasutas ta mainitud invarianti tükiti lineaarse 10-mõõtmelise muutkonna, millel puudub sile struktuur, konstrueerimiseks. Hiljem William Browder [3] tõestas, et Kervaire'i in-

[7]Michael Francis Atiyah (s 1929) – inglise matemaatik; tuntud oma töödega K-teooria alalt ja Atiyah-Singeri indeksiteoreemiga; sai 1966. a Fieldsi preemia.

variant võrdub nulliga, kui muutkonna dimensioon rahuldab tingimust $n \neq 2^k - 2$. Järgnev areng tõstis esile küsimuse, milliste dimensioonide korral leidub taglasmuutkond, mille Kervaire'i invariant on nullist erinev. Küsimust hakati nimetama *Kervaire'i invariandi probleemiks*. Seda probleemi peetakse oluliseks algebralise topoloogia ja nüüdisaegse muutkondade geomeetria valdkonnas. Artiklis [2] näitasid M. G. Barratt, J. D. S. Jones ja M. E. Mahowald, et dimensioonides $n = 2^k - 2$, kus $k = 2, 3, 4, 5, 6$, st $n = 2, 6, 14, 30, 62$, eksisteerivad taglasmuutkonnad nullist erineva Kervaire'i invariandiga.

2009. aastal toimus oluline läbimurre Kervaire'i probleemi lahendamises. Michael Hopkins, Michael Hill ja Douglas Ravenel [5] näitasid, et kui taglasmuutkonna dimensioon $n > 126$ $(k > 7)$, siis Kervaire'i invariant on 0, st dimensioonides $n > 126$ ei eksisteeri muutkondi nullist erineva Kervaire'i invariandiga. Seega Kervaire'i invariandi probleem jääb lahtiseks vaid dimensioonis $n = 126$. Kui eksperdid kinnitavad, et probleemi lahendus on täielik ja korrektne, siis eespool mainitud matemaatikute tulemus paneb peaaegu punkti *eksootiliste* kõrgema dimensiooniga sfääride klassifikatsioonile. Kervaire'i probleem oli põhitakistuseks mitmemõõtmeliste ruumide geomeetria ja topoloogia uurimisel. On tõenäone, et selle probleemi lahendus avaldab mõju sellise teoreetilise füüsika valdkonna nagu *stringiteooria* arengule.

Käesoleva artikli eesmärk on selgitada Kervaire'i invariandi mõistet, kasutades topoloogilise diferentseeruva ja taglasmuutkonna ning Arfi invariandi mõisteid.

Topoloogiline muutkond

Selgitame topoloogilise muutkonnaga seotud mõisteid.

Topoloogilist ruumi M nimetatakse *n-mõõtmeliseks topoloogiliseks muutkonnaks* ehk *topoloogiliseks n-muutkonnaks*, kui ta rahuldab järgmist kolme tingimust:

i) M on Hausdorffi ruum;

ii) ruumis M leidub loenduv baas (teine Hausdorffi loenduvusaksioom);

iii) M on lokaalselt eukleidiline ruum, st suvalise punkti $x \in M$ korral leidub selle punkti ümbrus, mis on homöomorfne ruumi $\mathbb{R}^n$ lahtise hulgaga.

Arvu n nimetatakse muutkonna M *dimensiooniks* ja seda tähistatakse $\dim M = n$.

Muutkonna definitsiooni kolmas tingimus on samaväärne sellega, et suvalise punkti $x \in M$ korral leiduvad selle punkti ümbrus $U \subset M$, ruumi $\mathbb{R}^n$ lahtine hulk $U' \subset \mathbb{R}^n$ ja homöomorfism $\phi : U \longrightarrow U'$. Paari (U, ϕ) nimetatakse n-muutkonna M kas *lokaalseks kaardiks* või *lokaalseks koordinaatsüsteemiks*. Kui $q \in U$, siis arve $x^1(q)$, $x^2(q), \ldots, x^n(q)$, mis on määratud valemiga

$$\phi(q) = (x^1(q),\, x^2(q), \ldots,\, x^n(q)),$$

nimetatakse punkti q *koordinaatideks* (lokaalses koordinaatsüsteemis (U, ϕ)). On ilmne, et punkti q i-s koordinaat $x^i(q)$ on punkti q *pidev funktsioon* ja funktsiooni $x^i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ nimetatakse *i-ndaks koordinaatfunktsiooniks*.

Defineerime ruumi $\mathbb{R}^n$ kaks alamruumi H^n ja ∂H^n järgmiselt:

$$H^n = \{\, x = (x^1,\, x^2, \ldots,\, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n \geq 0 \,\}. \tag{1}$$

$$\partial H^n = \{\, x = (x^1,\, x^2, \ldots,\, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n = 0 \,\}. \tag{2}$$

On ilmne, et $H^n \setminus \partial H^n$ on n-muutkond, kuna suvalise punkti $p \in H^n \setminus \partial H^n$ korral leidub selle punkti ümbrus, mis on homöomorfne ruumi $\mathbb{R}^n$ lahtise hulgaga. Analoogiliselt ∂H^n on ruumiga $\mathbb{R}^{n-1}$ homöomorfne $(n-1)$-muutkond. Muutkonda ∂H^n nimetatakse alamruumi H^n *rajaks*.

Topoloogilist ruumi M nimetatakse *rajaga n-muutkonnaks*, kui ta rahuldab kolme tingimust:

i) M on Hausdorffi ruum;

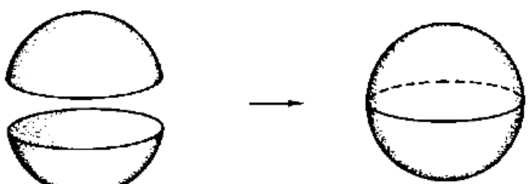
ii) leidub M lahtise topoloogia loenduv baas;

iii) suvalise punkti $p \in M$ korral leidub selle punkti ümbrus U ja homöomorfism $\phi : U \longrightarrow U'$, mis rahuldavad ühte järgmistest tingimustest:

- (a) $\phi(p) \in U'$, kus $U' \subset H^n \setminus \partial H^n$;
- (b) $\phi(p) \in U' \bigcap \partial H^n$, kus $U' \subset H^n$.

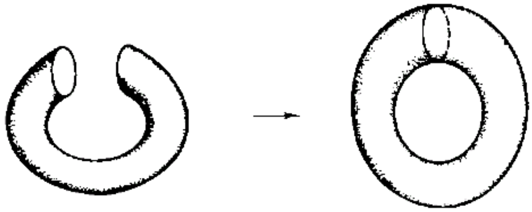
Rajaga muutkondi kasutatakse uute muutkondade konstrueerimiseks *kokkukleepimise* protseduuri abil. Oletame, et M ja N on rajaga n-muutkonnad, kusjuures nende muutkondade rajad ∂M ja ∂N on sidusad ning omavahel homöomorfsed, st leidub homöomorfism $\phi : \partial M \longrightarrow \partial N$. Kahte punkti $p \in M$ ja $q \in N$ nimetatakse *ekvivalentseteks* ning tähistatakse $p \sim q$, kui $p \in \partial M$, $q \in \partial N$ ning $q = \phi(p)$. Muutkondade M ja N *sidusaks summaks* nimetatakse topoloogilist ruumi $(M \bigcup N)/_{\sim}$ (faktorruumi topoloogiaga) ja seda tähistatakse $M \sharp N$. On võimalik näidata, et $M \sharp N$ on n-muutkond (ilma rajata). Piltlikult öeldes, muutkonnad M ja N *kleebiti* kokku – punkt p samastati punktiga $q = \phi(p)$ ehk need punktid *kleebiti* kokku.

Näitame, kuidas kokkukleepimist saab rakendada uute 2-muutkondade konstrueerimiseks. Kahe poolsfääri sidus summa on sfäär (vt joonis 1).



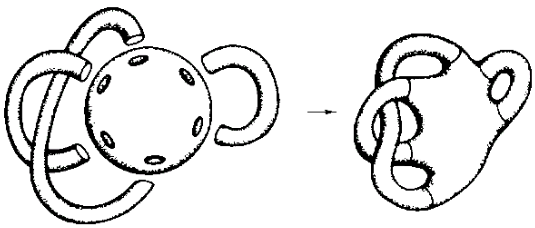
Joonis 1: Kahe poolsfääri kokkukleepimisel saadakse sfäär.

Analoogiliselt silindri otsade kokkukleepimine annab toori T^2 (vt joonis 2).



Joonis 2: Toru (silindri) otsade kokkukleepimisel saadakse toor.

Üldistades eespool kirjeldatud konstruktsioone, võib aukudega sfääri külge kleepida silindreid, nagu on näidatud joonisel 3, saadakse nn *sangadega sfäär*.



Joonis 3: Sangadega sfäär.

Seega, kui on antud 2-muutkond M, võime konstrueerida uue muutkonna, lõigates muutkonnast M välja kaks ketast nii, et muutkond M muutub rajaga muutkonnaks M', kusjuures saadud muutkonna raja on kahe ringjoone ühend, ja seejärel kleepides selle muutkonna külge 2 silindrit, samastades silindri raja moodustavate ringjoonte punktid muutkonna M' raja vastavate punktidega.

Topoloogilised invariandid

Diferentseeruvaks struktuuriks või C^∞-*struktuuriks* (ka *siledaks struktuuriks*) topoloogilisel n-muutkonnal M nimetatakse lokaalsete kaartide kogumit $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, mille korral on täidetud järgmised tingimused:

i) $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$, st $\{U_\alpha\}$ on muutkonna M kate;

ii) iga α ja β korral on lokaalsed kaardid (U_α, ϕ_α) ja (U_β, ϕ_β) C^∞-kooskõlalised;

iii) kui (V, ψ) on topoloogilise muutkonna M lokaalne kaart, mis on C^∞-kooskõlaline kogumi $\mathcal{U}$ iga kaardiga, siis $(V, \psi) \in \mathcal{U}$.

Topoloogilist n-muutkonda M sellel määratud diferentseeruva struktuuriga $\mathcal{U}$ nimetatakse *diferentseeruvaks (siledaks) n-muutkonnaks.*

Seoses toodud definitsiooniga kerkib üles rida küsimusi. Kas leidub topoloogiline muutkond, millel ei ole võimalik konstrueerida diferentseeruvat struktuuri selle muutkonna lokaalsete kaartide abil? Teiste sõnadega, kas leidub selline topoloogiline muutkond, millel ei eksisteeri ühtegi diferentseeruvat struktuuri? Samuti tekib küsimus, kas on võimalik, et topoloogilisel muutkonnal leidub mitu mitteekvivalentset diferentseeruvat struktuuri. Need küsimused on tähtsad ja fundamentaalsed ning vastav uurimisvaldkond on aktuaalne ja kiiresti arenev suund uueaegses matemaatikas.

Mainime, et pikka aega arvati, et topoloogilisel muutkonnal eksisteerib ainult üks diferentseeruv struktuur (difeomorfismi täpsusega). Suureks üllatuseks oli 1956. aastal ilmunud J. W. Milnori artikkel [7], milles näidati, et sfääril $\mathbb{S}^7$ eksisteerib mitu erinevat (mitteekvivalentset) diferentseeruvat struktuuri. Seetõttu hakati sfääri $\mathbb{S}^7$ nimetama *eksootiliseks sfääriks.* Hiljem M. A. Kervaire ja J. W. Milnor tegid kindlaks, kui palju on mitteekvivalentseid diferentseeruvaid struktuure sfääridel dimensioonidega 5 kuni 16. Tulemused on esitatud järgnevas tabelis, kus n tähistab sfääri dimensiooni ja m mitteekvivalentsete diferentseeruvate struktuuride arvu sfääril $\mathbb{S}^n$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m	1	1	1	?	1	1	28	2	8	6

n	11	12	13	14	15	16
m	992	1	3	2	16256	1

Kervair konstrueeris topoloogilise muutkonna dimensiooniga 10, millel ei eksisteeri ühtegi diferentseeruvat struktuuri. Huvitav on mainida, et, kui $n \neq 4$, siis eukleidilisel ruumil $\mathbb{R}^n$ on olemas ainult kanooniline (harilik) diferentseeruv struktuur, kuid $n = 4$ korral eksisteerivad ka teised, kanoonilise struktuuriga mitteekvivalentsed struktuurid ja neid nimetatakse *eksootilisteks defirentseeruvateks struktuurideks*. Eksootilise diferentseeruva struktuuri olemasolu neljamõõtmelisel ruumil $\mathbb{R}^4$ järeldub S. DONALDSONi teoreemidest [4]. See avastus oli suureks üllatuseks.

Diferentseeruvat kujutust $F : N \longrightarrow M$, kus N ja M on diferentseeruvad muutkonnad, nimetatakse *immersiooniks*, kui $\operatorname{rank} F = n = \dim N$. Diferentseeruvat kujutust $F : N \longrightarrow M$ nimetatakse *submersiooniks*, kui $\operatorname{rank} F = m = \dim M$. Kui F on injektiivne immersioon, mille abil kujutis $\tilde{N} = F(N) \subset M$ on varustatud topoloogiaga (mille suhtes F on homöomorfism) ja diferentseeruva struktuuriga (mille suhtes F on difeomorfism), siis kujutist $\tilde{N} \subset M$ nimetatakse muutkonna M *alammuutkonnaks* või immersiooni F poolt *tekitatud alammuutkonnaks.*

Kujutust $F : N \longrightarrow M$, kus N ja M on diferentseeruvad muutkonnad, nimetatakse *sisestuseks*, kui

i) F on injektiivne immersioon,

ii) $F : N \longrightarrow F(N) = \tilde{N} \subset M$ on homöomorfism, kus $\tilde{N}$ topoloogia on muutkonna M topoloogilise alamruumi topoloogia. $\tilde{N} \subset M$ nimetatakse muutkonna M sisestatud alammuutkonnaks.

Olgu M sile n-mõõtmeline muutkond ja $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ selle muutkonna sisestus ruumi $\mathbb{R}^{n+k}$. On ilmne, et $F(M) \subset \mathbb{R}^{n+k}$ on ruumi $\mathbb{R}^{n+k}$ sisestatud alammuutkond. Selle alammuutkonna igas punktis on määratud puutujaruumi ortogonaaltäiend, mille dimensioon on k. Seega alammuutkonnal on määratud k-mõõtmeline vektorkihtkond, mida nimetatakse *normaalkihtkonnaks.* Normaalkihtkonna trivialisatsiooni nimetatakse muutkonna M *taglastuseks*, siledat muutkonda M koos temal määratud taglastusega aga *taglas-*

muutkonnaks. Mainime, et ühele ja samale muutkonna sisestusele võivad vastata erinevad taglastused. Taglasmuutkonna mõiste võttis kasutusele L. PONTRJAGIN 1937. aastal.

Topoloogiliste muutkondade teoorias on keskseks probleemiks muutkondade klassifitseerimine homöomorfismi täpsusega, st kaht muutkonda loetakse *ekvivalentseteks*, kui nad on homöomorfsed. Topoloogiliste muutkondade klassifitseerimiseks kasutatakse *topoloogilisi invariante.* Muutkonna topoloogiliseks invariandiks võib olla arv (Euleri karakteristik, Betti arvud), rühm (fundamentaalrühm, homoloogiarühm, kohomoloogiarühm), polünoom (Jones'i sõlmede polünoomid, neljamõõtmeliste muutkondade Donaldsoni polünoomid). Arvu, rühma, polünoomi nimetatakse muutkonna topoloogiliseks invariandiks, kui homöomorfsete muutkondade korral vastavad arvud on võrdsed, rühmad on isomorfsed ja polünoomid on võrdsed.

Sageli on topoloogilise muutkonna invariant kas ruutvorm või bilineaarne vorm selle muutkonna homoloogiarühmal. Seetõttu topoloogiliste invariantide teooria on tihedalt seotud algebraliste vormide teooriaga, kusjuures korpuseks on mitte reaalarvude korpus, vaid teatud tüüpi täisarvude korpus. Üheks selliseks väga tähtsaks invariandiks on *Kervaire'i invariant.* Kervaire'i invariandi mõiste tugineb mittesingulaarse ruutvormi *Arfi invariandile.* Meenutame, et $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/\text{mod}\,2 = \{0, 1\}$ on korpus kahe elemendiga. On teada, et isomorfismi täpsusega on täpselt kaks mittesingulaarset ruutvormi üle $\mathbb{Z}_2$. Need on

$$\begin{aligned} A(x, y) &= x^2 + xy + y^2, \\ B(x, y) &= xy, \end{aligned}$$

kus $x, y \in \mathbb{Z}_2$. On võimalik tõestada, et iga mittesingulaarne ruutvorm üle korpuse $\mathbb{Z}_2$ on isomorfne eespool mainitud vormide A ja B ortogonaalsummaga $A^m + B^n$, kus m ja n on täisarvud. Arvu $m\,(\text{mod}\,2)$ väärtust nimetatakse ruutvormi Arfi invariandiks.

Olgu M kompaktne, sidus $2k$-mõõtmeline muutkond rajaga ∂M, kusjuures selle muutkonna ja tema raja homoloogiarühmade poolt indutseeritud homomorfismid on triviaalsed. Muutkonna M lõikevorm

$$\beta : H_k(M;\mathbb{Z}_2) \times H_k(M;\mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$$

on mittesingulaarne bilineaarvorm ([1]). Bilineaarvorm β indutseerib ruutvormi $\mu : H_k(M;\mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$, mis rahuldab tingimust

$$\mu(x+y)+\mu(x)+\mu(y) \equiv \beta(x,\,y) \pmod 2 \;\; \forall\, x,\,y \in H_k(M;\mathbb{Z}_2).$$

Olgu $\{x,\,y\}$ ruumi $H_k(M;\mathbb{Z}_2)$ kahemõõtmeline alamruum, nii et $\beta(x,\,y)=1$. Kuna korpuseks on kaheelemendiline korpus $\mathbb{Z}_2$, siis on kaks võimalust: kas kõikide liidetavate $\mu(x+y)$, $\mu(x)$, $\mu(y)$ väärtus on 1 või ühe liidetava väärtus on 1 ning ülejäänud on 0. Esimesel juhul tähistame vastavat kahemõõtmelist alamruumi $H^{1,1}$ ja teisel juhul $H^{0,0}$. Muutkondade teoorias näidatakse, et homoloogiarühma $H_k(M;\mathbb{Z}_2)$ on võimalik esitada alamruumide otsesummana S, kus iga alamruum on isomorfne kas ruumiga $H^{0,0}$ või ruumiga $H^{1,1}$. *Arfi invariandiks* $\mathrm{Arf}(H_k(M;\mathbb{Z}_2);\,\mu)$ nimetatakse arvu

$$(\text{alamruumide } H^{1,1} \text{ arv otsesummas } S)/\mathrm{mod}\,2 \in \mathbb{Z}_2.$$

Olgu M sile $(4k+2)$-mõõtmeline taglasmuutkond, $H_{2k+1}(M;\mathbb{Z}_2)$ selle muutkonna keskmine homoloogiarühm, $\beta : H_{2k+1}(M;\mathbb{Z}_2) \times H_{2k+1}(M;\mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ muutkonna M lõikevorm ja $\mu : H_{2k+1}(M;\mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ selle lõikevormi poolt tekitatud ruutvorm. Mainime, et μ sõltub muutkonna M taglastusest. Taglasmuutkonna M *Kervaire'i invariandiks* nimetatakse ruutvormi μ Arfi invarianti.

Kirjandus

[1] Abramov, V. *Poincaré hüpotees.* Eesti Matemaatika Seltsi Aastaraamat 2001, Eesti Matemaatika Selts, Tartu, 2003, 56–68.

[2] Barratt, M. G., Jones, J. D. S., Mahowald, M. E. *Relations amongst Toda brackets and the Kervaire invariant in dimension 62.* J. London Math. Soc. (2) **30** (3) (1984), 533–550.

[3] Browder, W. *The Kervaire invariant of framed manifolds and its generalization.* Ann. of Math. **90** (1969), 157–186.

[4] Donaldson, S. *An Application of Gauge Theory to the topology of 4-manifolds.* J. Diff. Geom. **18** (1983), 269–316.

[5] Hill, M., Hopkins, M., Ravenel, D. *On the non-existence of elements of Kervaire invariant one.* (2009), arXiv:0908.3724v1.

[6] Kervaire, M. *A manifold which does not admit any differentiable structure.* Comm. Math. Helv. **34** (1960), 257–270.

[7] Milnor, J. W. *Morse Theory.* Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press, Princeton, **51** (1963).