Dekompositsiooni-koordinatsiooni meetoditest multikriteriaalses optimeerimises

Otu Vaarmann
Tallinna Tehnikaülikool

Sissejuhatus

Lähenemisviis, mille korral elust võetud praktilise iseloomuga ülesanne teisendatakse (esitatakse, modelleeritakse) matemaatilise optimeerimise ülesandena, on iseloomulik uurimisvaldkondadele, mis paiknevad majandusteaduse, matemaatika ja inseneriteaduse ristteedel. Siinjuures nõuded optimeerimisalgoritmidele ja -meetoditele kasvavad jõudsasti, et lahendada üha keerukamaid ülesandeid, millistega tuli kokku puutuda minevikus. Paljud ülesanded majanduses, äris, rahanduses ja inseneriasjanduses on multikriteriaalse iseloomuga ja paljumõõtmelised (sadade ja tuhandete muutujatega), mis teevad lahendamise keerukaks või ülikeerukaks.

Matemaatikale on iseloomulik lähenemisviis, et kui esialgset ülesannet ei osata lahendada või otserünnak tundub üle jõu käiv, siis asendatakse esialgne ülesanne mingis mõttes ligilähedase ülesandega või lihtsamate ülesannete jadaga, mida juba suudetakse lahendada ja sellega toime tulla. Osutub, et nii tegutsedes saadakse sageli rahuldav või isegi küllalt hea lähend esialgsele ülesandele. Kuna

Eesti Matemaatika Selts Aastaraamat 2009

mitme sihifunktsiooniga (vektorkriteeriumiga) ülesanne on reeglina raskusastme võrra keerukam kui ühe sihifunktsiooniga ülesanne, siis kasutame kirjeldatud lahendusmoodust edaspidigi. On mitmesuguseid viise ja võtteid, kuidas multikriteriaalne ülesanne teisendada monokriteriaalseks. Üks küllaltki vana, aga ka levinum ja tõhus, on nn kaalumeetod (inglise keeles *scalarization or weighting method*), millele me edaspidises käsitluses toetumegi. Sellise lähenemisviisi korral on eesmärk leida Pareto optimaalne punkt osa- või alamülesannete sihifunktsioonide väärtustele, kus argument x kuulub mingisse eukleidilisse või Hilberti ruumi. Kuigi parameetrite (muutujate) ruum on ühine kõigi sihifunktsioonide $f^1(x), \ldots, f^n(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ puhul, on reeglina nende funktsioonide optimaalsed punktid erinevad. Seetõttu tuleb leida mingi kompromisspunkt parameetrite ruumis. Kaalumeetodi aluseks oleva idee põhjal tuleb iga sihifunktsiooniga seostada üks kaalukoefitsient (st igale sihifunktsioonile omistatakse mingi reaalarvuline väärtus (kaal)) ja seejärel saadud summa optimeeritakse. Teisisõnu, mitme sihifunktsiooniga ülesanne asendatakse uue, monokriteriaalse ülesandega $\Psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f^i$, kus suurused $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ kujutavad endast mittenegatiivseid kordajaid, mis rahuldavad teatud tingimusi. Reaalelulistes ülesannetes kaalukoefitsientide väärtused väljendavad ühe või teise kriteeriumi (tunnuse) suhtelist osakaalu (tähtsust) summas ja võivad olla küllaltki ebamäärased ja/või subjektiivse iseloomuga, väljendades üksiktunnuse esinemissagedust (tõenäosust), ühe või teise tunnuse mõõtmisel (arvutamisel) kasutatud mõõtmistäpsusel (arvutamistäpsusel) põhinevat tunnuse väärtuse usaldusväärsuse hinnangut, kokkuleppeid asjaosalisi huvitavate vastandlike eesmärkide suhteliste kaalukuste suhtes jne. Kuigi kaalumeetodil on mitmeid tõsiseid puudusi, on sellel ka üks oluline väärtomadus: küllalt üldistel eeldustel saab näidata, et kaalumeetodi rakendamisel on *Pareto optimaalsus* garanteeritud [1].

Definitsioon. Punkti x nimetatakse *Pareto optimaalseks* ehk *efektiivseks*, kui ei leidu ühtegi teist sellist punkti y, mis muudaks vähemalt ühe sihifunktsiooni väärtuse paremaks kui punktis x, ilma et ülejäänud sihifunktsioonide väärtused muutuksid halvemaks kui punktis x.

Kõigi Pareto optimaalsete punktide hulka nimetatakse *Pareto piirkonnaks* ja reeglina sisaldab see ka iga üksiku sihifunktsiooni optimumpunkti.

Paljumõõtmeliste ülesannete, nii optimaalsete kui ka Pareto optimaalsete punktide arvutamine lihtsustub, kui esialgset suurt ülesannet õnnestub dekomponeerida (tükeldada) väiksemateks ja lihtsamateks ülesanneteks ja lahendada seejärel need kui üks kogum koordineeritud (harmoniseeritud) alamülesandeid. Aeronautikas, elektri- ja inseneriasjanduses on hulganisti suure arvutusmahuga ülesandeid, mida õnnestub lahendada vaid juhul, kui kasutada nende spetsiifilist struktuuri. Üheks mooduseks, kuidas esialgne suur ja keerukas ülesanne tükeldada väiksemateks ja kergemini käsiteldavateks alamülesanneteks ning rakendada hierarhilist lahendusviisi, on kasutada dekompositsiooni-koordinatsiooni meetodit ja selle arvutusskeemi [2–5]. Sel korral dekompositsioon tehakse ülesandesse abisuuruste nn koordinatsiooniparameetrite sissetoomise kaudu, mis aga toob endaga kaasa vajaduse harmoniseerida alamülesannete lahendid selliselt, et optimaalne või efektiivne lahend esialgsele globaalsele ülesandele oleks garanteeritud. Saab näidata, et teatud tingimuste täidetuse korral paljudel juhtudel see nõue on täidetud. Lähemalt probleemi, millistel juhtudel alamülesannete lahendid genereerivad tervikülesande lahendi, me siin ei analüüsi, sest see on tundlik ja laiaulatuslik teema, mis nõuab eraldi käsitlust. Dekompositsioonil-koordinatsioonil põhineva lahendusviisi korral tekib vähemalt kahetasandiline hiearhia: koordinaator (isand, meister, peremees) ja allüksused (orjad, sellid, alamad). Sellist lahendusviisi peetakse eriti otstarbekaks siis, kui koordinaatoril puudub piisavalt täielik ülevaade terviksüsteemi funktsioneerimisest ja käitumisest. Dekomponeeritavus on teatud liiki organiseeritud hõredus, mis võimaldab ülesande muutujaid jaotada rühmadesse nii, et enamus muutujaid on vastastikuses koosmõjus ainult oma rühma (alamsüsteemi) liikmetega. Siis on võimalik esmane ülesanne lahendada hierarhiliselt: kõrgemal tasandil (nivool) antakse (määratakse) väärtusi väiksemale muutujate hulgale, mis on ühised kõigile rühmadele (selliseid muutujaid nimetatakse koordinatsiooniparameetriteks); madalamal nivool lahendatakse iseseisvalt (sõltumatult teistest alamsüsteemidest) iga koordineeritud, s.o kõrgemal nivool fikseeritud koordinatsiooniparameetri väärtusega alamülesanne nende muutujate suhtes, mis interakteeruvad ainult rühmasiseselt. Seetõttu on mitmenivooline lahendusviis üks potentsiaalne moodus, kuidas vähendada tervikülesande lahendamiseks kuluvat arvutiaega uueaegsetel arvutitel ja arvutivõrkudel, sest selline lahendusviis võimaldab organiseerida paralleelarvutusi, kuid mitte küll arvutustöö mahtu, mis reeglina võib suureneda ja tavaliselt ka suureneb. Sobivate koordinatsiooniparameetrite väärtuste arvutamine kumerate planeerimisülesannete korral viib sageli kas mingi ühe sihifunktsiooniga abiülesande või mittelineaarse võrrandisüsteemi $F(x) = 0$ lahendamiseni. Neil ülesannetel on hulganisti iseäraseid omadusi:

- arvutaja (tarbija) käsutuses on ainult funktsiooni väärtused;
- funktsiooni väärtuste arvutamine seisneb peamiselt alamülesannete lahendamises, millega kaasneb reeglina suur arvutusmaht;
- võrrandisüsteemi defineerivad funktsioonid ei tarvitse olla diferentseeruvad, nad võivad olla ka mittesiledad või tükati siledad.

Pealegi võib lisaks võrrandisüsteem $F(x) = 0$ osutuda mittekorrektseks. Üheks dekompositsiooni-koordinatsiooni meetodite liigitus põhineb lubatavate lahendite või mittelubatavate lahendite arvutamisel. Viimase juhul hoolitsetakse selle eest, et vähemalt lahendpunktis oleks kitsendusnõuded täidetud ja sel korral on võimalik kasutada duaalsusteooria tulemusi.

Mittelubatavate lahendite arvutamisel põhinev lahendusskeem

Kui kasutada mittelubatavatel lahenditel põhinevat arvutusskeemi, siis esialgse minimeerimise ülesande lahend leitakse selle duaalülesande maksimeerimise teel Lagrange'i kordajate ruumis ja koordinatsiooniparameetrite rollis on duaalmuutujad. Duaalse funktsiooni maksimumi statsionaarsuse tingimuse kaudu jõuamegi mittelineaarse võrrandisüsteemini, mille lahendamine on üheks võtmeküsimuseks dekompositsiooni-koordinatsiooni ülesannetes. Et demonstreerida mittelubatavatel lahenditel põhinevat lahendusskeemi, võtame vaatluse alla ühe formaalse süsteemi, mis koosneb N ($N \geq 2$) omavahel seoses olevast alamsüsteemist, kusjuures alamsüsteemid jagavad samu ressursse, kuid neil on oma huvid ja eesmärgid, mis võivad olla vastuolulised nii üksiku alamsüsteemi siseselt kui ka teiste alamsüsteemide püüdluste ja eesmärkidega.

Koosnegu vaatlusalune süsteem N ($N \geqslant 2$) omavahel ühendatud alamsüsteemist S_i, $i = 1, \ldots, N$, kus igaühel võib olla mitu toimimise eesmärki (sihifunktsiooni). Tähistagu $\mathbf{m}_i \in \mathbb{R}^{n_{m_i}}$ alamsüsteemi S_i otsustuste (juhttoime) vektorit, $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^{n_{y_i}}$ selle alamsüsteemi väljundvektorit ja $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n_{x_i}}$ sisendvektorit. Vektorid $\mathbf{x}_i$ ja $\mathbf{y}_i$ genereerivad ühendused ja seosed alamsüsteemi sees. Vektor $\mathbf{k}_i^T = (\mathbf{x}_i^T, \mathbf{m}_i^T, \mathbf{y}_i^T)$ kirjeldab alamsüsteemi dimensiooniga $n_{k_i} = n_{x_i} + n_{m_i} + n_{y_i}$ ja vektor $\mathbf{k}^T = (\mathbf{k}_1^T, \mathbf{k}_2^T, \ldots, \mathbf{k}_N^T)$ kujutab endast ühendvektorit (liitvektorit) iseloomustamaks kogu terviksüsteemi dimensiooniga $n_k = \sum_{i=1}^N n_{k_i}$. Kui $\mathbf{f}^i = (f_1^i, f_2^i, \ldots, f_{n_i}^i)^T$ tähistab i-nda alamsüsteemi sihifunktsioonide vektorit ja $\mathbf{f}^T = ((\mathbf{f}^1)^T, (\mathbf{f}^2)^T, \ldots, (\mathbf{f}^N)^T)^T$ tähistab sihifunktsioonide vektorit kogu süsteemile dimensiooniga $n = \sum_{i=1}^N n_i$, siis terviksüsteemile vastavat mitme sihifunktsiooniga matemaatilise planeerimise ülesannet saab esitada järgmiselt:

$$\text{minimize} \begin{bmatrix} \mathbf{f}^1(\mathbf{k}_1) \\ \mathbf{f}^2(\mathbf{k}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{f}^N(\mathbf{k}_N) \end{bmatrix} \tag{1}$$

kõrvaltingimustel

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{A}_i(\boldsymbol{x}_i, \mathbf{m}_i), \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{2}$$

$$\mathbf{g}_i(\mathbf{k}_i) \leqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{x}_i = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{C}_{ij}\mathbf{y}_j, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{4}$$

Võrrandid (4) esitavad seoseid ja ühendusi iga alamsüsteemi sees, aga osutavad ka sellele, et alamsüsteemi sisendvektor kujutab endast lineaarkombinatsiooni kõigi N alamsüsteemi väljunditest. Sageli seoste maatriks $\mathbf{C}_{ij}$ on konstantne maatriks elementidega 0 või 1, kus 1 viitab seose olemasolule. Seosed (2) ja (3) väljendavad iga alamsüsteemi kohta käivaid võrrandite ja võrratuste süsteemi, mis toimivad kitsendustena. Edaspidi eeldame, et funktsioonid $\mathbf{f}^i$ ja $\mathbf{g}_i$ on kumerad ja pidevalt diferentseeruvad ning funktsioonid $\mathbf{A}_i$ on lineaarsed.

Vastavalt kaalumeetodi ideele lahendamaks mitme sihifunktsiooniga optimeerimisülesandeid on vektorfunktsioon $[(\mathbf{f}^1)^T, (\mathbf{f}^2)^T, \ldots, (\mathbf{f}^N)^T]^T$ seostes (1)–(4) asendatud alamülesannete sihifunktsioonide summaga $\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{\omega}^i)^T\mathbf{f}^i(\mathbf{k}_i)$, kus vektor $(\boldsymbol{\omega}^i)^T = (\omega_1^i, \omega_2^i, \ldots, \omega_{n_i}^i) \geqslant 0$ esitab sihifunktsioonidele $\mathbf{f}^i$, $i = 1, \ldots, N$ omistatud kaalukoefitsiente. Eeldusel, et on täidetud kitsenduste kohta käivad teatud kvalifikatsioonitingimused kõrvaldamaks kitsenduste hulga võimalikke patoloogilisi omadusi, saab kaalutud ülesande kitsenduste (4) suhtes määratud duaalse ülesande kirja panna kujul

$$\Phi(\boldsymbol{\lambda}) = \min_{k \in \prod_{i=1}^{N} \mathfrak{X}_i} \sum_{i=1}^{N} \left[(\boldsymbol{\omega}^i)^T\mathbf{f}^i(\mathbf{k}_i) + (\boldsymbol{\lambda}^i)^T \left(\mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^{N} \mathbf{C}_{ij}\mathbf{y}_j \right) \right], \tag{5}$$

kus

$$\mathfrak{X}_i = \left\{ \mathbf{k}_i^T = (\mathbf{x}_i^T, \mathbf{m}_i^T, \mathbf{y}_i^T) \mid \ \mathbf{y}_i = \mathbf{A}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{m}_i), \ \mathbf{g}(\mathbf{k}_i) \leqslant 0 \right\}$$

$(i = 1, 2, \ldots, N)$ ning

$$\boldsymbol{\lambda} = ((\boldsymbol{\lambda}^1)^T, (\boldsymbol{\lambda}^2)^T, \ldots, (\boldsymbol{\lambda}^N)^T)^T \ \text{ja} \ \boldsymbol{\lambda}^i = (\lambda_1^i, \lambda_2^i, \ldots, \lambda_{n_{x_i}}^i)^T$$

kujutavad endast kitsendustega (4) assotsieeruvaid duaalmuutujaid.

Mis puutub kitsenduste kvalifikatsioonitingimustesse, siis võib siin kasutada näiteks lineaarse sõltumatuse nõuet. Raamatus [6] on märgitud, et kui vähemalt üks funktsioon on rangelt kumer, siis Φ on diferentsieeruv punktis $\bar{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbb{R}^{nx}$ ja selle gradient on

$$\nabla\Phi(\bar{\boldsymbol{\lambda}}) = \begin{pmatrix} \left(\mathbf{x}_1(\bar{\boldsymbol{\lambda}}) - \sum_{j=1}^{N} \mathbf{C}_{1j}\mathbf{y}_j(\bar{\boldsymbol{\lambda}})\right)^T \\ \vdots \\ \left(\mathbf{x}_N(\bar{\boldsymbol{\lambda}}) - \sum_{j=1}^{N} \mathbf{C}_{Nj}\mathbf{y}_j(\bar{\boldsymbol{\lambda}})\right)^T \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Korrutades ja jagades avaldist (5) suurusega $\mu_i = \sum_{j=1}^{N} \omega_j^i$, $i = 1, \ldots, N$, võtab seal esinevate teiste liidetavate summa kuju

$$\sum_{i=1}^{N} \left[(\boldsymbol{\lambda}^i)^T \left(\mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^{N} \mathbf{C}_{ij}\mathbf{y}_j \right) \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left[\sum_{j=1}^{n_i} \omega_j^i \left(\frac{1}{\mu_i} (\boldsymbol{\lambda}^i)^T \mathbf{x}_i - \sum_{l=1}^{N} \frac{1}{\mu_i} (\boldsymbol{\lambda}^l)^T \mathbf{C}_{li}\mathbf{y}_i \right) \right], \tag{7}$$

milles vektori $\boldsymbol{\lambda}$ komponente võib vaadelda koordinatsiooniparameetritena, mis fikseeritakse (määratakse) ülemisel nivool, ütleme $\boldsymbol{\lambda} = \bar{\boldsymbol{\lambda}}$. Selline teguviis võimaldab globaalse tervikülesande (5) tükeldada N sõltumatuks alamülesandeks, millest igaüks vastab ühele kindlale alamsüsteemile N alamsüsteemist koosnevas hulgas, s.o i-nda alamsüsteemi uus sihifunktsioon $\tilde{f}^i$ on saadud liikme

$$T^i = 1/\mu_i \cdot (\bar{\boldsymbol{\lambda}}^i)^T \mathbf{x}_i - \sum_{l=1}^{N} 1/\mu_i \cdot (\bar{\boldsymbol{\lambda}}^l)^T \mathbf{C}_{li}\mathbf{y}_i$$

lisamise teel endise sihifunktsiooni igale komponendile.

Vektori $\boldsymbol{\lambda}$ komponentide uued väärtused leitakse minimeerimisülesande (5) duaalülesande maksimeerimise teel, mis viib mittelineaarse võrrandisüsteemi

$$\nabla\Phi(\boldsymbol{\lambda}) = 0 \tag{8}$$

lahendamisele, juhul kui $\Phi(\boldsymbol{\lambda})$ on diferentsieeruv. Võrrandisüsteemi (8) lahendamiseks võib kasutada iteratsiooniprotsessi

$$\boldsymbol{\lambda}^{s+1} = \boldsymbol{\lambda}^s + \gamma_s d^s, \quad s = 0, 1, \ldots,$$

kus $d^s = \nabla\Phi(\boldsymbol{\lambda}^s)$ ja $\gamma_s > 0$ on sobivalt valitud sammupikkus.

Üldiselt gradient $\nabla\Phi$ võib mitte eksisteerida ja sel juhul võib kasutada meetodit

$$\boldsymbol{\lambda}^{s+1} = \max\{0, \boldsymbol{\lambda}^s + \rho_s \nabla\hat{\Phi}(\boldsymbol{\lambda}^s)\},$$

kus $\nabla\hat{\Phi}(\boldsymbol{\lambda})$ tähistab subgradienti ja ρ_s on selline, et $\rho_s \to +0$, kui $s \to \infty$ ja $\sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty$ ([5, 7]).

Esitame toodud lahenduskäiguga seoses kolm olulist probleemi, mis ei ole kirja pandud tähtsuse järjekorras.

Dekompositsiooni-koordinatsiooni üks üldine probleem ja mure on, kuidas tõhusalt arvutada koordinatsiooniparameetrite väärtusi mittelineaarsest võrrandisüsteemist, millel võivad olla väga halvad omadused.

Kui kasutada mitmenivoolisi lahendusskeeme, siis eelmisele lisandub küsimus, kuidas (milliste kriteeriumide ja algoritmide järgi) otsida ja leida sobivad kaalukoefitsientide väärtused, mille määramine sisaldab palju suva ja määramatust.

Eelnevast tuleneb kolmas probleem, mis põhineb vajadusel välja töötada töökindlaid ja arvutuslikult efektiivseid multikriteriaalse optimeerimise meetodeid ja algoritme, et töötada riski ja mittetäieliku informatsiooni tingimustes.

Lõpumärkused

Matemaatika on oluline ressurss tänapäeva kõrgtehnoloogilises ühiskonnas. Suur osa teaduslikust ja tehnoloogilisest edust põhineb matemaatilistel teooriatel või mudelitel. Üha kiirenevalt kasvav matemaatika rakendamine ei puuduta üksnes täppisteadusi ja inseneriasjandust, vaid üha laiaulatuslikumalt ka loodus- ja ühiskonnateadusi. Selles suhtes on matemaatika üks vastastikuste ja mitmekülgsete võimalustega keelekasutus probleemide sõnastamiseks ja abivahend nende lahendamiseks. Kuid matemaatika iseenesest ei ole imerelv ja -ravim maailma kõigi hädade vastu. Matemaatika võib tagant tõugata ja reklaamida nii head kui ka halba.

Täppisteaduslikus uurimisvaldkonnas on seosed põhjuse ja tagajärje vahel hästi välja selgitatud ja arusaadavad. Kõiki süsteeme, protsesse ja käitumisi saab paljudel juhtudel täielikult modelleerida, nagu näiteks betoon- ja teraskonstruktsioone sillaehituses või veetornide ehituse projekteerimisel ja ehitamisel. Pehmete uurimisvaldkondade ja erialade puhul, kus sündmuste ja protsesside oluliseks mõjutajaks on inimene, mudeldamine enam nii lihtsalt ei käi, aga vajadus selle järele on samuti suur. Suuri inimene-masin-süsteeme ei ole võimalik ohjata, juhtida ja nendega toime tulla üksnes kvalitatiivsete hinnangute ja tundmuste najal ning vahendusel. Matemaatiline modelleerimine on üks põhilisi meetodeid majandus- ja juhtimisülesannete lahendamiseks ja eeskätt just strateegilise iseloomuga otsuste langetamisel. Nii nagu füüsikal põhineb täppis- ja loodusteaduslike nähtuste ja protsesside modelleerimine, täidab samasugust funktsiooni operatsioonianalüüs majanduslike, humanitaar-sotsioloogiliste probleemide käsitlemisel. Nendesse valdkondadesse kuuluvate probleemide lahendamine nõuab nii rangelt loogilise kui ka heuristilise mõtteviisi oskuslikku rakendamist. Operatsioonianalüüsi põhieesmärk on kvantitatiivsete meetodite väljatöötamine otsusteooria tarbeks, s.o genereerida arvudes väljenduvaid hinnanguid ja karakteristikuid uuritava nähtuse või protsessi kohta, mis hõlbustavad otsuse langetamist sihipärase inimtegevuse valdkondades. Teisisõnu, operatsioonianalüüsi iseloomustab teaduslike meetodite, eriti aga matemaatiliste ja statistiliste meetodite rakendamine otsustusteoorias. Tänapäevane majandusteadus tuginebki kahele suurele vaalale: operatsioonianalüüsile ja statistikale. Naljatamisi on öeldud, et operatsioonianalüüs kujutab endast kunsti anda halbu vastuseid küsimustele, millele võidakse teistsuguseid lahendusmeetodeid kasutades anda veelgi halvemaid vastuseid. Operatsioonianalüüs on tunginud sadade miljonite ellu logistika, võrgustike haldamise, keskkonna mõjude ja kahjude hindamise ja paljude teiste rakenduste kaudu, mis muudavad elu paremaks ja hõlpsamaks nii üksikindiviididel kui ka organisatsioonidel. Paljudel juhtudel võib operatsioonianalüüs jääda ainsaks abivahendiks, et langetada otsuseid keerulistes situatsioonides.

Seepärast on mitmetes Euroopa riikides või regioonides just pikaajalise majandusedu huvides võetud matemaatika õpetamine erilise tähelepanu alla. Näiteks on Hispaanias koostatud aastateks 2006–2011 laiahaardeline teaduslike uuringute projekt i-Math (www.i-math.org/?q=en), mille eesmärgiks on kavandada strateegilisi tegevusi matemaatika laiaulatuslikumaks kasutamiseks loodusteadustes, sotsiaalteadustes, tehnoloogiates ja äris. Tuntud loodusteadlase ja filosoofi Jakob von Uexkülli sõnul ei ole lõhe lühiajalise mõtlemise ja pikaaegsete tagajärgede vahel kunagi olnud nii suur kui praegu.

Kui kasutada mudeleid mittearukalt ja pimesi nagu matemaatikavõõraste inimeste puhul kergesti ka juhtub, võivad matemaatilised mudelid anda ebakorrektseid või isegi mõttetuid tulemusi. On äärmiselt vajalik sügavalt mõista ja tunnetada mudelite ja modeldamise piire. Näiteks majandusmatemaatilised mudelid ei tööta või töötavad väga halvasti aktsiaturgude hindamisel, sest inimeste käitumine ja emotsioonid on ettearvamatud. Mudelite abil saadud prognoosid võivad olla kaugel objektiivsusest, kui mängu sekkuvad huvigrupid ja poliitikud ning sel juhul võivad mudelitest saada mugavad viigilehed oma tegelike soovide varjamiseks ja oponentide vastuväidete ja arvamuste tõrjumiseks. Modelleerimise protsessi politiseerimine ei tarvitse alati seda protsessi nurjata, küll aga võib seda tõsiselt kahjustada või komplitseerida. Seepärast arvmudelite kasutamine suurte ja keeruliste süsteemide modelleerimisel võib osutuda raskelt teostatavaks või isegi võimatuks. Keerukate otsustusprotsesside korral langetab harva otsuse üksikisik või institutsioon, minister või valitsus, neil juhtudel on otsustusprotsess mitmetasandiline ja mitmeid erinevaid ja vastuolulisi seisukohti arvestav. Konsensusel põhinev printsiip ehk *Pareto optimaalsus* on heaks lähtekohaks ja aluseks probleemidele, mille puhul vaagimise alla kuuluvad majanduslik tõhusus, loodushoid ja sotsiaalne õiglustunne. Energia tootmise planeerimine on üks selliseid valdkondi, kus toimib vähemalt kahetasandiline hierarhia ja kus vastasmõjus on riikliku ja erasektori huvid. Seetõttu inimkäitumine ja inimvalikud mängivad siin suurt rolli.

Mudel ei asenda mõtlemist ja on äärmiselt vajalik mõista ja tunnetada mudelite ja mudeldamise piire. Rakenduslik mudeldamine tugineb nii nähtuse või protsessi olemusliku osapoole (s.o selle füüsikaliste omaduste) lihtsustustel ja mudeli enda lihtsustustel, lihtsustuste lihtsustustel jne, mida võib võrrelda püramiidskeemiga. Igakord ei tarvitse need lihtsustused olla õnnestunult valitud. Mitte ükski mudel ei jää kahjustamata ridamisi tehtud halbadest eeldustest. Siinjuures tuleb arvestada, et peamised takistused mudelite kaudu adekvaatsete tulemuste ja hinnangute saamiseks inimosalusega protsessides on tavaliselt esmajärjekorras poliitilist, mitte aga tehnilist laadi. Multikriteriaalset optimeerimist ja analüüsi iseloomustab olukordade ebamäärasus, arvamuste subjektiivsus ning vaatekohtade paljusus ja konfliktsus. Seetõttu võib erinevate lähenemisviiside ja metoodikate rakendamine andmete täpsuse ning arvamuste ja hüpoteeside korrektsuse ja usaldusväärsuse hindamisel viia väga erinevate tulemusteni ja lahendusteni. Kuigi arvmudelite tulemused väljenduvad arvudes, ei ole nende eesmärk genereerida üksnes arve, vaid paremat arusaamist vaatlusaluste nähtuste ja protsesside kohta ning seeläbi võimaldada otsusetegijatel hinnata adekvaatsemalt ja sisukamalt ühe või teise projekti küpsust ja tulukust.

Kokkuvõtlikult öeldes, matemaatilisest modelleerimisest on saanud uurimisvaldkond, mis vajab senisest laiapõhjalisemat ja jõulisemat arutelu, kriitilisust ning erinevate lähenemisviiside ühiskäsitlust määramatuse ja puuduliku informatsiooniga toimetulekuks.

Olgugi, et paljusid reaalelulisi ülesandeid saab arvutiprogrammide kaudu realiseeritavate arvmudelite abil edukalt lahendada, ei tohi paberit ja pliiatsit kergekäeliselt veel nurka visata, seda eriti keerukate, pikaajalist planeerimist ja strateegilist mõtlemist nõudvate ülesannete lahendamisel, sest selliste suure keerukusastmega ülesannete lahendamine arvmudeli abil arvutil võib osutuda mõttetuks. Paradoksaalsel kombel, kui me ei kasuta rohkelt hinnalisi arvutiressursse, vaid üksnes väikest arvutit (pihuarvutit) ja nn kvalitatiivset mudelit, mille korral ei üritata saada täpset vastust, vaid määrata suundumusi, suhtelisi mõjusid, tõenäosuslikke põhjuseid jne, võib käsiteldavat ülesannet iseloomustavale suure ebamäärasuse määrale vastava ligikaudse lahendi leida hoopiski hõlpsamini. Kõige rumalam on hästi teha seda, mida pole vaja teha.

Suurimad tänud professor Peeter Puusempale ja dotsent Alar Leibakule, kelle õhutusel ning otsesel ja vahetul kaasabil sai teoks selle kirjatöö valmimine.

Kirjandus

[1] Miettinen, K. *On the methodology of multiobjective optimization with applications.* University of Jyväskylä, 1994.

[2] Ulm, S. *Decomposition methods for the solution of optimization problems.* Tallinn, 1979. (In Russian)

[3] Lootsma, F. A. *Exploitation of structure in non-linear optimization.* In: *Parallel Computing 89*, D. J. Evans et al., eds., North-Holland, 1990, pp. 31–45.

[4] Miguel, F., Gomes, T. et al. *Hierarhical generation of Pareto optimal solutions in large-scale multiobjective systems.* Comput. Oper. Res., **29**, 2002, 1537–1558.

[5] Ermolyev, Y. M. et al. *Mathematical methods for operation research.* Kiev, 1979. (In Russian)

[6] Bazaraa, M., Sherali, H., Shetty, C. M. *Nonlinear programming. Theory and algorithms.* John Wiley & Sons, New York, 1993.

[7] Schor, N. Z. *Minimization methods for non-differentiable functions.* Springer Verlag, Berlin, 1985.

