Vähimruutude meetod matemaatilises planeerimises ja mänguteoorias

Evald Übi
Tallinna Tehnikaülikool

Kokkuvõte. Töös vaadeldakse kõrgeltarenenud vähimruutude tehnika kasutamist lineaarsete võrratuste ja võrrandite, lineaarse ja ruutplaneerimise ülesande lahendamisel. Kõigis nimetatud ülesannetes arvutatakse lineaarsete võrratuste süsteemi minimaalse normiga lahend. On toodud uus kooperatiivse mängu püstitus, mille korral tulemusvektor leitakse vähimruutude meetodiga. Kirjeldatud lahendused on illustreeritud lihtsate näidete abil.

1. Sissejuhatus

Matemaatilise planeerimise kui teadussuuna areng kiirenes oluliselt möödunud sajandi keskel, kui võeti kasutusele "valguse kiirusel" töötavad elektronarvutid. Aga vähimruutude (VR) meetodi ajalugu on oluliselt pikem, seda kasutatakse juba mitu sajandit lisaks matemaatikale ka mehaanikas, füüsikas, statistikas jne. Mittelineaarne VR ülesanne asendatakse teatud arvu lineaarsete ülesannetega, milles muutub võrrandite või tundmatute arv. Selline lähenemine on võimalik ka matemaatilises planeerimises.

Simpleksmeetodit kasutavad paljud matemaatilise planeerimise algoritmid. See meetod põhineb Gaussi teisendustel, millest tulenevalt tekivad raskused ebastabiilsete ja kidunud ülesannete kor-

Eesti Matemaatika Selts Aastaraamat 2009

ral. Lisaks selgus 1974. a, et simpleksmeetod on eksponentsiaalne. Alates 1978. a on välja töötatud mitmeid polünomiaalseid matemaatilise planeerimise algoritme, vt [7, 10].

Käesoleva töö põhieesmärk on kirjeldada lineaarse ja ruutplaneerimise ülesannete lahendamist vähimruutude meetodiga. Selleks kasutatavad ortogonaalsed teisendused on otstarbekad eriti ebastabiilsete ja kidunud ülesannete korral, samuti juhul, kui alglahend pole teada.

Töö teises osas tutvume lühidalt vähimruutude meetodiga. Põhitähelepanu on osutatud Householderi peegeldustele, mille abil on mugav lahendada vähimruutude ülesannet muutujate lisamisel või kõrvaldamisel.

Kolmandas osas kirjeldame esmalt lineaarsete võrratuste süsteemi lahendamist. Sellest ülesandest peaks algama nii lineaarne kui ka mittelineaarne planeerimine. Lineaarse planeerimise (LP) ülesanne seisneb lineaarse funktsiooni ekstreemumi arvutamises lineaarsete võrratustega määratud hulgal. Seega oleks esmalt vaja teada, kuidas lahendada lineaarsete võrratuste süsteemi, sellest lähtuvalt hakata otsima lineaarse funktsiooni ekstreemumit sellel hulgal. Tegelikult on välja kujunenud vastupidine olukord – lineaarsete võrratuste süsteemi lahend leitakse lineaarse planeerimise ülesande abil. Käesolevas töös määratakse lineaarsete võrratuste süsteemi minimaalse normiga lahend, kasutades selle jaoks koostatud vähimruutude ülesande mittenegatiivset lahendit. Ebastabiilne lineaarne võrrandisüsteem $Ax = b$ asendatakse võrratuste süsteemiga $Ax \leq b$, millele lisatakse kõikide võrrandite kokkuliitmisel saadud avaldis vastupidise võrratuse märgiga.

Neljandas osas vaadeldakse vähimruutude meetodi kasutamist lineaarses planeerimises. On kirjeldatud alglahendi leidmist etteantud sihifunktsiooni minimaalse väärtuse korral. Kui alglähend ei erine palju tegelikust miinimumist, siis võib ta osutuda optimaalseks või vähe erineda sellest.

Viiendas osas on kirjeldatud kahte meetodit rangelt kumera ruutplaneerimise ülesande lahendamiseks. Aastatel 1950–1960 ilmusid esimesed artiklid ruutplaneerimise ülesannete kohta, neis taandati see ülesanne lineaarseks Kuhn-Tuckeri tingimuste abil, vt [2]. Muutujate arv taolises ülesandes oli suur, see võrdus lähteülesande muutujate ja kitsenduste arvu summaga. Ruutplaneerimises eeldati, et kõik muutujad on mittenegatiivsed. Sellise kitsendusega vähimruutude ülesandeid tol ajal ei uuritud. Seetõttu arenesid ruutplaneerimine ja vähimruutude meetod eraldi, kuigi ülesanded olid sarnased. Käesolevaks ajaks on välja töötatud vähimruutude meetod nii ülemiste kui ka alumiste kitsendustega ülesannete jaoks, mistõttu seda meetodit saab kasutada ka ruutplaneerimise ülesannete lahendamiseks. Töö selles osas on võrreldud ühe erikujulise ruutplaneerimise ülesande lahendamist vähimruutude meetodi ja simpleksmeetodi sarnase algoritmi abil.

Kuuendas osas leitakse kooperatiivse mängu N-tuum kui LP ülesande lahend ja võrreldakse seda vähimruutude meetodiga leitud VR-tuumaga.

2. Mittenegatiivne vähimruutude lahend

Klassikaline VR ülesanne on ülemääratud lineaarne võrrandisüsteem

$$Ax = b, \tag{1}$$

kus A on $(m \times n)$-maatriks, b on m- ja x on n-vektor, $m \geq n$. Selle lahendamiseks ortogonaalse meetodiga teisendatakse süsteem kolmnurksele kujule, millest määratakse muutujate väärtused. Kui seda teha Householderi peegelduste abil, siis saab neid teisendusi meeles pidada korrutise kujul. Peadiagonaali alla jätame nullide asemele seal olevad arvud, aga nüüd hakkavad nad tähistama peegeldustasandite normaale. Veel on vaja ühte lisamassiivi peadiagonaali elementide säilitamiseks, vt näidet 2.1 ja töid [4, 10].

Teoreem 2.1. *Olgu $v \neq 0$ mis tahes n-vektor. Siis eksisteerib Householderi peegeldusmaatriks H, nii et $Hv = (-\sigma\|v\|, 0, ..., 0)^T$, kus $\sigma = 1$, kui $v_1 \geq 0$ ja $\sigma = -1$, kui $v_1 < 0$.*

Selles teoreemis toodud valemi põhjal saab annulleerida kõik vektori komponendid peale esimese, kusjuures maatriksit H pole vaja otseselt välja arvutada.

Keerulisem on selline VR ülesanne, kus muutujad peavad olema mittenegatiivsed (NNLS – *non-negative least-squares solution*).

$$Ax = b, \quad x \geq 0. \tag{2}$$

Selle lahendamiseks on töödes [8, 12] võetud alglahendiks $x^0 = 0$, kõik muutujad on passiivsed. Igal järgneval sammul aktiviseerub üks muutuja või kõrvaldatakse mõni mittepositiivne muutuja. Aktiviseerub see x_j, millele vastav veerg A_j moodustab minimaalse nurga vahega $b - Ax^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Nüüd tuleb teha kõikidele veergudele ja paremale poolele selline peegeldus, mis annulleerib kõik peadiagonaali all olevad elemendid. Veidi keerulisem on mittepositiivse muutuja x_j kõrvaldamine. Selleks asendatakse vastav veerg A_j ja kõik järgnevad veerud originaalidega algsüsteemist, tehakse neile korrutise kujul meeles peetud varasemad peegeldused ja teisendatakse süsteem lõpuks peegelduste abil uuesti kolmnurksele kujule, vt [4], ptk 24.

Näide 2.1.

$$\begin{aligned} -x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 \quad &= 1 \\ 0.1x_1 \quad &= -0.01 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Alglahendi $x^0 = 0$ korral moodustab minimaalse nurga parema poolega esimene veerg, $x_1^1 = 0.997$ on vastava (4×1)-ülesande lahend. Teisel sammul aktiviseerub x_2, (4×2)-süsteemi lahend $x^2 = (0.747; 0.502; 0)^T$, kolmandal x^3, $x^3 = (-0.001; 1.001; 1.001)^T$.

Süsteem on kujul

$$\begin{aligned}
-2.002x_1 - 0.999x_2 - 0.999x_3 &= -1.997 \\
-1.415x_2 + 0.705x_3 &= -0.710 \\
-0.711x_3 &= -0.712 \\
0 &= -0.010
\end{aligned}$$

Kuna esimene muutuja on negatiivne, tuleb kõrvaldada esimene veerg, seejärel teisendada teine ja kolmas veerg kolmnurksele kujule:

$$\begin{array}{lrcr}
1.154x_1 + 1.732x_2 & & = & 1.732 \\
1.414x_1 & + 1.414x_3 & = & 1.414 \\
-0.823x_1 & & = & 0.001 \\
 & 0 & = & -0.010
\end{array}$$

Ülesande vähimruutude lahendi leiame esimesest ja teisest võrrandist, $x = (0, 1, 1)^T$. Peegeldustasapindade normaalid peetakse meeles peadiagonaali all (nullide asemel).

Märkus 2.1. Kui aktiviseerub see muutuja, millele vastav veerg moodustab minimaalse nurga parema poolega, siis aktiivsetele muutujatele vastavad veerud on "maksimaalselt lineaarselt sõltumatud".

3. Lineaarsete võrratuste ja võrrandisüsteemide lahendamine

Vaatleme põhiülesannet – lineaarsete võrratuste süsteemi minimaalse normiga lahendi arvutamist

$$\begin{aligned}
z = 0.5 \parallel x \parallel^2 &\rightarrow min \\
Ax &\leq b,
\end{aligned} \tag{3}$$

kus A on $(m \times n)$-maatriks, b on m-vektor ja x on n-vektor. Võib tõestada, et selle süsteemi minimaalse normiga lahend $\hat{x}$ avaldub kujul

$$\hat{x} = \frac{-A^T\hat{u}}{1 + (b, \hat{u})}, \tag{4}$$

kus $\hat{u}$ on vähimruutude ülesande

$$(b,\, u) = -1, \;\; A^T u = 0, \;\; u \geq 0 \tag{5}$$

lahend (vt [4, 11]). Kuna $\operatorname{grad} z = x$, siis valem (4) tähendab, et miinimumpunktis on vektor $\widehat{x}$ esitatav kitsendusfunktsioonide antigradientide lineaarse kombinatsioonina mittenegatiivsete kordajate u_i abil.

Kui süsteem (3) ei kehti, siis vähimruutude ülesandel (5) on selline lahend, mis rahuldab täpselt kõiki kitsendusi.

Näide 3.1.

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 &\leq -8 \\ x_1 &\leq 1 \\ x_2 &\leq 2. \end{aligned}$$

Sellele vastaval vähimruutude ülesandel (5)

$$\begin{aligned} -8u_1 + u_2 + 2u_3 &= -1 \\ -u_1 + u_2 &= 0 \\ -2u_1 + u_3 &= 0 \\ u &\geq 0 \end{aligned}$$

on täpne lahend $\hat{u} = (1/3,\, 1/3,\, 2/3)^T$.

Näide 3.2.

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$-2x_1 - 4x_2 \leq -8.$$

Vastava vähimruutude ülesande (5) lahend on

$$\hat{u} = (c,\, c/2 + 2/21)^T, \;\; c \geq 0 \;\text{ ja }\; \hat{x} = (4/5,\, 8/5)^T.$$

Järgnevalt vaatleme *ebastabiilsete lineaarsete võrrandisüsteemide* lahendamist, taandades need võrratuste süsteemiks. Selgitame seda järgneva näite abil.

Näide 3.3.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ -x_1 + x_2 &= 1. \end{aligned}$$

Liidame võrrandid kokku ja lisame kolmanda võrratuse:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 3 \\ -x_1 + x_2 &\le 1 \\ 2x_2 &\ge 4. \end{aligned}$$

Koostame selle süsteemi jaoks vähimruutude ülesande (5):

$$\begin{aligned} 3u_1 + u_2 - 4u_3 &= -1 \\ u_1 - u_2 &= 0 \\ u_1 + u_2 - 2u_3 &= 0 \\ u &\ge 0. \end{aligned}$$

Selle lahend on $\hat{u} = (0,\ 1/6,\ 1/4)^T$. See on määratud teise ja kolmanda võrratusega. Valemi (4) põhjal saame võrratuste süsteemi minimaalse normiga lahendi $\hat{x} = (1,\ 2)^T$.

Näide 3.4. Vaatleme töös [15] lk 123 toodud võrrandisüsteemi, kus stabiilsuse arv on $3,66 \times 10^6$:

$$A = \begin{pmatrix} -74 & 80 & 18 & -11 & -4 & -8 \\ 14 & -69 & 21 & 28 & 0 & 7 \\ 66 & -72 & -5 & 7 & 1 & 4 \\ -12 & 66 & -30 & -23 & 3 & -3 \\ 3 & 8 & -7 & -4 & 1 & 0 \\ 4 & -12 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sellel ülesandel on täpne täisarvuline lahend. Võrratuste süsteemile $Ax \leq b$ lisasime veel

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 1.$$

Valemi (4) abil saame lahendi

$$x = (0.999999997; -0.000000037; -1.999999979;$$

$$14.999999946; 42.999999840; -55.999999791)^T.$$

Lahendasime integraalvõrrandeid diskretiseerimisparameetri 100 korral. Saadud tulemused osutusid enamasti rahuldavaks. Tulemuste parandamiseks tuleks $n+1$ võrratusest koosnevast süsteemist kõrvaldada mõned võrratused, mis teevad protsessi ebastabiilseks.

Töös [9] on esitatud lineaarse võrrandisüsteemi lahendamise meetod, mis ei arvesta neid maatriksi veerge, mis *peaaegu sõltuvad* ülejäänud veergudest. Käesolevas töös on esitatud eelmise suhtes *duaalne* meetod. Selles ei arvestata neid võrrandeid, mis *peaaegu järelduvad* ülejäänud võrranditest.

4. Lineaarse planeerimise ülesannete lahendamine

Vaatleme LP ülesannet kujul

$$\begin{aligned} z = (c, x) \to min \\ Ax = b \\ x \geq 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Koostame sellele ülesandele vastava vähimruutude ülesande

$$\begin{aligned} -z_0 u_0 + (c, u) = -1 \\ -u_0 b + Au = 0 \\ u_0 \geq 0,\ u \geq 0, \end{aligned} \tag{7}$$

kus $u = (u_1, ..., u_n)^T$ ja parameeter z_0 on sihifunktsiooni miinimumi hinnang. Kerge on tõestada, et kui

$$z_0 > z_{min}, \tag{8}$$

siis ülesande (7) miinimumpunktis $u_0 > 0$ ja vektor u/u_0 on ülesande (6) lubatav lahend.

Kui kehtib vastupidine võrratus

$$z_0 \leq z_{min}, \tag{9}$$

siis valemi (4) abil saame leida ülesandele (6) vastava duaalülesande mingi lubatava lahendi $\hat{y}$, see on hulga

$$\{\, y \mid A^T y \leq c,\ (b,\, y) \geq z_0 \,\}$$

minimaalse normiga element.

Näide 4.1.

$$\begin{array}{rcl} z = -x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \longrightarrow & min \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 4 \\ x_2 & = & 4 \\ x & \geq & 0. \end{array}$$

Lähteülesandel on vaid üks lubatav baasilahend $x = (0,\, 4,\, 0)^T$, mis on optimaalne ja kidunud. Kui võtta $z_0 = 10$, siis $u_0 = 0.5$, $u = (0,\, 2,\, 0)^T$, $x = (0,\, 4,\, 0)^T$. Samasugune vektor x tuleb ka iga $z_0 > 10$ korral.

Valemi (9) korral, kui näiteks $z_0 = 8$, saame $u_0 = 0.068$, $u = (0.364;\, 0;\, 0)^T$, millele vastav $y = (-1,\, 3)^T$ on duaalülesande optimaalne lahend. Kui $z_0 = 4$, siis $u_0 = 0.083$, $u = (0.5;\, 0;\, 0)^T$, $y = (-1;\, 2)^T$. Alates $z_0 = 0$ on $u_0 = 0$, $u = (0.5;\, 0;\, 0)^T$, $y = (-1;\, 0)^T$. See on duaalülesande lubatavate lahendite hulga minimaalse normiga element.

Parameetri z_0 väärtust on kergem hinnata, kui muutujad peavad rahuldama alumisi ja ülemisi kitsendusi,

$$l \leq x \leq u.$$

Üldjuhul saame seega võrratuse (8) korral mingi lähteülesande või võrratuse (9) korral duaalülesande lubatava lahendi. Edasi saab jätkata, valides vastava simpleksmeetodi variandi. Tähtis on rõhutada esitatud alglahendi arvutamise algoritmi erinevust klassikalisest M-meetodist. Pole universaalset meetodit parameetri M määramiseks. Selle liiga suur väärtus võib põhjustada täpsuse kadu ja pole soovitatav. Seetõttu LP ülesannete kommertspakettides seda meetodit ei kasutata. Seevastu parameetri z_0 ebaõnnestunud valik ei mõjuta määratava alglahendi täpsust, sest vähimruutude ülesandes (7) kasutatakse vaid ortogonaalseid teisendusi.

Palju probleeme tekitavad ka simpleksmeetodi kasutamisel kidunud baasilahendid, mille korral sihifunktsiooni väärtus ei kasva. Seevastu vähimruutude meetodis hälvete ruutude summa $\|b-Ax\|^2$ väheneb igal sammul ja kõik aktiivsed muutujad $x_j > 0$.

Vähimruutude meetodi kasutamist lineaarses planeerimises on esmakordselt kirjeldatud autori töös [8]. Veidi keerulisem algoritm alglahendi leidmiseks on toodud töös [3].

5. Ruutplaneerimise ülesannete lahendamine

Vaatleme RP ülesannet kujul

$$\begin{gathered} 0.5(v,\, Bv) + (d,\, v) \to min \\ Gv \leq h, \end{gathered} \tag{10}$$

kus B on positiivselt määratud $(n \times n)$-maatriks, G on $(m \times n)$-maatriks, $v \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^m$, $h \in \mathbb{R}^m$ ja $(\cdot\,,\,\cdot)$ tähistab vektorite skalaarkorrutist. Kasutades Cholesky dekompositsiooni $B = D^T D$ ja nihet $v = D^{-1}x - B^{-1}d$, teisendame ülesande (10) põhiülesandeks

$$\begin{gathered} z = 0.5(x,\, x) \to min \\ Ax \leq b, \end{gathered} \tag{11}$$

kus $A = GD^{-1}$ ja $b = h + GB^{-1}d$ (vt [13]). Selle lahendamiseks koostame vähimruutude ülesande (5).

Näide 5.1.

$$\begin{aligned} z = 0.5v_1^2 + 0.5v_2^2 - v_1 - 2v_2 &\longrightarrow min \\ 2v_1 + 3v_2 &\leq 6 \\ v_1 + 4v_2 &\leq 5. \end{aligned}$$

See ülesanne on töös [2] lahendatud Wolfe'i meetodiga, mis põhineb simpleksmeetodi kasutamisel. Vastavas LP ülesandes on 14 muutujat. Vähimruutude meetodi korral on vaid kaks muutujat. Ülesanne (11) on kujul

$$\begin{aligned} z = 0.5(x, x) = x_1^2 + x_2^2 &\longrightarrow min \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq -2 \\ x_1 + 4x_2 &\leq -4. \end{aligned}$$

Vastava vähimruutude ülesande

$$\begin{aligned} -2u_1 - 4u_2 &= -1 \\ 2u_1 + u_2 &= 0 \\ 3u_1 + 4u_2 &= 0 \\ u &\geq 0 \end{aligned}$$

lahendi $\hat{u} = (0,\ 4/33)^T$ abil leiame valemit (4) kasutades

$$\hat{x} = (-4/17,\ -16/17)^T,\ v = x + (1,\ 2)^T = (13/17,\ 18/17)^T.$$

Kui lähteülesandes oleks olnud veel kitsendus $v \geq 0$, siis oleks tulnud kasutada nelja muutujat u_1, u_2, u_3, u_4.

Üldjuhul on vähimruutude ülesandes (11) n muutujat. Enamasti on ruutplaneerimise ülesandes kitsendus $x \geq 0$, seetõttu ka kitsendusi rohkem kui muutujaid. Järgnevalt näitame, et selle kitsenduse puudumisel ja väikese kitsenduste arvu m korral saab ülesande (11) asemel lahendada tema duaalülesannet. Selle muutujate arvu saab vähendada, kui sarnaselt Hildreti meetodiga kõrvaldada vektor x (vt [2]). Koostame ülesande (11) duaalülesande

$$\begin{gathered} w = -0.5(x, x) + (y, b - Ax) \to min \\ x + A^T y = 0, \\ y_i[b_i - (a_i,\, x)] = 0,\ i = 1, \dots, m \\ y \geq 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Valemi $x = -A^T y$ abil kõrvaldame vektori x ja saame ülesande

$$\begin{gathered} -AA^T y + s = b \\ y_i s_i = 0,\ i = 1, \dots, m \\ y \geq 0,\ s \geq 0, \end{gathered} \tag{13}$$

kus lisamuutujad $s_i = b_i - (a_i,\, x)$. Erinevalt LP ülesandest tohib baasis olla vaid üks muutuja, kas y_i või s_i. Selles ülesandes on m võrrandit ja $2m$ muutujat. Kui muutujate arv m on väike, $m \leq n$, selline, et ülesande (13) maatriksit saab säilitada arvuti operatiivmälus, siis võib vähimruutude ülesande (5) asemel lahendada väiksemate mõõtmetega ülesannet (13) simpleksmeetodi taolise algoritmiga. Valemitest $x = -A^T y$ ja (4) saame, et duaalmuutujad y ja vähimruutude ülesande (5) muutujad u on võrdelised. Kuna vähimruutude ülesande lahend on alati ühene, siis ka ülesannete (12) ja (13) lahendid on ühesed. Näites 5.1 on ülesanne (13) kujul

$$\begin{aligned} -13y_1 - 14y_2 + s_1 &= -2 \\ -14y_1 - 17y_2 + s_2 &= -4 \end{aligned}$$

Toome y_2 baasi ja saame kohe duaalülesande optimaalse lahendi $y = (0,\, 4/17)$, $x = -A^T y = (-4/17,\, -16/17)^T$.

Üldjuhul tuleb ülesande (13) lahendamiseks kõrvaldada eelnevalt võrratuste süsteemist $Ax \leq b$ sõltuvad võrratused (vt [1, 5]). Seejärel tuua baasi need muutujad y_i, mille korral $b_i < 0$ ja kui mõni $y_i < 0$, siis tuua selle asemel baasi vastav lisamuutuja s_i. Alati on ülesandes (13) i-nda veeru ja $(m+i)$-nda veeru skalaarkorrutis negatiivne.

Näide 5.2.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 6 & 5 & 5 & 6 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & -8 & 6 & -3 & 0 & 5 \\ -6 & -7 & 7 & 6 & -7 & 5 & 0 & 4 \\ 9 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 6 & 0 \\ 9 & 0 & -5 & 0 & 0 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & -4 & 5 & 6 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 10 & 12 & 8 & 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \\ -5 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Kõrvaldame esmalt seitsmenda võrratuse, mis järeldub eelmistest (vt [1]). Igal sammul toome baasi minimaalsele peadiagonaali elemendile vastava muutuja y_i, kui $b_i < 0$. Lõpuks asendame negatiivsed muutujad y_i neile vastavate lisamuutujatega s_i. Kuna ülesandel (13) on ühene lahend, siis lõpliku arvu sammude pärast me leiame selle. Saame

$$y = (0;\ 0.0088;\ 0;\ 0;\ 0.0229;\ 0.0502)^T,$$

$$x = -A^T y = (-0.250;\ 0.1656;\ -0.1889;\ -0.2309;$$
$$-0.2032;\ -0.2890;\ -0.0589;\ -0.3548)^T.$$

6. Kooperatiivse mängu lahendamine

Kogu ühiskonda puudutavate probleemide lahendamise kaks olulist printsiipi on võrdsus ja efektiivsus. Äärmuslik võrdsus on näiteks üleüldine vaesus, see on kõige halvem stsenaarium. Et pinged ühiskonnas ei ületaks kriitilist piiri, tuleb paljude otsuste tegemisel arvestada ennekõike vaesemate elanike huve, püüda vähendada inimeste valikuvõimaluste erinevust. Võrdsus tuleb saavutada vaesemate inimeste olukorra talutavaks muutmise, mitte aga rikaste tapmisega. Selleks tuleb toodetud hüvesid ümber jaotada. Üldise rikkuse kasvamisel saavad võimalikuks ka suuremad erinevused edukamate ja vähem edukamate inimeste vahel. Järgnevalt vaatleme ühise tulu ja kulu sellist jaotamist, mille korral on seatud eesmärgiks kõige vähem rahuldatud osalejate rahulolematuse vähendamine. Selliste kauplemise ja jaotamise probleemidega tegeleb kooperatiivsete mängude teooria. Neid mänge lahendatakse tuuma, N-tuuma ja Shapley vektori abil. Alustame lihtsatest näidetest.

Näide 6.1. *Päranduse jaotamine.* Rikkal mehel oli kolm naist. Nad sooviksid saada varandust vastavalt 100, 200 ja 300 miljoni eest. Kuidas jaotada vara "õiglaselt"? Tuleb leida mittenegatiivne vektor $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, selline et

$$x_1 + x_2 + x_3 = v(I),$$

kus $v(I)$ on pärandvara suurus. Toome N-tuuma x^* abil leitud tulemused kolmel juhul:

a) $v(I) = 100,\ x^* = (100/3,\ 100/3,\ 100/3)^T$,

b) $v(I) = 200,\ x^* = (50,\ 75,\ 75)^T$,

c) $v(I) = 300,\ x{*} = (50,\ 100,\ 150)^T$.

Näide 6.2. *Tööliste brigaad.* See koosneb $n = 4$ inimesest. Eeldame, et esimene tööline koos mis tahes ülejäänu(te)ga on suuteline töö ära tegema, samuti kõik ülejäänud ilma esimeseta. Mittenegatiivne vektor

$$x = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)^T,\ \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

iseloomustab tööliste "õiglast" panust, nende võitu. Selle kooperatiivse mängu N-tuum on $x^* = (2/5,\ 1/5,\ 1/5,\ 1/5)^T$.

Tähistagu $I = \{1, 2, \dots, n\}$ mängijate hulka, superaditiivne karakteristlik funktsioon $v(S)$ koalitsiooni S garanteeritud võitu, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ mängu tulemusvektorit ja $v(I)$ kõikide mängijate ühiskoalitsiooni võitu, mis tuleb nende vahel "õiglaselt" ära jaotada (vt [6, 14]). Ekstsess $e(S)$ iseloomustab koalitsiooni rahulolematust

$$e(S) = v(S) - \sum_i x_i,$$

kus summa arvutatakse kõikide koalitsiooni kuuluvate mängijate jaoks. Fikseeritud vektori x korral on ühe või mitme koalitsiooni rahulolematus suurim. N-tuum on selline tulemusvektor x^*, mille korral suurima rahulolematusega koalitsiooni rahulolematus on minimaalne kõikvõimalike vektorite x järgi. Alati peab kõigi mängijate võitude summa võrduma nende ühiskoalitsiooni garanteeritud võiduga $v(I)$:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = v(I).$$

Võtame teises näites garanteeritud võidu $v(S) = 1$, kui koalitsioon suudab töö ära teha, ja nulliga, kui ei suuda. Esimene ja teine tööline suudavad töö ära teha, leiame ekstsessi

$$e(12) = v(12) - x_1 - x_2 = 1 - x_1 - x_2 \geq 0.$$

Selle asendame vastupidise võrratusega

$$x_1 + x_2 + y \geq 1.$$

Minimeerides mittenegatiivset suurust y, lähendame me summat $x_1 + x_2$ koalitsiooni 12 tegelikule võidule, mis võrdub ühega. Kirjutades taolised võrratused kõikvõimalike koalitsioonide kohta, mis suudavad töö ära teha, leiamegi sellised koalitsioonid, mille korral maksimaalne ekstsess on minimaalne vektorite x järgi. Saame lineaarse planeerimise ülesande

$$\begin{array}{rcl}
y & \longrightarrow & min \\
x_1 + x_2 + y & \geq & 1 \\
x_1 + x_2 + x_3 + y & \geq & 1 \\
x_1 + x_2 + x_4 + y & \geq & 1 \\
x_1 + x_3 + y & \geq & 1 \\
x_1 + x_3 + x_4 + y & \geq & 1 \\
x_1 + x_4 + y & \geq & 1 \\
x_2 + x_3 + x_4 + y & \geq & 1 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y & \geq & 1 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\
x \geq 0, \ y \geq 0. & &
\end{array}$$

Ülesande tingimuste põhjal $x_2 = x_3 = x_4$. Esimesest võrratusest ja muutujate mittenegatiivsusest järelduvad teine, kolmas ja kaheksas võrratus. Kõrvaldades viimase võrrandi abil ühe muutuja, saame graafiliselt lahendades mängu N-tuuma $x^* = (2/5,\ 1/5,\ 1/5,\ 1/5)^T$. Muutuja $y^* = 2/5$ minimaalne väärtus saavutatakse koalitsioonide 12, 13, 14 ja 234 korral. Nende rahulolematus on suurim ja võrdub $y^* = 2/5$. Kõigi ülejäänud tulemusvektorite $x \neq x^*$ korral on maksimaalne rahulolematus suurem kui 2/5.

N-tuuma puuduseks on asjaolu, et mõne koalitsiooni võidu suurenemisel ei tarvitse selles osalevate mängijate võit suureneda.

Näide 6.3. Olgu

$$v(1) = 40,\ v(2) = 50,\ v(3) = 50,\ v(12) = 80,$$

$$v(13) = 80,\ v(23) = 90,\ v(123) = 100.$$

Selle mängu N-tuum on $x^* = (30,\ 100/3,\ 110/3)^T$. Kui suurendada ainult $v(23)$, $v(23) = 95$, siis N-tuum ei muutu. Sellist puudust pole VR-tuumal, mida vaatleme järgnevalt.

Olgu k kõikvõimalike koalitsioonide arv. Leiame võrrandisüsteemi

$$v(S_i) = b_i,\ i = 1, \dots, k$$

mittenegatiivse vähimruutude lahendi $\hat{x}$ ja arvutame

$$t = \sum_{i=1}^{i=n} \hat{x}_i.$$

Defineerime VR-tuuma xvr:

$$xvr = v(I)\hat{x}/t. \tag{14}$$

Näites 6.3 on vähimruutude ülesanne kujul

$$x_1 = 40$$

$$x_2 = 50$$

$$x_3 = 50$$
$$x_1 + x_2 = 80$$
$$x_1 + x_3 = 80$$
$$x_2 + x_3 = 90$$
$$x \geq 0.$$

Siin VR-tuum on

$$xvr = (36/128,\ 46/128,\ 48/128)^T = (28.12;\ 35.94;\ 35.94)^T.$$

Kui aga $v(23) = 95$, siis VR-tuum on

$$xvr = (700/26,\ 950/26,\ 950/26)^T = (26.92;\ 36.54;\ 36.54)^T.$$

Järelikult, erinevalt N-tuumast, reageerib VR-tuum paindlikult algandmete muutumisele.

Arvutame näites 6.1 $VR-$ tuuma:

a) $v(I) = 100,\ xvr = (100/6,\ 200/6,\ 50)^T$,
b) $v(I) = 200,\ xvr = (200/6,\ 400/6,\ 100)^T$,
c) $v(I) = 300,\ xvr = (50,\ 100,\ 150)^T$.

Näites 6.2 arvestame, et $x_2 = x_3 = x_4$. Saame ülemääratud süsteemi

$$x_1 + x_2 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 = 1$$
$$x_1 + 3x_2 = 1$$
$$3x_2 = 1$$
$$x \geq 0,$$

millele vastavast normaalvõrrandite süsteemist leiame $x = (5/11,\ 3/11)^T$. Valemi (14) põhjal $xvr = (5/14,\ 3/14,\ 3/14,\ 3/14)^T$. See erineb veidi N-tuumast $x^* = (2/5,\ 1/5,\ 1/5,\ 1/5)^T$.

Näide 6.4. *Laokulude jaotamine.* Töös [14] on toodud näide laokulude jaotamisest. Koalitsiooni tulu mõõtva karakteristliku funktsiooni $v(S)$ asemel saab kasutada kulufunktsiooni $c(S)$. Antud laokulude korral tuleb leida õiglane kulude jaotus kolme lao kasutaja vahel. Vähimruutude süsteem on kujul

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1\\
x_2 &= 2\\
x_3 &= 3\\
x_1 + x_2 &= 3\\
x_1 + x_3 &= 4\\
x_2 + x_3 &= 3\\
x &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Vastava normaalvõrrandite süsteemi lahend on $x = (5/4,\ 5/4,\ 9/4)^T$ ja $xvr = (5/19, 5/19, 9/19)^T$. See erineb veidi N-tuumast $\hat{x} = (1/4,\ 1/4,\ 1/2)^T$.

Mõiste N-tuum võttis kasutusele D. Schmeidler 1969. a (vt [6]). Viimasel ajal on seda mõistet üldistatud ja kasutatud mitmeid siintoodust erinevaid definitsioone.

Kirjandus

[1] Черников, С. *Линейные неравенства.* Москва, Наука, 1968.

[2] Künzi, H., Krelle, W. *Nichtlineare Programmirung.* Springer, 1962.

[3] Leichner, S., Dantzig, G., Davis, J. *A strictly improving linear programming phase I algorithm.* Annals of Oper. Res., 1993, **47**, 409–430.

[4] Lawson, C., Hanson, R. *Solving least squares problems.* Prentice-Hall, 1974.

[5] *MATLAB 7.1.0. An openexchange for the MATLAB and SIMULINK user community.*

[6] Schmeidler, D. *The nucleolus of a characteristic function game.* SIAM Journal on Appl. Math., 1969, **17**, 1163–1170.

[7] Vanderbei, J. *Linear Programming. Foundations and Extensions.* Kluwer, 2000.

[8] Übi, E. *Least-squares method in mathematical programming.* Proceedings of Estonian Academy of Sciences, 1989, **38**, 4, 423–432.

[9] Übi, E. *Method of orthogonal transformation*, Proceedings of Estonian Academy of Sciences, 1989, **38**, 4, 418–422.

[10] Übi, E. *Ekstreemumülesanded majanduses ja tehnikas.* Külim, 2002.

[11] Übi, E. *Exact and stable least squares solution to the linear programming problem.* Central European Journal of Mathematics, 2005, 3(2), 228–241.

[12] Übi, E. *On stable least squares solution to the system of linear inequalities.* Central European Journal of Mathematics, 2007, 5(2), 373–385.

[13] Übi, E. *A numerically stable least-squares solution to the quadratic programming problem.* Central European Journal of Mathematics, 2008, 3(2), 228–241.

[14] Übi, E. *Lineaarne planeerimine ja selle rakendused.* Külim, 2007.

[15] Wilkinson, J., Reinsch, C. *Handbook for automatic computation. Linear algebra.* Springer, 1971.

