Uurida liikumisi

Maido Rahula
Tartu Ülikool

Kõik liigub. Liikumised kosmoses, liikumised mikromaailmas, liikumised ümberringi. Liikumine on niivõrd tavapärane nähtus, et me peame seda iseenesest mõistetavaks. Me räägime sellest vähe ja veelgi vähem uurime seda, kuigi kõik teadused puutuvad kokku mitmesuguste protsessidega ja, järelikult, liikumistega. Siin on vaja peenemat matemaatilist lähenemist. Liikumise teema on niivõrd aktuaalne, et tasub mõelda, kas me üldse õigesti mõistame selle hoone struktuuri, mida nimetame matemaatikaks, ja kas me ikka koolides õpetame matemaatikat, unustamata peamist – uurida liikumisi.

1. Liikumise trajektoor

Lihtne on liikumist ette kujutada, kui on antud kujutus

$$\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow M,\ t \longmapsto x_t,$$

mis igale ajahetkele $t \in \mathbb{R}$ seab vastavusse hulga M teatud elemendi x_t. Kõneleme ruumist M ja punktist x_t, mis liigub selles ruumis. Praegusel hetkel $t = 0$ oleme punktis $x_0 = x$, väärtustel $t < 0$ näeme, kus olime minevikus, ja väärtustel $t > 0$, kus oleme tulevikus. Punkti x_t kõikvõimalikud asukohad määravad selle punkti *trajektoori* ruumis M. Milline on trajektoor, sõltub kujutusest λ.

Eesti Matemaatika Selts Aastaraamat 2009

Trajektoor võib olla pidev joon. Tal võivad olla iseärasused, nagu teravikupunktid. Ta võib olla sile, nii et tema igas punktis on üheselt määratud joone puutuja. Ta võib olla ka diskreetne, kui pole pidevat üleminekut punktist punkti. Parameeter t muutub üldjuhul miinus lõpmatusest kuni pluss lõpmatuseni, $-\infty < t < +\infty$. Kui parameeter t võtab aegteljel väärtusi 0-punkti ε-ümbrusest $(-\varepsilon, +\varepsilon)$, saab hinnata trajektoori kulgemist punkti x läheduses.

Selleks, et kõnelda joone pidevusest, siledusest ja selle puutujast, peab hulk M seda võimaldama. Edaspidi eeldame, et hulgal M on vastavad *topoloogilised* omadused olemas ning kõik esinevad trajektoorid on siledad parametriseeritud jooned. Meile on need mõisted intuitiivselt arusaadavad, kuigi puhttopoloogilisest seisukohast võib olukord olla üsnagi delikaatne.

2. Hetkeseis

Liikugu punkt x_t ruumis M piki siledat trajektoori. Joone puutujavektor selles punktis näitab, milline on liikumise suund ja, olenevalt vektori pikkusest, kui kiiresti punkt liigub. Puutujavektor on nagu liikumise *stoppkaader*, mis näitab punkti hetkeseisu.

Kui ruumi M igas punktis on näidatud vektor, siis see tähendab, et kõik punktid on liikvel. Ütleme, et sel juhul on ruumis M antud *vektorväli* X. Vektorvälja *voos* liiguvad punktid igaüks oma trajektooril teatud suunas ja teatud kiirusega[3]. Nii nagu trajektoori puutujavektor on liikuva punkti stoppkaader, on vektorväli vastava voo stoppkaader. *Voog, peatu hetkeks!* – on vektorvälja põhiidee ja olemus.

Vektorväli X on ühtlasi *diferentsiaaloperaator.* Kui f on mingi skalaarfunktsioon ruumis M, on seda funktsiooni võimalik diferentseerida välja X suhtes. Funktsioon f voos a_t teiseneb, $f \rightsquigarrow f_t = f \circ a_t$, ning *tuletis* defineeritakse valemiga

$$Xf \doteq \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\,(f_t - f) = (f \circ a_t)'_{t=0}.$$

[3]Vektorvälja X voog on ruumi M teisenduste rühma $\mathcal{G}$ 1-parameetriline alamrühm, homomorfismi $\mathbb{R} \to \mathcal{G}$, $t \mapsto a_t$, kujutis rühmas $\mathcal{G}$. Lühidalt kirjutatakse $a_t = \exp tX$.

Kui ruumi M igas punktis kehtib võrdus $Xf = 0$, siis funktsioon f on välja X trajektooridel konstantne, ta voos a_t ei muutu, $f_t = f$. Sellist funktsiooni nimetatakse välja X *invariandiks*.

Funktsiooni f muutust voos a_t kirjeldab Maclaurini rida

$$f_t = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k\,!}\,,$$

kus kordajaiks on tuletised $f^{(k)}(0) = X^k f\,,\ k = 0, 1, 2, \ldots$

3. Diferentsiaalvõrrand

Diferentsiaalvõrrand on teatud liikluseeskiri. Kui antud punkti on rakendatud mitmesugused vektorid, siis see tähendab, et sellele punktile on näidatud mitmeid võimalusi väljuda oma algasendist. Eeldame, et mõned vektorid on rohelised ja mõned punased. Rohelised nooled näitavad, kuhu liikumine on lubatud, punased – kuhu liikumine on keelatud. Matemaatiliselt väljendades, tegemist on *diferentsiaalvõrrandiga* ja me otsime võimalusi liikuda selle võrrandi *integraaljoontel*. Üldjuhul me võime väljuda mitmes suunas ning kulgeda piki erinevaid integraaljooni ehk, nagu öeldakse, lahend pole üheselt määratud. Vektorvälja puhul saame me antud punktist väljuda vaid ühes suunas ning tee on meil üheselt määratud. Edaspidi usaldame ka siin intuitsiooni, kuigi matemaatikutele, nagu ikka, pole diferentsiaalvõrrandi lahendi eksisteerimine ja ühesus kaugeltki lihtne küsimus.

4. Puutujakujutus

Vektorite ja vektorväljade abil on võimalik teisendusi ja liikumisi *lineariseerida*. Kõik vektorid punktis $x \in M$ moodustavad muutkonna M *puutujaruumi*, mille tähistame sümboliga τ_x. Olgu $f: M \to M$ kujutus ning $f(x) = y$. Siis kõik punkti x trajektoorid teisenevad punkti y trajektoorideks ning kõik vektorid puutujaruumist τ_x kanduvad üle puutujaruumi τ_y. Ühesõnaga, tekib lineaarkujutus vektorruumist τ_x vektorruumi τ_y. See on kujutuse f

nn *puutujakujutus* Tf,

$$f : M \longrightarrow M \quad \Longrightarrow \quad T_x f : \tau_x \longrightarrow \tau_y .$$

Puutujakujutuse $T_x f$ määrab *Jacobi maatriks* punktis x, mille moodustavad vastavad osatuletised. Laskumata detailidesse, rõhutame, et see maatriks määrab *lineaarkujutuse* $T_x f$, selle *kujutise* $\mathrm{Im}(T_x f)$ (*image*) ning tuuma $\mathrm{Ker}(T_x f)$ (*kernel*). Kujutis $\mathrm{Im}(T_x f)$ näitab, kuidas vektorruum τ_x viiakse vektorruumi τ_y, samal ajal kui tuuma $\mathrm{Ker}(T_x f)$ järgi otsustatakse, kuidas vektorruum τ_x laguneb kihtideks (kõrvalklassideks), et katta vektorruumi τ_y vastav alamruum.

Lineaaralgebras kirjeldatakse seda lineaarvõrrandite abil, kuid neid detaile me siinkohal ei käsitle. Küsimus, kas kujutus f alati võimaldab lineariseerimist, et seda n-ö lokaalselt aproksimeerida puutujakujutusega $T_x f$, leiab jaatava vastuse, kui kujutus f on sile, st et iga punkti ümbruses eksisteerib Jacobi maatriks.

5. Liikumise teisenemine

Tõlgendame olukorda teisest vaatevinklist. Kujutusega $b : M \to M$ teiseneb vektorvälja X voog teise vektorvälja $\widetilde{X}$ vooks:

$$a_t = \exp tX \quad \rightsquigarrow \quad \widetilde{a}_t = \exp t\widetilde{X} \, .$$

Järgnev diagramm näitab, kuidas see toimub:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{a_t} & M \\ \downarrow b & & \downarrow b \\ M & \xrightarrow{\widetilde{a}_t} & M \end{array} \qquad \boxed{a_t \ \rightsquigarrow \ \widetilde{a}_t = b a_t b^{-1}}$$

Vektorväli X teisendatakse puutujakujutusega Tb vektorväljaks $\widetilde{X}$: $\widetilde{X} = TbX$. Kujutuse b Jacobi maatriks B punktis x tekitab puutujaruumis τ_x maatriksite siseautomorfismi

$$\beta \, : A \ \to \ \widetilde{A} = BAB^{-1}.$$

Kujutusega β, nagu teame algebrast, maatriksi A omaväärtused ning nende sümmeetrilised funktsioonid ei muutu. Kujutus β nagu *raputab* maatriksit A, kuid sõelale jäävad *invariantsed* suurused.

Näiteks, kui tasand τ_x on 2-mõõtmeline vektorruum, siis maatriks A on (2×2)-maatriks ning invariantideks on *determinant* ja *jälg*:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad \det A = a_1a_4 - a_2a_3\,, \quad \operatorname{tr} A = a_1 + a_4\,.$$

6. Diskriminant

Vaatleme lähemalt lineaarrühma $GL(2, \mathbb{R})$ Lie algebrat $gl(2, \mathbb{R})$, mille elementideks on (2×2)-maatriksid A. Need moodustavad ruumi $\mathbb{R}^4$, kusjuures koordinaatideks on maatriksi A elemendid. Funktsioone $\det A$ ja $\operatorname{tr} A$ kui siseautomorfismide invariante on võimalik siiski häirida. Operaatori

$$P = \frac{\partial}{\partial a_1} + \frac{\partial}{\partial a_4}$$

voog

$$c_t : A \rightsquigarrow A_t = A + tE$$

indutseerib teisenduse:

$$\det A \rightsquigarrow \det A_t = \det A + t \cdot \operatorname{tr} A + t^2, \quad \operatorname{tr} A \rightsquigarrow \operatorname{tr} A_t = \operatorname{tr} A + 2\,t.$$

Voog c_t jätab invariantseks ruutfunktsiooni $\det A_t$ *diskriminandi*

$$\Delta = \operatorname{tr}^2 A - 4 \det A.$$

Diskriminant Δ mängib ruumis $\mathbb{R}^4$ erilist rolli. Ta on siseautomorfismide ja operaatori P *ühine invariant* ning seob siseautomorfismide invariandid ($\det A$, $\operatorname{tr} A$) operaatori P invariantidega ($a_1 - a_4$, a_2, a_3):

$$(a_1 + a_4)^2 - 4(a_1a_4 - a_2a_3) = (a_1 - a_4)^2 + 4a_2a_3.$$

Selline seos kannab algebras nimetust *süsiig*[4].

[4]Kujutame ette: kaks isikut (subjekti) A ja B tahavad jõuda mingis asjas selgusele. Nende väärtushinnangud on erinevad ja on nagu kaks invariantide süsteemi. Väitlus võib lõppeda edukalt vaid siis, kui lähtutakse ühistest invariantidest. Süsiig on koostöö aluseks.

Diskriminandil Δ on ilus geomeetriline tõlgendus. Hüperkvadrikute parvel $\det A_t = C-$ const on ruumis $\mathbb{R}^4$ mähispind, mille võrrand on $\Delta = -4C$. See tuleneb faktist, et $P(\det A_t) = \operatorname{tr} A_t$ ning kvadriku $\det A_t = C$ karakteristik on määratud lõikumisel tasandiga $\operatorname{tr} A_t = 0$. Kui projekteerida ruum $\mathbb{R}^4$ operaatori P invariantide ruumi xuz,

$$\pi \; : \quad \begin{cases} x = a_1 - a_4 \\ y = a_2 \\ z = a_3 \,, \end{cases}$$

projekteerub karakteristik ühekatteliseks hüperboloidiks $x^2 - 4yz = -4C$. Pind $\Delta = -4C$ ruumis $\mathbb{R}^4$ on silinder, mille juhtpinnaks[5] on hüperboloid ja sirgjoonelisteks moodustajateks operaatori P trajektoorid.

Toome sisse tähistused (u, u') ning projekteerime ruumi $\mathbb{R}^4$ tasandile uu':

$$\zeta : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \; A \longmapsto (u, u'), \; \begin{cases} u = \det A \\ u' = \operatorname{tr} A \end{cases} ,$$

$$T\zeta \sim \begin{pmatrix} a_4 & -a_3 & -a_2 & a_1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kujutus ζ projekteerib operaatori $P(1, 0, 0, 1)$ operaatoriks $\widetilde{P}$ ning voo c_t vooks $\widetilde{c}_t$:

$$\widetilde{P} = u' \frac{\partial}{\partial u} + 2 \frac{\partial}{\partial u'} , \qquad \widetilde{c}_t \; \sim \; \begin{cases} u_t = u + u't + t^2 \\ u'_t = u + 2\,t \,. \end{cases}$$

Kui operaatoril P on kolm sõltumatut invarianti, siis operaatoril $\widetilde{P}$ on üksainus invariant ja selleks on diskriminant

$$\widetilde{\Delta} = (u')^2 - 4u, \qquad \widetilde{\Delta} \circ \zeta = \Delta \,.$$

Operaatori P trajektoorid projekteeruvad uu'-tasandile paraboolideks, kusjuures silinder $\Delta = -4C$ projekteerub täielikult parabooliks $\widetilde{\Delta} = -4C$. Parabooli $\widetilde{\Delta} = 0$ võib kasutada nomogrammina ruutvõrrandi lahendamisel.

[5] Silindril on ruumis $\mathbb{R}^3$ sirgjoonelised moodustajad ja juhtjoon, ruumis $\mathbb{R}^4$ aga sirgjoonelised moodustajad ja juhtpind.

Diskriminandil on veel üks omadus. Kui ruutfunktsioon kirjutada välja Maclaurini rea eeskujul, võttes rea kolm esimest liiget, ja kirjutada selle funktsiooni diskriminant veidi teistmoodi,

$$u_t = u + u't + u''\,\frac{t^2}{2}\,, \qquad \Delta = \frac{(u')^2}{2} - uu'',$$

siis diskriminandi avaldises esimene liige $\frac{(u')^2}{2}$ on füüsikas tuntud *kineetiline energia* ja teine liige on alghetkeks läbitud tee u ja jõu (teine tuletis u'' on võrdeline jõuga) korrutis, st alghetkeks tehtud töö e *potentsiaalne energia*. Diskriminandi Δ invariantsus on tõlgendatav *energia jäävuse seadusena*. Kummaline, et diskriminant, mida tunneb iga koolilaps, on seotud energia jäävuse seadusega.

7. Invariantide stabiilsus

Kordame (2×2)-maatriksiga tehtud mõttekäiku (3×3)-maatriksiga A, Lie algebra $gl(3,\mathbb{R})$ elemendiga. Seekord ollakse ruumis $\mathbb{R}^9$:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} \ \in \ gl(3,\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}^9.$$

Nagu eelmiselgi juhul, raputame maatriksit M siseautomorfismidega. Sõelale jäävad invariandid

$$u = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix}\,,$$

$$u' = \frac{1}{6}\left(\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_4 & a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_7 & a_9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_5 & a_6 \\ a_8 & a_9 \end{vmatrix}\right), \qquad u'' = \frac{1}{3}(a_1 + a_5 + a_9).$$

Raputame invariante u, u', u'' operaatori

$$P = \frac{\partial}{\partial a_1} + \frac{\partial}{\partial a_5} + \frac{\partial}{\partial a_9}$$

voos c_t:

$$c_t : A \rightsquigarrow A_t = A + tE\,, \qquad \begin{cases} u_t = u + u't + u''\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} \\ u'_t = u' + u''t + \frac{t^2}{2} \\ u''_t = u'' + t\ . \end{cases}$$

Sõelale jäävad uued invariandid

$$\sigma_0 = u - u'u'' + \frac{1}{3}(u'')^3, \qquad \sigma_1 = u' - \frac{1}{2}(u'')^2.$$

Paneme tähele, et

$$Pu = u',\ Pu' = u'',\ Pu'' = 1,\ P\sigma_0 = P\sigma_1 = 0.$$

Suurused σ_0 ja σ_1 on saadud avaldistest u_t ja u'_t asendusega $t = -u''$.

Kuna σ_0 ja σ_1 on siseautomorfismide ja operaatori P ühised invariandid, siis avalduvad nad nii siseautomorfismide kui ka operaatori P invariantide kaudu. Vastavalt definitsioonile on nad invariantide u, u', u'' funktsioonid. Operaatori P invariantideks on maatriksi $A_{-u''} = A - u''E$ elemendid. Järelikult, võrdused

$$\sigma_0 = u_{-u''}, \quad \sigma_1 = u'_{-u''}$$

ongi kaks süsiigi nii ühtede kui ka teiste invariantide vahel.

Kujutusega $\zeta : \mathbb{R}^9 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ A \longmapsto (u,\, u',\, u'')$ projekteerub operaator P operaatoriks $\widetilde{P}$ ja voog c_t vooks $\widetilde{c}_t$:

$$\widetilde{P} = u'\frac{\partial}{\partial u} + u''\frac{\partial}{\partial u'} + \frac{\partial}{\partial u''}\,, \qquad \widetilde{c}_t : (u,\, u',\, u'') \rightsquigarrow (u_t,\, u'_t,\, u''_t).$$

Operaatori $\widetilde{P}$ trajektoorid ruumis $uu'u''$ on kuupparaboolid. Üks neist, 0-punkti trajektoor[6], on tasanduva pinna tagasipöörde serv, mille võrrand on $I = 0$, kus $I = (3\sigma_0)^2 + (2\sigma_1)^3$ on algebrast tuntud

[6] See kuupparabool võib olla nomogrammiks kuupvõrrandi lahendamisel, vt [4], lk 253.

kuupfunktsiooni u_t *diskriminant.* Tasanduv pind $I = 0$ on tasandite parve $u_t = 0$ mähispind operaatori $\widetilde{P}$ voos.

Raputame invariante σ_0 ja σ_1. Selleks kasutame operaatoreid Q ja S:

$$Q = \big(u'(u'')^2 + 3uu'' - 4(u')^2\big)\frac{\partial}{\partial u} + 3\,\sigma_0\frac{\partial}{\partial u'}\,,$$

$$S = (3u - u'u'')\frac{\partial}{\partial u} + 2\,\sigma_1\frac{\partial}{\partial u'}\,.$$

Nii Q kui ka S esimene komponent on teise komponendi algfunktsioon $\widetilde{P}$ suhtes. Seetõttu $[Q, \widetilde{P}\,] = [S, \widetilde{P}\,] = 0$ ning Q ja S on operaatori $\widetilde{P}$ *infinitesimaalsed sümmeetriad.* Mõlemas voos invariandid σ_0 ja σ_1 teisenevad. Esimesel juhul on diskriminant I operaatorite $\widetilde{P}$ ja Q ühine invariant, kuid teisel juhul on $\sigma_0^2 : \sigma_1^3$ operaatorite $\widetilde{P}$ ja S ühine invariant:

$$Q\sigma_0 = -4\sigma_1^2,\ Q\sigma_1 = 3\sigma_0,\ QI = 0,$$

$$S\sigma_0 = 3\sigma_0,\ S\sigma_1 = 2\sigma_1,\ S(\sigma_0^2 : \sigma_1^3) = 0.$$

Operaatorid Q ja S projekteeruvad kujutusega

$$\chi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (u,\, u',\, u'') \longmapsto (\sigma_0,\, \sigma_1)$$

$\sigma_0\sigma_1$-tasandile operaatoriteks $\widetilde{Q}$ ja $\widetilde{S}$:

$$\widetilde{Q} = -4\sigma_1^2\,\frac{\partial}{\partial\sigma_0} + 3\sigma_0\,\frac{\partial}{\partial\sigma_1}\,, \qquad \widetilde{S} = 3\sigma_0\,\frac{\partial}{\partial\sigma_0} + 2\sigma_1\,\frac{\partial}{\partial\sigma_1}\,.$$

Operaatoritel Q ja S on ühine invariant u''. Operaatoritel $\widetilde{Q}$ ja $\widetilde{S}$ ühist invarianti ei ole. Operaator $\widetilde{S}$ on operaatori $\widetilde{Q}$ infinitesimaalne sümmeetria, $[\widetilde{S}, \widetilde{Q}] = \widetilde{Q}$, st $\sigma_0\sigma_1$-tasandi joonteparv $I =$ const teiseneb operaatori $\widetilde{S}$ voos iseendaks: $\widetilde{S}I = 6I,\ I_t = Ie^{6t}$.

Kokkuvõtvalt, me tegutsesime samm-sammult:

$$A \rightsquigarrow (u,\, u',\, u'') \rightsquigarrow (\sigma_0,\, \sigma_1) \rightsquigarrow (I,\, \sigma_0^2 : \sigma_1^3),$$

st häirides (3×3)-maatriksit A, saadi invariandid u, u', u''; häirides invariante u, u', u'', saadi eelmistest stabiilsemad invariandid σ_0, σ_1;

häirides invariante σ_0, σ_1, saadi eelmistest veelgi stabiilsemad invariandid I ja $\sigma_0^2 : \sigma_1^3$.

Sama protsessi võib ilmselt korrata kõrgemat järku maatriksitega. Üldises plaanis me tegeleme liikumistega ja liikumiste liikumistega, st kõrgemat järku liikumistega. Esimesel sammul on esialgne liikumine. Teisel sammul me seda liikumist teisendame ja tegu on liikumise liikumisega e teist järku liikumisega. Kolmandal sammul on tegu juba kolmandat järku liikumisega jne. Igal sammul kerkivad esile eelmistega võrreldes püsivamad e stabiilsemad invariandid.

8. Alg- ja keskmomendid

Tõenäosusteoorias käsitletakse juhuslikke suurusi. Meie käsitluses on juhuslikuks suuruseks mingi süsteem, mida võib raputada. Kui seda süsteemi raputada, siis jäävad sõelale invariantsed suurused, mis iseloomustavad süsteemi stabiilsust. Juhusliku suuruse X korral vaadeldakse selle alg- ja keskmomente ν_k ja μ_k:

$$\nu_k = \mathrm{E}X^k, \quad \mu_k = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^k,$$

kus $\mathrm{E}X$ on suuruse X keskväärtus. Keskmomendid avalduvad algmomentide kaudu:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0 \\ \mu_2 &= \nu_2 - \nu_1^2 \\ \mu_3 &= \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3 \\ \dots & \quad \dots \end{aligned}$$

Võtame algmomentideks (kordaja täpsusega) suurused u, u', u'',

$$u = \frac{1}{6}\,\mathrm{E}X^3 = \frac{1}{6}\,\nu_3, \quad u' = \frac{1}{2}\,\mathrm{E}X^2 = \frac{1}{2}\,\nu_2, \quad u'' = \mathrm{E}X = \nu_1,$$

ning püüame suurust X ning algmomente häirida:

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{6}\,\mathrm{E}(X+t)^3 \\ u'_t = \frac{1}{2}\,\mathrm{E}(X+t)^2 \\ u''_t = \mathrm{E}(X+t) \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} u_t = u + u't + u''\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} \\ u'_t = u' + u''t + \frac{t^2}{2} \\ u''_t = u'' + t\,. \end{cases}$$

Oleme ruumis $uu'u''$ operaatori P voos c_t. Näeme, et sõelale jäävad keskmomendid:

$$\begin{cases} \sigma_0 = u - u'u'' + \frac{1}{3}(u'')^3 \\ \sigma_1 = u' - \frac{1}{2}(u'')^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_0 = \frac{1}{6}\mu_3 \\ \sigma_1 = \frac{1}{2}\mu_2\,. \end{cases}$$

Diskriminant I avaldub omakorda keskmomentide funktsioonina:

$$I = (3\sigma_0)^2 + (2\sigma_1)^3 = \frac{1}{4}\,\mu_3^2 + \mu_2^3\,.$$

Samasugune seos invariantide ja momentide vahel ilmneb ka kõrgemat järku maatriksite ja vastavate polünoomide puhul. See pole juhuslik kokkusattuvus. Eesmärk nii siin kui seal on suuruste leidmine, nii et igal sammul saadakse eelmistest stabiilsemad suurused.

9. Kõrgemat järku liikumised

Näeme ümberringi mitmesuguseid liikumisi. Liigub auto, rong, lennuk, pöörleb Maa. Meie laiuskraadil me osaleme selles pöörlemises kiirusega *ca* 200 m/s. Maa liigub ümber Päikese kiirusega *ca* 20 km/s. Küsime näiteks, kas on võimalik mängida laeval piljardit? Lihtne vastus – võib, kui meid miski ei häiri. Kui aga arvestada kõiki reaalseid faktoreid, läheb asi keeruliseks. Kõige hullem, kui meri on tormine.

Liikuva punkti hetkeseisu iseloomustame vektoriga, voogu vektorväljaga, teisendusi lineariseerime maatriksitega. Nägime, kuidas maatriksit häirides kerkivad järk-järgult esile invariandid. See tähelepanek on meie jaoks olulise tähtsusega. Kuid me alustasime vektorist, liikumise stoppkaadrist, siis küsigem, milline on teist ja kolmandat järku liikumise stoppkaader, kõrgemat järku liikumise stoppkaader?

Olgu $(u,\, u_1)$ liikuv punkt u muutkonnal M koos trajektoori puutujavektoriga u_1, ehk nn punkti u *infinitesimaalne nihe.* Räägitakse muutkonna M *korrustest* $TM\,, T^2M, \dots$ ning elementidest

$$u \in M, \quad (u,\, u_1) \in TM, \quad (u,\, u_1,\, u_2,\, u_{12}) \in T^2M,\ \dots,$$

kus iga järgmine element on eelmise elemendi infinitesimaalne nihe. Siis k-ndat järku liikumise stoppkaader on korruse $T^k M$ element, $k = 1, 2, \ldots$ Järelikult, kõrgemat järku liikumisi on võimalik lineariseerida muutkonna M vastavatel korrustel. Nii saab alguse uus teooria – *kõrgemat järku liikumiste teooria.*

Võib näida, et uue teooria tehniline külg, st vastava aparatuuri väljatöötamine, kujuneb meeletult keerukaks. Tegelikult on asi lihtsam, sest me tegutseme iteratiivselt, korrates samu liigutusi ja tõustes korruselt korrusele. Korruse dimensioon iga kord kahekordistub, st $\dim T^k M = 2^k \dim M$, ning see on peamine, mida tuleb arvestada. Hoopis põnevaks kujuneb duaalne struktuur. Algebras me tunneme duaalsust nagu "vektor-kovektor", diferentsiaalgeomeetrias valitseb duaalsus "vektorväljad-diferentsiaalvormid". Korrused on mitmekordsed vektorkihtkonnad ja siin tulevad mängu nn *sektorvormid* ning see muudab põhimõtteliselt meie endisi arusaamu.

Antud teema on niivõrd uudne ja avar, et selles suunas on tehtud vaid esimesed sammud, vt [1–4]. Samal ajal kerkib päevakorda mitmeid võtmeprobleeme. Näiteks, me liialt tagasihoidlikult suhtume Lie-Cartani arvutusse; meie spetsialistid ja pedagoogid ei tööta nii jõuliselt Lie tuletistega ja diferentsiaalvõrranditega, et võiksime uuendada traditsioonilise, kuid nüüd juba aegunud tehnika. Me ei mõista sellega hukka geniaalset pärandit, mille on meile jätnud meie eelkäijad. Meie väljakutse on hinnata tõelisi väärtusi, st stabiilseid invariante. Teooriast nagu lõplikult välja kujunenud süsteemist on kindlasti vara veel rääkida.

Kirjandus

[1] Bertram, W., *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces over General Base Fields and Rings.* Memoirs of AMS, **192**, no 900, 2008.

[2] White, J. E., *Method of Iterated Tangents with Applications in Local Riemannian Geometry.* Pitman Publ., 1982.

[3] Rahula, M., *New Problems in Differential Geometry.* World Scientific, 1993.

[4] Атанасиу, Г., Балан, В., Брынзей, Н., Рахула, М., *Дифференциально-геометрические структуры: касательные расслоения, связности в расслоениях, экспоненциальный закон в пространстве струй.* Москва, ЛИБРОКОМ, 2010.