Paraboolsete integrodiferentsiaalvõrrandite positiivsusprintsiip

JAAN JANNO
Tallinna Tehnikaülikool

1. Soojusjuhtivusvõrrand ja selle lahendi positiivsus

Olgu vaatluse all n-mõõtmeline homogeenne soojust juhtiv keha Ω. Matemaatilisest füüsikast on teada, et selle keha temperatuur u rahuldab ajahetkel t (eeldame, et $t > 0$) keha punktis x järgmist diferentsiaalvõrrandit:

$$\beta u_t(x,t) = \lambda \Delta u(x,t) + f(x,t), \quad x \in \Omega,\ t > 0, \tag{1}$$

kus β on soojusmahtuvuse ja tiheduse korrutis, λ on soojusjuhtivuskordaja, Δ on Laplace'i operaator, st $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$, indeksid tähistavad osatuletisi ja f on soojusallikate tihedus. Tegemist on klassikalise *paraboolset tüüpi* osatuletistega diferentsiaalvõrrandiga. Selle saab lihtsalt tuletada nn Fourier' seadusest, mis seob soojusvoogu q ja temperatuuri gradienti

$$q(x,t) = -\lambda \nabla u(x,t) \tag{2}$$

ning energia jäävuse seadusest diferentsiaalsel kujul

$$\beta u_t + \operatorname{div} q = f. \tag{3}$$

Kuna diferentsiaalvõrrandil (1) on lõpmata palju lahendeid, tuleb lahendi üheseks määramiseks ette anda lisatingimusi. Füüsikalisest aspektist on kõige loomulikum anda ette algtingimus temperatuuri jaoks ajahetkel $t = 0$ ja mingisugune soojusrežiim piirkonna Ω rajal $\partial\Omega$. Lihtsaima ülesande saame, kui anname ette temperatuuri väärtused rajal. Siis on vastavad lisatingimused järgmised:

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega, \quad u(x,t) = g(x,t),\ x \in \partial\Omega,\ t > 0, \tag{4}$$

kus u_0 ja g on etteantud funktsioonid. Võrrand (1) koos tingimustega (4) moodustab nn segaülesande.

Ülesannet (1), (4) saab mitmel moel üldistada, võttes kas keerulisema paraboolse diferentsiaalvõrrandi või keerulisemad rajatingimused. Teeme siinkohal ühe lihtsa üldistuse, mida on meie teooria jaoks vaja ka edaspidi. Nimelt lisame võrrandisse liikme $au(x,t)$, kus a on suvaline reaalarv. Siis saame järgmise võrrandi:

$$\beta u_t(x,t) = \lambda \Delta u(x,t) + au(x,t) + f(x,t), \quad x \in \Omega,\ t > 0. \tag{5}$$

Ülesande (5), (4) *klassikaliseks lahendiks* nimetatakse funktsiooni u, mis on pidev piirkonnas $\overline{\Omega} \times [0,\infty)$, üks kord pidevalt diferentseeruv ajamuutuja t suhtes ja kaks korda pidevalt diferentseeruv ruumimuutujate komplekti $\{x_i\}$ suhtes piirkonnas $\Omega \times (0,\infty)$ ning rahuldab tingimusi (5), (4).

Eeldame kõikjal edaspidi, et hulk Ω on tõkestatud, lahtine ja sidus ning kordajate λ ja β jaoks kehtivad võrratused

$$\beta > 0\,, \quad \lambda > 0. \tag{6}$$

Neil eeldustel on võimalik tõestada, et kui funktsioonid f, u_0 ja g rahuldavad teatud regulaarsuse tingimusi, siis eksisteerib ülesandel (5), (4) parajasti üks klassikaline lahend.

Kehtib järgmine teoreem, mida sobiks nimetada ülesande (5), (4) lahendi *positiivsusprintsiibiks*.

Teoreem 1. *Olgu u ülesande* (5), (4) *klassikaline lahend ja kehtigu võrratused* $f \geq 0$, $u_0 \geq 0$, $g \geq 0$. *Siis* $u \geq 0$.

See teoreem järeldub vahetult paraboolset tüüpi võrrandite ekstreemumprintsiibist, mis on natuke tugevam väide kui äsjasõnastatud teoreem. Füüsikalisest seisukohast on Teoreemi 1 kehtivus ilmne: kui alghetkel $t = 0$ on keha temperatuur positiivne, keha rajal on temperatuur positiivne ja kehas paiknevad soojusallikad on ka positiivsed, siis peab keha temperatuur $t > 0$ korral samuti positiivne olema.

Positiivsusprintsiipi saab kasutada mitmete matemaatiliste väidete tõestamisel. Näiteks järeldub sellest printsiibist otseselt ülesande (5), (4) klassikalise lahendi ühesus. Seda printsiipi saab kasutada ka mitmete võrrandile (5) püstitatud pöördülesannete lahendite ühesuse tõestamisel (nt koefitsientide määramine lõpptingimuse alusel [1]).

2. Integrodiferentsiaalne soojusjuhtivuse mudel

Mudeli (1) põhiliseks puuduseks on asjaolu, et soojus levib selles lõpmata kiiresti. Seetõttu on kasutusele võetud ka mitmeid täiustatud mudeleid, milles soojuslainetel on lõplik kiirus. Alljärgnevalt vaatlemegi ühte neist. Lähtume järgmisest üldistatud Fourier' seadusest [3]:

$$q(x,t) = -\lambda \nabla u(x,t) + \int_0^t m(t-\tau)\nabla u(x,\tau)d\tau. \tag{7}$$

Siin esineb lisaks soojusjuhtivuskordajale ka nn *soojusvoo relaksatsioonituum* ehk *mälutuum* m. Edaspidi eeldame lihtsuse mõttes, et m on pidevalt diferentseeruv. Füüsikalised eeldused tuuma m kohta on järgmised:

$$m \geq 0\,, \quad m' \leq 0. \tag{8}$$

Näiteks kasutatakse praktikas küllalt sageli eksponentsiaalseid tuumi

$$m(t) = \sum_{l=1}^{N} \alpha_l e^{-\gamma_l t}, \tag{9}$$

kus $\alpha_l, \gamma_l \geq 0$.

Seosed (7) ja (3) annavad järgmise *paraboolse integrodiferentsiaalvõrrandi*:

$$\begin{cases} \beta u_t(x,t) = \lambda \Delta u(x,t) - \int_0^t m(t-\tau)\Delta u(x,\tau)d\tau + f(x,t), \\ \quad x \in \Omega,\ t > 0. \end{cases} \tag{10}$$

Koos alg- ja rajatingimustega moodustab see ülesande (10), (4). On võimalik tõestada, et teatud regulaarsuse eeldustel funktsioonide f, u_0 ja g kohta eksisteerib ülesandel (10), (4) parajasti üks klassikaline lahend.

Integraalne liige toob soojusjuhtivusprotsessi teatud inertsust, mille tulemusena muutub soojuslainete kiirus lõplikuks. Teatud inerts tekib ka positiivsusprintsiibis. Seda vaatlemegi allpool.

Kuid eelnevalt toome sisse täiendava tähistuse. Olgu v ja w kaks muutujast t sõltuvat funktsiooni. Tähistame nende funktsioonide konvolutsiooni sümboliga $*$, st

$$v * w(t) = \int_0^t v(t-\tau)w(\tau)d\tau.$$

Siis saab võrrandi (10) kirjutada järgmiselt:

$$\beta u_t(x,t) = (\lambda I - m*)\Delta u(x,t) + f(x,t), \quad x \in \Omega,\ t > 0, \tag{11}$$

kus I on ühikoperaator.

Tuuma m *resolventtuumaks* nimetame funktsiooni k, mis rahuldab järgmist 2. liiki Volterra integraalvõrrandit:

$$k - \frac{1}{\lambda} m * k = \frac{1}{\lambda^2} m. \tag{12}$$

Integraalvõrrandite teooriast tuleneb, et pidevalt diferentseeruva m korral on võrrandil (12) parajasti üks pidevalt diferentseeruv lahend k. Võrrand (12) on konstrueeritud selliselt, et kehtiks järgmine seos:

$$\left(\lambda^{-1} I + k*\right)(\lambda I - m*) \;=\; I. \tag{13}$$

3. Positiivsusprintsiip integrodiferentsiaalses mudelis

Rakendame võrrandi (11) vasakule ja paremale poolele operaatorit $\lambda^{-1}I + k*$. Arvestades võrdust (13), saame

$$\lambda^{-1}\beta u_t + k * u_t = \Delta u + h, \tag{14}$$

kus

$$h(x,t) = \lambda^{-1}f(x,t) + k * f(x,t). \tag{15}$$

Positiivsusprintsiip on järgmine.

Teoreem 2. *Eeldame, et* $k \geq 0$, $k' \leq 0$. *Olgu* u *ülesande* (10), (4) *klassikaline lahend ja kehtigu võrratused* $h \geq 0$, $u_0 \geq 0$, $g \geq 0$. *Siis* $u \geq 0$.

Tõestuse visand. Tõestuse idee seisneb ekvivalentse ülesande (14), (4) itereerimises tavaliste paraboolsete ülesannetega ja viimastele Teoreemi 1 rakendamises.

Integreerime võrrandis (14) esinevat liiget $k * u_t$ ositi:

$$k * u_t(x,t) = \int_0^t k(t-\tau)u_\tau(x,\tau)d\tau = k(0)u(x,t) - k(t)u(x,0)+$$

$$+\int_0^t k'(t-\tau)u(x,\tau)d\tau = k(0)u(x,t) - k(t)u_0(x) + k' * u(x,t).$$

Kasutades seda seost võrrandis (14), tuletame

$$\lambda^{-1}\beta u_t + k(0)u - ku_0 + k' * u = \Delta u + h.$$

Viies siin osa liikmeid paremale poole ning lisades alg- ja rajatingimused, saame ülesande u jaoks kirjutada järgmisel kujul:

$$\lambda^{-1}\beta u_t(x,t) = \Delta u(x,t) - k(0)u(x,t) + k(t)u_0(x) -$$

$$-k' * u(x,t) + h(x,t), \quad x \in \Omega,\ t > 0, \tag{16}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega, \quad u(x,t) = g(x,t),\ x \in \partial\Omega,\ t > 0.$$

Defineerime funktsioonide jada u^j, $j = 0, 1, 2, \ldots$ selliselt, et $u^0 = 0$ ja u^j, $j \geq 1$ rahuldab järgmist itereeritud ülesannet:

$$\lambda^{-1}\beta u_t^j(x,t) = \Delta u^j(x,t) - k(0)u^j(x,t) + k(t)u_0(x) -$$

$$-k' * u^{j-1}(x,t) + h(x,t), \quad x \in \Omega, \ t > 0, \tag{17}$$

$$u^j(x,0) = u_0(x), \, x \in \Omega, \quad u^j(x,t) = g(x,t), \, x \in \partial\Omega, \, t > 0.$$

On võimalik tõestada (sellega me siin täpsemalt ei tegele), et ülesandel (17) eksisteerib parajasti üks klassikaline lahend u^j ja kehtib seos

$$u(x,t) = \lim_{j\to\infty} u^j(x,t) \quad \text{iga } x \in \Omega \text{ ja } t > 0 \text{ korral.} \tag{18}$$

Näitame aga, et kehtib järgmine implikatsioon:

$$u^{j-1} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad u^j \geq 0. \tag{19}$$

Tõepoolest, kui $u^{j-1} \geq 0$, siis eelduste $u_0 \geq 0$, $k \geq 0$, $k' \leq 0$ ja $h \geq 0$ tõttu saame

$$ku_0 - k' * u^{j-1} + h \geq 0$$

ja Teoreemi 1 põhjal kehtib ülesande (17) lahendi kohta võrratus $u^j \geq 0$.

Implikatsioonist (19) ja võrdusest $u^0 = 0$ tuleneb, et

$$u^j \geq 0 \quad \text{iga } j = 1, 2, \ldots \text{ korral}$$

ning seosest (18) järeldubki teoreemi väide $u \geq 0$. □

Kirjeldatud positiivsusprintsiipi on artikli autor koostöös K. Kasemetsaga rakendanud paraboolsetele integrodiferentsiaalvõrranditele püstitatud pöördülesannete uurimisel [2].

Teoreemi 2 eelduste hulgas esinevad võrratused $k \geq 0$ ja $k' \leq 0$ resolventtuuma jaoks. Seega tekib küsimus: milliseid tingimusi peab rahuldama tuum m selleks, et resolventvõrrandi (12) lahend k rahuldaks neid võrratusi? Näitame, et need piisavad tingimused on järgmised:

$$m \geq 0\,, \quad \lambda m'(t) \leq -m(0)m(t). \tag{20}$$

Selleks esitame võrrandi (12) lahendi Neumanni reana

$$k = \frac{m}{\lambda^2} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{m}{\lambda} *\right)^i \frac{m}{\lambda^2},$$

kus

$$\left(\frac{m}{\lambda} *\right)^i = \underbrace{\frac{m}{\lambda} * \frac{m}{\lambda} * \ldots \frac{m}{\lambda} *}_{i \text{ korda}} .$$

Kuna $\lambda > 0$, siis sellest reast järeldub implikatsioon $m \geq 0 \ \Rightarrow\ k \geq 0$. Kuna $m * k(0) = 0$, siis võrrandist (12) $t = 0$ korral saame võrduse $k(0) = \frac{m(0)}{\lambda^2}$. Diferentseerime võrrandit (12):

$$k' - \frac{1}{\lambda} m * k' - k(0)\frac{1}{\lambda} m = \frac{1}{\lambda^2} m'.$$

Asendades siin $k(0)$ suurusega $\frac{m(0)}{\lambda^2}$, tuletame järgmise võrrandi k' jaoks:

$$k' - \frac{1}{\lambda} m * k' = \frac{1}{\lambda^2}\left(m' + \frac{m(0)}{\lambda} m\right).$$

Esitame sellegi võrrandi lahendi Neumanni reana

$$k' = \frac{1}{\lambda^2}\left(m' + \frac{m(0)}{\lambda} m\right) + \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{m}{\lambda} *\right)^i \left(m' + \frac{m(0)}{\lambda} m\right).$$

Siit nähtub, et võrratuste $m \geq 0$ ja $m' + \frac{m(0)}{\lambda} m \leq 0$ korral kehtib $k' \leq 0$. Olemegi tõestanud, et tingimused (20) on piisavad võrratuste $k \geq 0$, $k' \leq 0$ jaoks.

Tingimused (20) on pisut rangemad kui füüsikalised võrratused (8) suuruse m jaoks. Eksponentsiaalsete tuumade (9) korral on tingimused (20) täidetud juhul, kui $\lambda\gamma_l \geq \alpha_l \geq 0$, $l = 1, \ldots, N$.

4. Märgi inertsus

Paneme tähele, et Teoreemi 2 eelduste hulgas ei esine soojusallikate tiheduse f positiivust. Selle asemel esineb seal tingimus

$$h = \lambda^{-1} f + k * f \geq 0.$$

Mittetriviaalse k korral on tingimus $h \geq 0$ nõrgem kui $f \geq 0$. See annabki ruumi teatavale temperatuurimärgi inertsusele soojusallikate tiheduse suhtes.

Toome ühe näite. Eeldame, et kehtivad seosed $k \geq 0$, $k' \leq 0$ ja $k \not\equiv 0$. Olgu $t = T$ mingi positiivne aja väärtus ja allikate tihedus f järgmine:

$$f(x,t) \begin{cases} = 1 & \text{kui} \ \ (x,t) \in \Omega \times (0, T-\delta], \\ \in (-\epsilon, 1) & \text{kui} \ \ (x,t) \in \Omega \times (T-\delta, T-\delta/2), \\ = -\epsilon & \text{kui} \ \ (x,t) \in \Omega \times [T-\delta/2, T), \end{cases}$$

kus $\delta \in (0,T)$ ja $\epsilon > 0$. Tõestame, et kui δ ja ϵ on piisavalt väikesed, nii et kehtib võrratus

$$\int_0^{T-\delta} k(t-\tau)d\tau \geq \epsilon \left(\frac{1}{\lambda} + \int_{T-\delta}^{t} k(t-\tau)d\tau \right) \tag{21}$$

iga $t \in (T-\delta, T)$ korral, siis on h positiivne, st

$$h(x,t) \geq 0 \quad \text{iga} \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T) \quad \text{korral.} \tag{22}$$

Tõepoolest, kui $(x,t) \in \Omega \times (0, T-\delta]$, siis on võrratus $h(x,t) \geq 0$ ilmne, sest alampiirkonnas $\Omega \times (0, T-\delta]$ on f positiivne. Edasi olgu $(x,t) \in \Omega \times (T-\delta, T)$. Siis f definitsiooni, k positiivsuse ja võrratuse (21) tõttu

$$\begin{aligned} h(x,t) &= \lambda^{-1} f(x,t) + \int_0^t k(t-\tau) f(x,\tau) d\tau \\ &\geq -\lambda^{-1}\epsilon + \int_0^{T-\delta} k(t-\tau)d\tau - \epsilon \int_{T-\delta}^{t} k(t-\tau)d\tau \geq 0. \end{aligned}$$

Olemegi tõestanud (22). Kui lisaks tingimusele (21) kehtivad eeldused $u_0 \geq 0$ ja $g \geq 0$, siis positiivsusprintsiibi põhjal

$$u(x,t) \geq 0 \quad \text{iga} \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T) \quad \text{korral.}$$

Kokkuvõtteks: antud näites säilib temperatuuri positiivsus ajahetke $t = T$ lähedal, vaatamata sellele, et soojusallikate tihedus muutub $t = T$ lähedal negatiivseks.

Kirjandus

[1] Isakov, V. *Inverse Problems for Partial Differential Equations.* Springer, New York, 1998.

[2] Janno, J., Kasemets, K. *A positivity principle for parabolic integro-differential equations and inverse problems with final overdetermination.* Inverse Problems and Imaging, 2009, **3**, 1, 17–41.

[3] Prüss, J. *Evolutionary Integral Equations and Applications.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.

