Maatrikstuletis ja -integraal

MARGUS PIHLAK
Tallinna Tehnikaülikool

Sissejuhatus

Käesolevas artiklis üldistame tuletise ja integraali mõiste ühemõõtmeliselt juhult mitmemõõtmelisele. Klassikaline matemaatiline analüüs seda üldistust teatavasti ei tee. Tuletist võib vaadelda kui vektorit. Käesolevas artiklis vaatleme tuletisi kui vektoreid $(p \times q)$-vektorruumis. Selle ruumi vektoreid esitame maatriksitena, millel on p rida ja q veergu. Toome lihtsa näite selle käsitluse kohta.

Näide 1. Olgu antud funktsioon $u = xyz$. Funktsiooni u tuletist vaatleme vektorina

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = (yz,\ xz,\ xy).$$

Korrutades vektori $\operatorname{grad} u$ vektoriga $d = (dx, dy, dz)'$ (sümbol $'$ tähendab transponeerimist), saame

$$(\operatorname{grad} u)d = yzdx + xzdy + xydz = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz = du.$$

Integreerides saame $\int du = u$. Demonstreerisime olukorda, kus tuletis on (1×3)-maatriks, integraal aga skalaar.

Eesti Matemaatika Selts Aastaraamat 2009

Selles artiklis üldistame näidet 1 juhule, kus integreeritav avaldis ning integreerimismuutuja on maatriksid. Artiklis viidatakse rohkesti varasematele maatriksalgebra töödele.

1. Tulemusi maatriksalgebrast

Selles alajaotuses esitame maatriksalgebra tulemusi, mis on rakenduslikust seisukohast olulised. Viimase 30–40 aasta jooksul on mitmemõõtmelise statistilise analüüsi areng toimunud käsikäes maatriksalgebra arenguga. Järgnevalt kirjeldame mitmemõõtmelises statistikas kasutatavaid tehteid maatriksitega.

a) Vektoriseerimine. Vektoriseerimise operatsiooni tähistatakse vec. Olgu meil maatriks $\mathbf{X} : p \times q$[2]. Siis

$$\operatorname{vec}\mathbf{X} = (x_{11}, \dots, x_{p\,1}, x_{12}, \dots, x_{p\,2}, \dots, x_{1q}, \dots, x_{p\,q})'.$$

Operatsioon vec teeb maatriksist $\mathbf{X}$ veeruvektori $\operatorname{vec}\mathbf{X}$.

b) Blokkmaatriksid. Blokkmaatriksi defineerimisel kasutame monograafia [4] tähistusi.

Definitsioon 1. Maatriksit $\mathbf{A} : p \times q$ nimetatakse blokkmaatriksiks, kui ta sisaldab of $(p_i \times q_j)$-alammaatrikseid ehk blokke $[\mathbf{A}]_{ij}$, nii et

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [\mathbf{A}]_{11} & [\mathbf{A}]_{12} & \cdots & [\mathbf{A}]_{1v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\mathbf{A}]_{u1} & [\mathbf{A}]_{u2} & \cdots & [\mathbf{A}]_{uv} \end{pmatrix}, \quad \sum_{i=1}^{u} p_i = p\,; \ \sum_{j=1}^{v} p_j = q.$$

Vektoriseerimist ja blokkmaatriksi moodustamist kasutatakse järgnevas maatriksoperatsioonis.

c) Kroneckeri korrutis. Alternatiivsed nimetused sellele operatsioonile on *otsekorrutis* ja *tensorkorrutis*. Kirjeldatavat tehet tähistame sümboliga $\otimes$. Olgu antud maatriksid $\mathbf{X} : p \times q$ ja $\mathbf{Y} : r \times s$.

[2] Nii tähistab autor $(p \times q)$-maatriksit $\mathbf{X}$.

Nende maatriksite *otsekorrutiseks* nimetatakse $(pr \times qs)$-maatriksit $\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}$, mis on defineeritud blokkmaatriksina

$$\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y} = [x_{lj}\mathbf{Y}], \quad l = 1, 2, \ldots, p; \ j = 1, 2, \ldots, q,$$

milles

$$x_{lj}\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} x_{lj}y_{11} & \cdots & x_{lj}y_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{lj}y_{r1} & \cdots & x_{lj}y_{rs} \end{pmatrix}.$$

Otsekorrutist $\mathbf{X}^{\otimes k}$ nimetatakse maatriksi $\mathbf{X}$ k-ndaks *otseastmeks* ([1]).

Lihtne on veenduda, et maatriksite liitmine ja otsekorrutise võtmine on omavahel seotud distributiivselt. Vaatleme järgnevalt maatriksite otsekorrutise seoseid maatriksite korrutamise ja vektoriseerimisega.

Olgu antud maatriksid $\mathbf{A} : p \times q$, $\mathbf{B} : q \times n$, $\mathbf{C} : r \times t$ ja $\mathbf{D} : t \times s$. Siis kehtib seos

$$(\mathbf{AB}) \otimes (\mathbf{CD}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C})(\mathbf{B} \otimes \mathbf{D}).$$

Vektoriseerimise ja otsekorrutise vahel kehtib seos

$$\operatorname{vec}(\mathbf{XYZ}) = (\mathbf{Z}' \otimes \mathbf{X})\operatorname{vec}\mathbf{Y},$$

kus $\mathbf{Z}$ on $(r \times q)$-maatriks, $\mathbf{X}$ on $(p \times s)$-maatriks ja $\mathbf{Y}$ on $(s \times r)$-maatriks.

Tähtkorrutis. See tehe on sisse toodud E. C. MacRae poolt ([3]), kus ta tähtkorrutise tähistusena kasutas sümbolit *. Tähtkorrutise tähendus selgub hiljem, kui käsitleme maatriksintegraali. Peatume sellel tehtel lähemalt.

Maatriksi $\mathbf{A} : p \times q$ ja blokkmaatriksi $\mathbf{B} : pr \times qs$ *tähtkorrutiseks* $\mathbf{A} * \mathbf{B} : r \times s$ nimetatakse maatriksit

$$\mathbf{A} * \mathbf{B} = \sum_{l=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} a_{lj} [\mathbf{B}]_{lj},$$

kus $[\mathbf{B}]_{lj}$ on $(r \times s)$-maatriks.

Toodud definitsioonist järeldub, et tähtkorrutis on teatud mõttes otsekorrutise pöördoperatsioon. Kui otsekorrutis suurendab maatriksi dimensiooni, siis tähtkorrutis vähendab seda. Teisalt võib tähtkorrutist käsitleda kui vektorite skalaarkorrutise üldistust. Tõepoolest, $(1 \times n)$-maatriksi $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$ ja $(n \times 1)$-maatriksi

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

tähtkorrutis avaldub kujul

$$\mathbf{x} * \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

mis vastab klassikalisele skalaarkorrutise definitsioonile.

Loetlesime mitmemõõtmelises statistilises analüüsis enim kasutatavad tehted maatriksitega. Uusimaid tulemusi mitmemõõtmelises statistikas kasutatavast maatriksaparatuurist võib lugeja leida monograafiast [2].

2. Maatrikstuletis

Järgnevalt formuleerime maatrikstuletise mõiste. Esmalt defineerime *Frechet' tugeva tuletise* mõiste. Olgu antud kujutus $f : U \to V$ normeeritud ruumist U normeeritud ruumi V.

Definitsioon 2. Kujutust $f : U \to V$ nimetatakse diferentseeruvaks Frechet' mõttes, kui ta arendub kujul

$$f(x+h) = f(x) + D_x h + \varepsilon(x,h),$$

kus $D_x : U \to V$ on pidev lineaarne operaator ning kehtib seos

$$\lim_{||h|| \to 0} \frac{||\varepsilon(x,h)||}{||h||} = 0.$$

Pidevat lineaarset operaatorit $D_x : U \to V$ nimetatakse kujutuse f *Frechet' tuletiseks* ehk *tugevaks tuletiseks kohal* x. Interpreteerime definitsiooni 2 koordinaatkujul. Olgu U ja V vastavalt $(p \times q)$- ja $(r \times s)$-mõõtmelised vektorruumid ning $f(X) = Y$, kus $X \in U$ ja $Y \in V$. Seega X on maatriks, milles on p rida ning q veergu, Y aga r-realine ja s-veeruline maatriks. Järelikult on maatriks $Y : r \times s$ maatriksi $X : p \times q$ funktsioon. Eeldame, et iga $i = 1, 2, \ldots, p$; $j = 1, 2, \ldots, q$; $k = 1, 2, \ldots, r$ ja $l = 1, 2, \ldots, s$ korral eksisteerivad mingis lahtises hulgas A pidevad osatuletised $\dfrac{\partial y_{kl}}{\partial x_{ij}}$. Siis võime defineerida maatrikstuletise järgmiselt.

Definitsioon 3. *Maatriksit* $\dfrac{d\mathbf{Y}}{d\mathbf{X}} : rs \times pq$ *nimetatakse maatriksi* $\mathbf{Y} : r \times s$ *maatrikstuletiseks maatriksi* $\mathbf{X} : p \times q$ *järgi hulgas* A*, kui*

$$\frac{d\mathbf{Y}}{d\mathbf{X}} = \frac{d}{d\mathrm{vec}'\,\mathbf{X}} \otimes \mathrm{vec}\,\mathbf{Y}$$

kus

$$\frac{d}{d\mathrm{vec}'\,\mathbf{X}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_{11}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{p1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{1q}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{pq}}\right).$$

Definitsiooni 3 esitas H. Neudecker 1969. aastal ([5]). Seda tuletist nimetatakse *Neudeckeri maatrikstuletiseks.* Kuid on olemas veel üks laialt levinud maatrikstuletise mõiste, mille esitas E. C. MacRae ([3]) ja mis säilitab maatriksite struktuuri.

Definitsioon 4. *Maatriksit* $\dfrac{\partial\mathbf{Y}}{\partial\mathbf{X}} : pr \times qs$ *nimetatakse maatriksi* $\mathbf{Y} : r \times s$ *by* $\mathbf{X} : p \times q$ *maatrikstuletiseks hulgas* A*, kui*

$$\frac{\partial\mathbf{Y}}{\partial\mathbf{X}} = \frac{d}{d\mathbf{X}} \otimes \mathbf{Y}$$

kus

$$\frac{d}{d\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{1q}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_{p1}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{pq}} \end{pmatrix}.$$

Definitsioonis 4 esitatud tuletist nimetatakse *MacRae maatrikstuletiseks*. Rakenduste mõttes on olulisem Neudeckeri maatrikstuletis, teoreetilises aspektis aga on tähtsam MacRae maatrikstuletis.

3. Maatriksintegraal

Olgu maatriksid $\mathbf{Y}$ ja $\mathbf{Z}$ maatriksi $\mathbf{X}$ funktsioonid. Defineerime maatriksintegraali.

Definitsioon 5. *Öeldakse, et maatriks* $\mathbf{Y} : r \times s$ *on maatriksi* $\mathbf{Z} : rs \times pq$ *maatriksintegraal maatriksi* $\mathbf{X} : p \times q$ *järgi, kui*

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{Z}.$$

Seega on maatriksintegraal defineeritud kui maatrikstuletise pöördoperatsioon. Maatrikstuletist on põhjalikult uuritud artiklis [6]. Siinkohal anname ülevaate selle maatriksoperatsiooni olemusest ning esitame tehnika, et leida maatrikstuletisest maatriksintegraal. Fakti, et maatriks $\mathbf{Y}$ on maatriksi $\mathbf{Z}$ maatriksintegraal, tähistatakse

$$\int_{\Re^{pq}} \mathbf{Z} \circ d\mathbf{X} = \mathbf{Y}. \tag{1.1}$$

Kui maatriks $\mathbf{Y}$ on maatriksi $\mathbf{Z}$ maatriksintegraal, siis maatriks $\mathbf{Y}+\mathbf{C}$, kus $\mathbf{C}$ on maatriksiga $\mathbf{Y}$ samamõõtmeline konstantne maatriks, on samuti maatriksi $\mathbf{Z}$ maatriksintegraal. Definitsioon 5 on määramata maatriksintegraali definitsioon. Määratud maatriksintegraali saab defineerida järgnevalt.

Definitsioon 6. *Vahet* $\int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \mathbf{Z} \circ d\mathbf{X} = \mathbf{Y}(\mathbf{B}) - \mathbf{Y}(\mathbf{A})$ *nimetatakse maatriksi* $\mathbf{Z}$ *määratud maatriksintegraaliks rajades* $\mathbf{A}$ *kuni* $\mathbf{B}$.

Järgnevalt avaldame tähtkorrutise abil diferentseerimisoperaatori d :

$$d = \begin{pmatrix} dx_{11} & \cdots & dx_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ dx_{p1} & \cdots & dx_{pq} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{1q}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_{p1}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{pq}} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{l=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial}{\partial x_{lj}} \, dx_{lj}$$

Nüüd saame defineerida maatriksdiferentsiaali.

Definitsioon 7. *Maatriksit* $d\mathbf{Y} : r \times s$ *nimetatakse maatriksi* $\mathbf{Y}(\mathbf{X})$ *maatriksdiferentsiaaliks, kui*

$$d\mathbf{Y} = d\mathbf{X} * (\frac{d}{d\mathbf{X}} \otimes \mathbf{Y}).$$

Kehtib teoreem:

Teoreem 1. Olgu $\mathbf{Z} = \dfrac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{X}}$. Siis

$$\int_{\Re^{pq}} \mathbf{Z} \circ d\mathbf{X} = \int_{\Re^{pq}} d\mathbf{X} * \mathbf{Z}.$$

Tõestus. Operaatori d abil esitub maatriksi $d\mathbf{Y}$ maatriksdiferentsiaal järgnevalt ([6]):

$$d\mathbf{X} * \mathbf{Z} = d\mathbf{X} * \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{X}} = d\mathbf{X} * (\frac{d}{d\mathbf{X}} \otimes \mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} dx_{11} & \cdots & dx_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ dx_{p1} & \cdots & dx_{pq} \end{pmatrix} *$$

$$* \begin{pmatrix} \frac{\partial y_{11}}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial y_{1s}}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial y_{11}}{\partial x_{1q}} & \cdots & \frac{\partial y_{1s}}{\partial x_{1q}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_{r1}}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial y_{rs}}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial y_{r1}}{\partial x_{1q}} & \cdots & \frac{\partial y_{rs}}{\partial x_{1q}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_{11}}{\partial x_{p1}} & \cdots & \frac{\partial y_{1s}}{\partial x_{p1}} & \cdots & \frac{\partial y_{11}}{\partial x_{pq}} & \cdots & \frac{\partial y_{1s}}{\partial x_{pq}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_{r1}}{\partial x_{p1}} & \cdots & \frac{\partial y_{rs}}{\partial x_{p1}} & \cdots & \frac{\partial y_{r1}}{\partial x_{pq}} & \cdots & \frac{\partial y_{rs}}{\partial x_{pq}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^{p,q} \frac{\partial y_{11}}{\partial x_{ij}} dx_{i,j} & \cdots & \sum_{i,j=1}^{p,q} \frac{\partial y_{1s}}{\partial x_{ij}} dx_{i,j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^{p,q} \frac{\partial y_{r1}}{\partial x_{ij}} dx_{i,j} & \cdots & \sum_{i,j=1}^{p,q} \frac{\partial y_{rs}}{\partial x_{ij}} dx_{i,j} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} dy_{11} & \cdots & dy_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ dy_{r1} & \cdots & dy_{rs} \end{pmatrix} = d\mathbf{Y}.$$

Seega saame esitada maatriksi $\mathbf{Z}$ maatriksintegraali kujul

$$\mathbf{Y} = \int_{\Re^{pq}} d\mathbf{Y} = \int_{\Re^{pq}} d\mathbf{X} * \mathbf{Z}.$$

Kasutades seost (1.1), saadaksegi teoreemi väites esitatud avaldis.
□

4. Maatriksintegraali omadusi

Tutvustame järgnevalt maatriksintegraali omadusi. Omaduste tõestused on esitatud publikatsioonis [6] ning käesoleva artikli autori doktoritöös ([7]).

Esimesed kaks omadust on ühikmaatriksi maatriksintegraalist ja maatriksintegraali aditiivsusest.

Omadus 1. *Iga maatriksi* $\mathbf{X} : p \times q$ *korral*

$$\int_{\Re^{pq}} \mathbf{I}_{pq} \circ d\mathbf{X} = \mathbf{X},$$

kus $\mathbf{I}_{pq}$ *on* $(pq \times pg)$*-ühikmaatriks.*

Omadus 2. *Olgu* $\mathbf{Y} = \mathbf{U} + \mathbf{V}$. *Siis*

$$\int_{\Re_{pq}} \mathbf{Y} \circ d\mathbf{X} = \int_{\Re_{pq}} d\mathbf{X} \circ \mathbf{U} + \int_{\Re_{pq}} d\mathbf{X} \circ \mathbf{V}.$$

Järgmist omadust saab rakendada diagonaalmaatriksile.

Omadus 3. *Olgu* $\mathbf{A} : pq \times pq$ *konstantne diagonaalmaatriks ja* *olgu* $\mathbf{X} : p \times q$. *Siis*

$$\int_{\Re_{pq}} \mathbf{A} \circ d\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a_{11}x_{11} \\ a_{22}x_{21} \\ \vdots \\ a_{pp}x_{p1} \\ a_{p+1,p+1}x_{12} \\ \vdots \\ a_{pq,pq}x_{pq} \end{pmatrix}.$$

Esimeses kolmes omaduses lähtusime maatrikstuletise definitsioonist 4. Järgmistes omadustes lähtume Neudeckeri maatrikstuletise definitsioonist (definitsioon 3).

Olgu antud pidev funktsioon $g(\mathbf{x})$, mille argumendiks on p-vektor $\mathbf{x}$. Eeldame, et $g(\mathbf{x})$ on k korda pidevalt diferentseeruv mingis lahtises piirkonnas A. Tähistame funktsiooni $g(\mathbf{x})$ k-ndat järku tuletist $g^{(k)}(\mathbf{x})$ ning p-vektorite $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ skalaarkorrutist kujul $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}'\mathbf{b}.$$

Tähistagem

$$\mathbf{1}_p = \underbrace{(1, 1, ..., 1)'}_{p \text{ times}}$$

ning defineerime operaatorid

$$\frac{d}{{}_s d\mathbf{x}} = \sum_{l=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_l} \tag{1.2}$$

ja

$${}_s d\mathbf{x} := \sum_{l=1}^{p} dx_l. \tag{1.3}$$

Operaatoreid (1.2) ja (1.3) nimetatakse vastavalt *skalaarseks diferentseerimise operaatoriks* ja *skalaarseks diferentsiaaloperaatoriks.*

Nendes tähistustes võime kirja panna järgmised maatriksintegraali omadused.

Omadus 4. *Kehtib seos*

$$\int_{\Re_p} g^{(k+1)}(\mathbf{x}) \circ d\mathbf{x} = (g^{(k)}(\mathbf{x}))\,'.$$

Omadus 5. *Olgu* $\mathbf{A} : n \times p^{k-1}$ *konstantne maatriks ja* A_l selle maatriksi l. reavektor ($l = 1, 2, \ldots, n$). *Siis*

$$\int_{\Re^p} \mathbf{A} g^{(k)}(\mathbf{x}) \circ d\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} (A_1, \operatorname{vec} g^{(k-1)}(\mathbf{x})) \\ \vdots \\ (A_n, \operatorname{vec} g^{(k-1)}(\mathbf{x})) \end{pmatrix}.$$

Omadus 6. *Olgu a vektorist* $\mathbf{x}$ *sõltumatu skalaar. Siis*

$$\int_{\Re^p} \left(\frac{d}{d\mathbf{x}'}, \mathbf{1}_p \right) a g(\mathbf{x}) \circ ({}_s d\mathbf{x}) = a g(\mathbf{x}).$$

Järgmine omadus üldistab omadust 6.

Omadus 7. *Olgu a vektorist* $\mathbf{x}$ *sõltumatu skalaar. Siis*

$$\int_{\Re^p} \left(\frac{d}{d\mathbf{x}'}^{\otimes k}, \mathbf{1}_{p^k} \right) a g^{(k)}(\mathbf{x}) \circ ({}_s d\mathbf{x}) =$$

$$= \int_{\Re^p} \left(\frac{d}{d\mathbf{x}'}^{\otimes k-1}, \mathbf{1}_{p^{k-1}} \right) a g^{(k-1)}(\mathbf{x}),$$

kus $k = 1, 2, \ldots$.

Omadus 8. *Olgu funktsioonid g ja G sellised, et*

$$g(\mathbf{x}) = \frac{\partial^p G(\mathbf{x})}{\partial x_1 \ldots \partial x_p}.$$

Siis

$$\underbrace{\int \ldots \int}_{p} g(\mathbf{x}) dx_1 \ldots dx_p = \int_{\Re^p} \frac{d}{{}_s d\mathbf{x}} G(\mathbf{x}) \circ ({}_s d\mathbf{x}).$$

Omadusest 8 järeldub järgmine omadus.

Omadus 9. *Olgu* **a** *konstantne p-vektor. Siis*

$$\underbrace{\int \cdots \int}_{p} \left(\mathbf{a}, \frac{d}{d\mathbf{x}}^{\otimes k}\right) g(\mathbf{x}) dx_1 \ldots dx_p = \left(\mathbf{a}, \frac{d}{d\mathbf{x}}^{\otimes k}\right) G(\mathbf{x}).$$

Maatriksintegraali omadusi 4–9 on rakendatud tundmatu mitmemõõtmelise jaotusfunktsiooni lähendamisel tuntud jaotusfunktsiooniga ([8]).

5. Näiteid

Lõpuks toome mõningaid näiteid demonstreerimaks, kuidas töötab maatriksintegraal. Esmalt näitame, kuidas leida tähtkorrutise abil maatriksintegraali.

Näide 2. Olgu antud maatriksid

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2) \;\; \text{ja} \;\; \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1^2 + \dfrac{x_1}{x_2} \end{pmatrix}.$$

Tähtkorrutise abil saadakse

$$d\mathbf{X} * \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{X}} = (dx_1, dx_2) * \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1 x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial x_1 x_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial (x_1^2 + \frac{x_1}{x_2})}{\partial x_1} & \frac{\partial (x_1^2 + \frac{x_1}{x_2})}{\partial x_2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_2 dx_1 + x_1 dx_2 \\ (2x_1 + \frac{1}{x_2}) dx_1 - \frac{1}{x_2^2} dx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx_1 x_2 \\ d(x_1^2 + \frac{x_1}{x_2}) \end{pmatrix}.$$

Siit saab ilmutada maatriksi **Y**:

$$\mathbf{Y} = \int_{\Re^{pq}} \begin{pmatrix} d(x_1 x_2) \\ d(x_1^2 + \frac{x_1}{x_2}) \end{pmatrix}.$$

Järgnevalt konstrueerime näite määramata maatriksintegraalist.

Näide 3. Olgu antud maatriks $\mathbf{X} = (x_1, x_2)$ ning olgu maatriks

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_2^3 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix}$$

maatriksi $\mathbf{Y}$ maatrikstuletis maatriksi $\mathbf{X}$ järgi. Siis

$$\mathbf{Y} = \int_{\Re^2} d\mathbf{X} * \mathbf{Z} = \int_{\Re^2} (dx_1, dx_2) * \begin{pmatrix} x_1^2 & x_2^3 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \int_{\Re^2} \begin{pmatrix} x_1^2 dx_1 + x_2^3 dx_2 \\ 2x_1 dx_1 + 2x_2 dx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1^3}{3} + \frac{x_2^4}{4} + c_1 \\ x_1^2 + x_2^2 + c_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x_1^3}{3} + \frac{x_2^4}{4} \\ x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix} + \mathbf{C},$$

kus

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Kolmandas näites leiame määratud maatriksintegraali.

Näide 4. Olgu antud maatriksid $\mathbf{X} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$,

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} x_3 \cos x_1 \cos x_2 & -x_3 \sin x_1 \sin x_2 & \sin x_1 \cos x_2 \\ x_3 \cos x_1 \sin x_2 & x_3 \sin x_1 \cos x_2 & \sin x_1 \sin x_2 \\ -x_3 \sin x_1 & 0 & \cos x_1 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{A} = (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, -1)$ ja $\mathbf{B} = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 1)$. Leiame määratud maatriksintegraali $\int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \mathbf{Z} \circ d\mathbf{X}$:

$$\int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \mathbf{Z} \circ d\mathbf{X} = \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} (dx_1,\ dx_2,\ dx_3) *$$

$$* \begin{pmatrix} x_3 \cos x_1 \cos x_2 & -x_3 \sin x_1 \sin x_2 & \sin x_1 \cos x_2 \\ x_3 \cos x_1 \sin x_2 & x_3 \sin x_1 \cos x_2 & \sin x_1 \sin x_2 \\ -x_3 \sin x_1 & 0 & \cos x_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} x_3 \cos x_1 \cos x_2 dx_1 - x_3 \sin x_1 \sin x_2 dx_2 + \sin x_1 \cos x_2 dx_3 \\ x_3 \cos x_1 \sin x_2 dx_1 + x_3 \sin x_1 \cos x_2 dx_2 + \sin x_1 \sin x_2 dx_3 \\ -x_3 \sin x_1 dx_1 + \cos x_1 dx_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} \\ 2 \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\sin(-\frac{\pi}{2}) \cos(-\frac{\pi}{2}) \\ -\sin(-\frac{\pi}{2}) \sin(-\frac{\pi}{2}) \\ -2 \cos(-\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Kirjandus

[1] Kollo, T. (1991) *Maatrikstuletis mitmemõõtmelises statistikas.* Tartu Ülikooli Kirjastus, Tartu (vene keeles).

[2] Kollo, T., von Rosen, D. (2005) *Advanced Multivariate Statistics with Matrices.* Springer, Dordrecht.

[3] MacRae, E. C. (1974) Matrix derivatives with an applications to an adaptive linear decision problem. *The Annals of Statistics*, **7**, 381–394.

[4] Magnus, J. R., Neudecker, H. (1999) *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics.* Wiley Series in Probability and Statistics.

[5] Neudecker, H. (1969) Some theorems on matrix differentiations with special reference to Kronecker matrix products. *Journal of the American Statistical Association*, **64**, 953–963.

[6] Pihlak, M. (2004) Matrix integral. *Linear Algebra and Its Applications*, **388**, 315–325.

[7] Pihlak, M. (2007) *Approximation of multivariate distribution functions.* Dissertationes Mathematicae Universitatis Tartuensis 50. Tartu: Tartu University Press; Tartu: Univ. Tartu, Faculty of Mathematics and Computer Science (Dissertation).

[8] Pihlak, M. (2008). Approximation of Multivariate Distribution Functions. *Mathematica Slovaca*, **58**(5), 635–652.

