

# Pythagorase koma

EBU TAMM  
Tallinna Tehnikaülikool



Pythagorase teoreemi mäletavad kõik põhikoolis käinud inimesed, või peaaegu kõik. Kreeka matemaatik, filosoof ja teoloog PYTHAGORAS sündis umbes 580 aastat eKr praegu Türgile kuulaval Samose saarel, kuid oma kooli asutas ta Lõuna-Itaalias Krotonis. See kool tegeles algebra, geomeetria, astronoomia ja muusikaga, lisaks veel ka grammatika, loogika ja retoorikaga. Pütaagorlaste filosoofia põhitees oli *kõik on arv* ehk *arvud valitsevad maailma*. Mis tahes esemele või nähtusele omistati mingi arv ja ka vastupidi, igale arvule omistati esemeid ja nähtusi. Näiteks arv 1 tähendas põhjust, punkti, püramiidi, inimest, ..., arv 2 arusaama, joont, õhku, oktaeedrit, suve, ... jne. Arv 10, mis on nelja esimese naturaalarvu summa, omistati universumile. Paarisarvud olid naissoost (femiinised) ja paaritud arvud meessoost (maskuliinsed).

*Kolmnurkarvudeks* nimetati naturaalarve, mis avalduvad summana  $1 + 2 + \dots + k$ . *Nelinurkarvud* olid naturaalarvude ruudud. Kahte arvu nimetati *sõbralikeks*, kui ühe arvu pärisjagajate (st arvust endast erinevate jagajate) summa võrdub teise arvuga ja vastupidi. Näiteks arvud 220 ja 284 on sõbralikud, sest arvu 220 pärisjagajad on 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 ning nende summa on 284 ja arvu 284 pärisjagajad on 1, 2, 4, 71, 142 ning

nende summa on 220. Arv oli *täiuslik*, kui ta on võrdne oma pärisjagajate summaga. Täiuslikud arvud on näiteks arv 6, mis on oma pärisjagajate 1, 2 ja 3 summa, arv 28, sest  $28=1+2+4+7+14$ , aga ka 496 ja 8128. Kui arv oli pärisjagajate summast väiksem, nimetati arvu *liiaga arvuks*, vastasel juhul *puuduga arvuks*.

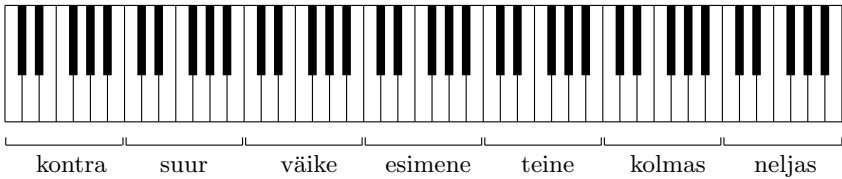
Arv oli pütaagorlastele kahe täisarvu suhe. See tähendab, et pütaagorlased tundsid küll ratsionaalarve, kuid mitte irratsionaalarve. Olemasolevate teadmiste põhjal kerkis pütaagorlaste ette lahendamatu ülesanne: ühikruudu diagonaalile ei saanud omistada ühtegi arvu, mida saaks esitada kahe täisarvu suhtena. Läks sajandeid, enne kui ratsionaalarvude valda laiendati irratsionaalarve lisades reaalarvudeni ja  $\sqrt{2}$  sai eksisteerimisõiguse.

Pythagorase koolkond tegeles ka muusikaga. Huvitaval kombel on omavahel seotud Pythagorase arusaamine muusikast, irratsionaalarvud ja klaveri häälestus, viimane neist muusikaliselt alati vigane. Pythagoras märkas, et kui sepp lõi oma haamriga alasi pihata, siis heli kõrgus sõltus haamri raskusest. Kuna maailma valitsesid arvud, siis ka igale helikõrgusele sai omistada arvu – haamri raskuse. Veel enam, arve oskasid nad omistada ka helikõrguste suhetele ehk intervallidele. Kui täispikkusega vibreeriv keel vajutada keskelt kinni, siis saadud kaks korda lühem keel tekitab kõrgema heli ning nende kahe helikõrguse suhtele oli loomulik omistada arv  $\frac{1}{2}$ . Tänapäeval me ütleme, et nende helide kõrguste suhe ehk helidevaheline intervall on üks oktaav. Helid, mille intervall on üks või mitu oktaavi, kõlavad häält tekitades hästi kokku. Ükskõik millisest helikõrgusest ka alustada, sellest oktaav kõrgema heli puhul võngub keel kaks korda suurema sagedusega kui esialgse helikõrguse puhul. Üldisemalt, kui mingi helitekitaja võngub sagedusega  $h$ , siis oktaav kõrgema heli tekitaja võngub sagedusega  $2h$ , st vastavate sageduste suhe on 2.

Pütaagorlased tundsid kindlasti veel intervalle, mille sageduste suhted on  $\frac{5}{4}$  (nüüdisaja terminoloogias ligikaudu väike tert),  $\frac{4}{3}$  (kvart),  $\frac{3}{2}$  (kvint) ja  $\frac{5}{3}$  (sekst). Kui keel vajutada kinni nii, et ühe osa pikkus on  $\frac{2}{3}$  ja teise osa pikkus  $\frac{1}{3}$  ning panna võnkuma pikem osa, saame esialgse heliga võrreldes jälle kõrgema heli. Nende



kahe heli vahelist intervalli nimetatakse *puhtaks kvindiks* ja nende sageduste suhe on  $3/2=1,5$ . Viiuli neli keelt häälestatakse nii, et naaberkeelte poolt tekitatud helide vaheline intervall on puhas kvint. Viiuliga on võimalik tekitada mis tahes sagedusega heli kindlast sagedusvahemikust. Klaveri kui klahvpilli puhul seda võimalust ei ole. Tavalisel klaveril on valgeid ja musti klahve kokku 84 ja täpselt nii palju on võimalik saada eri kõrgusega helisid.



Klaveri igale klahvile vastav keel on häälestatud nii, et see võnkumisel tekitaks sellele klahvile ette nähtud sagedusega heli. Kaua aega kujutas klaveri häälestamine suurt probleemi, mis on põhjustatud kahe intervalli – oktaavi ja puhta kvindi vahelisest (eba)kooskõlast. Vähim intervall, mida lääne muusikas kasutatakse, on pooltoon. Klaveril vastab pooltoonile mis tahes kaks kõrvuti asuvat klahvi. Oktaav koosneb kaheteistkümnest pooltoonist ja kvint seitsmest pooltoonist. Klaveri klahvistikul ehk klaviatuuril saab kõige madalamale helile vastavalt klahvilt kõige kõrgemale helile vastavale klahvile astuda võrdse sammuga mitmel erineval viisil. Kui astuda intervalliga üks oktaav, tuleb samme teha 7. Vastaku esimesele (klaveri kõige madalamale) klahvile helisagedus  $h$ , siis viimasele, klaveri kõige kõrgemale klahvile vastab sagedus  $2^7h = 128h$ . Oktaavihüpete asemel saab kõige madalamalt klahvilt kõige kõrgemale hüpata ka kvindipikkuste sammudega. Kvint sisaldab 7 pooltooni, seega, kui alustada jälle kõige esimesest klahvist, peame tegema

84:7=12 hüpet. Kui lähtuda eeldusest, et kvint vastab sageduste suhtele  $\frac{3}{2} = 1,5$ , siis klaviatuuri ühest servast teise mööda kvinte liikudes saame, et viimase ja esimese klahvi sageduste suhe on  $1,5^{12}h$ . Seega suhe  $\frac{1,5^{12}}{2^7} = 1,013643265$ , mis tähendab, et kõige kõrgema klahvi keel peab üheaegselt võnkuma sagedustega 128 ja 129,75, mis pole võimalik. Arvude  $1,5^{12}$  ja  $2^7$  suhet nimetatakse *Pythagorase komaks* ja klaverit ei ole võimalik häälestada nii, et kõikide oktaavide sageduste suhe on 2 ja samal ajal kõikide kvintide sageduste suhe on 1,5. Nimetatud vastuolu lahendati 17. sajandil ANDREA WERKMEISTERI poolt, kes tegi kvindi väiksemaks.

Tänapäeva klaveri häälestus on tempereeritud, st kõikide kvintide sageduste suhe on 1,4983 õige suhte 1,5 asemel. Kirjandusest võib leida vihjeid, et GEORG FRIEDRICH HÄNDEL ei leppinud tempereerimise tekitatud mustade intervallidega ja tahtis, et orelile oleks lisatud lisavilesid. JOHANN SEBASTIAN BACH seevastu võttis aga uuenduse meelsasti vastu ja kirjutas isegi klaveripalade tsükli "Hästitempereeritud klaver".

Lõpuks arvutame veel pooltooni sageduste suhte. Selleks, et jõuda mis tahes klahvilt üks oktaav kõrgemale, tuleb teha 12 sammu ehk pooltooni. Kui mingi kindla klahvi tekitatud heli on sagedusega  $h$ , siis eeldades, et kõikide pooltoonide sageduste suhe  $h_0$  on üks ja seesama, saame, et pooltooni helide sageduste suhe peab olema  $\sqrt[12]{2}$ . Tõepoolest,  $2h = h \cdot h_0^{12}$ , millest saamegi  $h_0 = \sqrt[12]{2}$ . Kui Pythagorasel oleks olnud käes tänapäeva klaver, siis ei oleks ta kuidagimoodi osanud omistada pooltoonilisele intervallile ühtegi arvu, sest  $\sqrt[12]{2}$  on irratsionaalarv ja ei avaldu kahe täisarvu suhtena.