Mitmemõõtmelisest asümmeetrilisest Laplace'i jaotusest

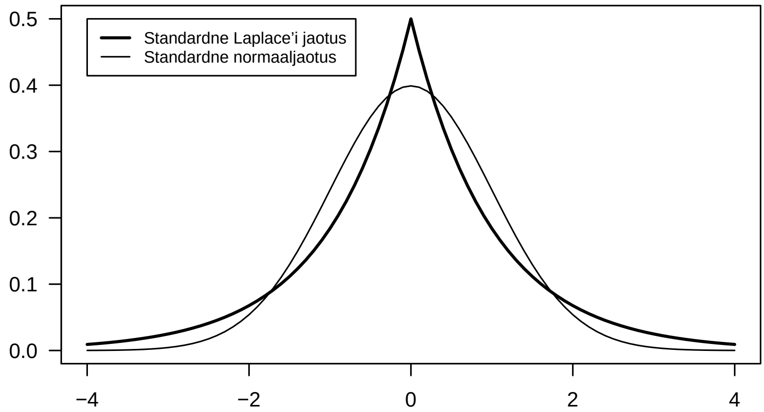
HELLE VISK[1]
Tartu Ülikool

Laplace'i jaotuse ajaloost

Prantsuse matemaatik PIERRE-SIMON LAPLACE (1749–1827) uuris mõõtevigade jaotumist. Ta märkas, et suuremaid vigu esineb harvem ning leidis, et vea sagedus võiks olla eksponentfunktsioon vea suurusest ([7]). Statistika keeles pakkus ta välja tihedusfunktsiooni kujul $ce^{-|x|}$. Neli aastat hiljem arvas ta, et sagedus võiks pigem olla funktsioon vea ruudust (ce^{-x^2}). Tänapäeval kannab esimesena välja pakutud jaotus Laplace'i nime, teist tunneme Gaussi või normaaljaotuse nime all.

Kaht jaotust võrdleb joonis 1.1. Laplace'i jaotusele on iseloomulik terav tipp ja normaalsest raskemad sabad, seega sobib see hästi selliste andmete matemaatiliseks mudeliks, mille seas pole ka keskmisest kauged väärtused väga haruldased. Näiteks kasutatakse Laplace'i jaotust väikeste osakeste mõõtmete, valuuta vahetuskursside, intressimäärade jaotuste kirjeldamiseks.

[1]Helle Visk on 2009. a Arnold Humala preemia laureaat.



Joonis 1.1: Standardse Laplace'i jaotuse tihedusfunktsioon $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Võrdluseks on standardse normaaljaotuse tihedusfunktsioon $g(x) = \frac{1}{2}e^{-x^2/2}$.

Et reaalses elus on paljud andmed oma loomult asümmeetrilised (näiteks on vaeseid rohkem kui rikkaid), peavad ka andmeid kirjeldavad mudelid suutma seda asümmeetriat arvesse võtta. Asümmeetriliste jaotustega hakati tõsisemalt tegelema 1960–1970ndatel. Paljud klassikalised jaotused, nende seas ka Laplace'i jaotus, üldistati asümmeetriat võimaldavateks.

Praktikas on sageli vajadus vaadelda mitut tunnust korraga. Näiteks börsil kauplejat huvitab mitte ainult ühe aktsia, vaid terve portfelli käekäik. Naiivne oleks eeldada, et aktsiate hinnad muutuvad üksteisest sõltumatult. See on ülesanne mitmemõõtmelisele statistikale ning mitmemõõtmelistele jaotustele. Mitmemõõtmeliste asümmeetriliste jaotuste ajalugu pole kuigi pikk, need tõusid statistikute huviorbiiti alles 1990ndatel. 1996. aastal ilmus A. Azzalinilt mitmemõõtmelist asümmeetrilist normaaljaotust tutvustav artikkel [1]. Mitmemõõtmelise asümmeetrilise Laplace'i jaotuse tõi sisse T. J. Kozubowski töös [6], jaotust on käsitletud ka monograafias [5]. Antud jaotust uuris autor oma magistritöös [2], mis pälvis 2009. aastal Arnold Humala preemia.

Mitmemõõtmeline asümmeetriline Laplace'i jaotus

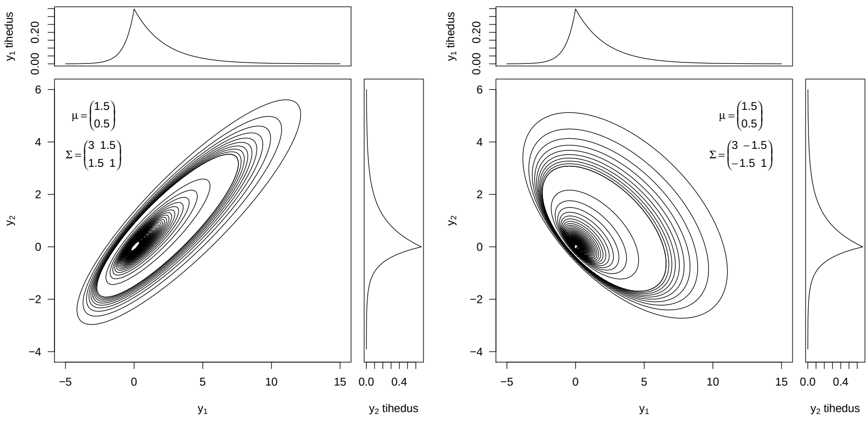
Mitmemõõtmeline asümmeetriline Laplace'i jaotus defineeritakse karakteristliku funktsiooni kaudu.

Definitsioon 1. *Olgu $\boldsymbol{\mu}$ p-vektor ja $\boldsymbol{\Sigma}$ positiivselt määratud $(p\times p)$-maatriks. Öeldakse, et juhuslik vektor $\mathbf{x}$ on p-mõõtmelise asümmeetrilise Laplace'i jaotusega, kui $\mathbf{x}$ karakteristlik funktsioon on*

$$\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \left[1 - i\,\mathbf{t}^T\boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}\mathbf{t}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}\right]^{-1},$$

lühidalt $\mathbf{x} \sim L_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Jaotus- ja tihedusfunktsioon pole kahjuks analüütilised. Joonisel 1.2 on kahe kahemõõtmelise Laplace'i jaotuse kontuurgraafikud koos komponentide jaotustega (komponendid on ühemõõtmelise Laplace'i jaotusega).



Joonis 1.2: Valik Laplace'i jaotuse kujusid.

Jaotuse simuleerimiseeskiri on lihtne. Leiduvad ka momendid, mis raskesabalise jaotuse korral pole sugugi elementaarsed. Esimese kolme momendi (keskväärtus, dispersioon, kolmas moment, mis näitab asümmeetriat) avaldised on järgmised ([3]):

$$\begin{aligned} E\mathbf{x} &= \boldsymbol{\mu}, \quad D\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T + \boldsymbol{\Sigma}, \\ m_3(\mathbf{x}) &= 6\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T + 2\mathrm{vec}\boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\mu}^T + 2\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\Sigma} + 2\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\mu}, \end{aligned}$$

kus $\otimes$ tähistab maatriksite otsekorrutist ehk Kroneckeri korrutist (maatriksalgebraga tutvumiseks sobivad õpikud [4], [9]).

Momentide avaldistest on selged ka parameetrite tähendused: $\boldsymbol{\mu}$ määrab jaotuse keskväärtuse ning reguleerib asümmeetriat (kui $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, siis jaotus on sümmeetriline); $\boldsymbol{\Sigma}$ reguleerib hajuvust.

Lineaarsed teisendused kuuluvad samasse peresse, kuid Laplace'i jaotuse nihutamisel satume jaotuste perest välja, s.o antud definitsiooni järgi asuvad kõik Laplace'i jaotused tipuga punktis 0.

Oma töös üldistasin Laplace'i jaotust praktika jaoks sobivamaks, nihutades seda konstantse vektori võrra.

Definitsioon 2. *Olgu* $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{a}$, kus $\mathbf{x} \sim L_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ *ning* $\mathbf{a}$ *on suvaline* p*-vektor. Siis* $\mathbf{y}$ *on nihutatud* p*-mõõtmelise asümmeetrilise Laplace'i jaotusega,*

$$\mathbf{y} \sim L_p(\mathbf{a}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}).$$

Uue jaotuse karakteristlik funktsioon on

$$\varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{t}) = \frac{e^{i\mathbf{t}^T\mathbf{a}}}{1 - i\,\mathbf{t}^T\boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}\mathbf{t}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}.}$$

Paljud uue jaotuse omadused (jaotus- ja tihedusfunktsioon, lineaarsed teisendused, simuleerimiseeskiri) on lihtsalt tavaliselt Laplace'i jaotuselt üle võetavad. Oma töös leidis autor ka uue jaotuse momendid.

Lause 1. *Olgu juhuslik vektor* $\mathbf{y} \sim L_p(\mathbf{a}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. *Juhusliku vektori* $\mathbf{y}$ *keskväärtus, dispersioon ja kolmas moment avalduvad järgmiselt:*

$$\begin{aligned} E\mathbf{y} &= \boldsymbol{\mu} + \mathbf{a}, \quad D\mathbf{y} = \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T + \boldsymbol{\Sigma}, \\ m_3(\mathbf{y}) &= (\boldsymbol{\mu} + \mathbf{a}) \otimes \mathbf{a}\mathbf{a}^T + (2\boldsymbol{\mu} + \mathbf{a}) \otimes \boldsymbol{\mu}\mathbf{a}^T + \\ &+ (2\boldsymbol{\mu} + \mathbf{a}) \otimes \mathbf{a}\boldsymbol{\mu}^T + (6\boldsymbol{\mu} + 2\mathbf{a}) \otimes \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T + \\ &+ \mathrm{vec}\boldsymbol{\Sigma} \cdot (2\boldsymbol{\mu} + \mathbf{a})^T + (2\boldsymbol{\mu} + \mathbf{a}) \otimes \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\Sigma} \otimes (2\boldsymbol{\mu} + \mathbf{a}). \end{aligned}$$

Parameetrite hindamine

Laplace'i jaotuse sobitamiseks andmetega on etteantud valimist vaja hinnata jaotuse parameetreid $\mathbf{a}$, $\boldsymbol{\mu}$ ja $\boldsymbol{\Sigma}$. Levinud suurima tõepära meetodit on siin keeruline kasutada, kuna tihedusfunktsioon pole analüütiline. Kuna Laplace'i jaotusel eksisteerivad momendid, siis saab kasutada momentide meetodit. Selleks tuleb leida parameetrite esitused momentide kaudu, mis sisuliselt tähendab (maatriks)võrrandisüsteemi lahendamist.

Oma töös lahendas autor selle võrrandisüsteemi, taandades selle kuupvõrrandile. Lahendi kirjapanekuks vajame maatriksite *tähtkorrutise* mõistet ([8]).

Definitsioon 3. *Olgu* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ $(p \times q)$*-maatriks ning* $\mathbf{B}$ $(pr \times qs)$*-maatriks, mis koosneb* $(r \times s)$*-plokkidest* $\mathbf{B}_{ij}$, $i = 1, \dots, p$; $j = 1, \dots, q$. *Maatriksite* $\mathbf{A}$ *ja* $\mathbf{B}$ *tähtkorrutis on* $(r \times s)$*-maatriks*

$$\mathbf{A} \star \mathbf{B} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} a_{ij} \mathbf{B}_{ij}.$$

Olgu $\mathbf{y} \sim L_p(\mathbf{a}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ning $\mathbf{y}$ momentide elementide summad

$$M = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \,, \quad S = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} (D\mathbf{y})_{ij}, \quad H = \sum_{i=1}^{p^2} \sum_{j=1}^{p} (\overline{m}_3(\mathbf{y}))_{ij}.$$

Siis on parameetrid momentide kaudu leitavad järgmiselt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &= \frac{1}{S - M^2} \left(\mathbf{1}_{p \times p} \star \overline{m}_3(\mathbf{y}) - 2M \cdot D\mathbf{y} \mathbf{1}_p \right), \\ \boldsymbol{\Sigma} &= D\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T, \\ \mathbf{a} &= E\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}, \end{aligned}$$

kus tundmatu M avaldub

$$M = -\frac{z}{4} - \frac{S}{z} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \left(\frac{z}{2} - \frac{2S}{z} \right), \quad z = \sqrt[3]{-4H + 4\sqrt{H^2 - 4S^3}}.$$

Siin tähistab **1** ühtedest koosnevat maatriksit ja $\overline{m}_3(\mathbf{y})$ kolmandat tsentraalset momenti.

Momentide meetodi testimiseks viis autor läbi simulatsioonieksperimendid. Sümmeetrilisel juhul töötab meetod hästi – õige väärtuse lähedale tabamise tõenäosus on suur, hinnangud on keskmiselt õiged ja koonduvad valimi suurenedes.

Asümmeetrilisel juhul tekkisid aga probleemid.

- Kuupvõrrandi lahend peaks teoreetiliselt olema reaalne, kuid praktikas võime valimilt saada ka kompleksse lahendi. Samuti ei pruugi valimist hinnatud $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ olla positiivselt määratud.
- Hinnangute jaotused on väga suure hajuvusega, kusjuures õige väärtuse tabamise tõenäosus võib olla väga väike.
- Ebareaalsete hinnangute teke on seotud väga suurte/väikeste väärtuste esinemisega valimis, sest momendid on nende suhtes tundlikud.

Alternatiivina pakkusin töös välja nn moodide meetodi, mis kasutab ära asjaolu, et Laplace'i jaotuse mood (s.o jaotuse kõrgeim tipp) asub punktis $\mathbf{a}$. Ülejäänud parameetrid saab valimi $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ jaoks leida valemitest

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\mu}} &= \overline{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{a}}, \quad \text{kus } \overline{\mathbf{y}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{y}_i, \\
\hat{\mathbf{\Sigma}} &= \widehat{D\mathbf{y}} - \hat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\boldsymbol{\mu}}^T, \quad \text{kus } \widehat{D\mathbf{y}} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{y}_i - \overline{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \overline{\mathbf{y}})^T.
\end{aligned}$$

Et siin pole vaja kasutada kolmandat momenti, on meetod stabiilsem ning komplekssete lahendite teke on välistatud. Sümmeetrilisel või kergelt asümmeetrilisel juhul on aga traditsiooniline momentide meetod siiski täpsem.

Antud töö põhjal on ilmunud artikkel [10].

Kirjandus

[1] Azzalini, A., Dalla Valle, A. *The multivariate skew-normal distribution.* Biometrika, **83**, 1996, 715–726.

[2] Kilgi, H. *Nihutatud mitmemõõtmeline asümmeetriline Laplace'i jaotus.* Magistritöö. Tartu Ülikool, Matemaatilise statistika instituut, 2007.

[3] Kollo, T., Srivastava, M. *Estimation and testing on multivariate Laplace distribution.* Communications in Statistics: Theory and Methods, **33**, 2004, 2363–2387.

[4] Kollo, T., Rosen, D. von. *Advanced Multivariate Statistics with Matrices.* Springer, Dordrecht, 2005.

[5] Kotz, S., Kozubowski, T. J., Podgórski, K. *The Laplace Distribution and Generalizations: A Revisit with Applications to Communications, Economics, Engineering, and Finance.* Birkhäuser, Boston, 2001.

[6] Kozubowski, T. J., Podgórski, K. *A multivariate and asymmetric generalization of Laplace distribution.* Comput. Statist., **4**, 2000, 531–540.

[7] Laplace, P. S. *Mémoire sur la probabilité des causes par les événements.* Mémoires de Mathématique et de Physique, Presentés à l'Académie Royale des Sciences, par divers Savans et lûs dans ses Assamblées, **6**, 1774, 621–656.

[8] MacRae, E. C. *Matrix derivatives with an application to an adaptive linear decision problem.* The Annals of Statistics, **2**, 1974, 337–346.

[9] Schott, J. R. *Matrix Analysis for Statistics.* John Wiley & Sons, New York, 1997.

[10] Visk, H. *On the parameter estimation of the asymmetric multivariate Laplace distribution.* Communications in Statistics – Theory and Methods, **38**(4), 2009, 461–470.

