Lugedes Henri Poincaré mõtteid

Maido Rahula
Tartu Ülikool

On heameel tõdeda, et Henri Poincaré *„Viimased mõtted“* on kirjastuse Akadeemia heal ettevõtmisel nüüd eestikeelse tekstina lugejani jõudnud. Kui me loeme neid ridu, mis 100 aastat tagasi on suure matemaatiku, füüsiku ja filosoofi, lugupeetud akadeemiku käe alt tulnud, ajendab meid tahtmine tajuda aja kulgu ning mõista nende avastuste, mis kunagi on vapustanud kogu mõttemaailma, aktuaalsust ja invariantsust.

Tõed on enamasti suhtelised. Mingi lause võib täna tunduda tõena, kuid homme teistes oludes ja teistes tingimustes tuleks siin midagi lisada või midagi ära jätta, et meie endine väide saaks täiuslikuma väljendi. Nii võib välja kujuneda seadus, mis jääb püsima kauemaks. Aeg aga näitab, kas meie seadus leiab kinnitust reaalsuses või mõni eksperiment toob esile selle nõrgad küljed ja puudulikkuse.

Esile kerkivad loogika reeglid, millele vastavalt me ehitame teooriaid. Samuti selgub nende vahendite, mille abil me tahame tungida Looduse saladustesse kõlblikkus ja sobivus. Olgu nendeks siis matemaatilised võrrandid või mõned peenemad mõõteriistad. Esiplaanile kerkib epistemoloogiline lähenemine, kuidas üleüldse suhtuda teooriasse ja selle pragmaatilisse tähendusse.

Kuna aga absoluutne tõde on väljaspool inimloogikat, siis me ehitame teoreetilisi süsteeme tinglikul kõneviisil *„kui …, siis …“*, tähendab, et antud eeldustel, mida nimetatakse aksioomideks, kehtib meie väide või toimub mingi protsess. Teatavasti, iga aksioomide süsteem peab olema mittevasturääkiv, sõltumatu ja täiuslik, kuid *„asi on hää, kui ta on tarvilik“*. Seda peab ilmselt silmas H. Poincaré, tähtsustades teadlase tegevuses eelkõige seda intuitiivset alget, mis on igale meist nii loomupärane. Analüüsides Zermelo, Russeli ja Hilberti aksiomaatikaid, ta annab neile omapoolse hinnangu, kuid pangem tähele, Zermelo süsteemi ta suhtub võrdlemisi jahedalt. Me loeme, vt lk 2111: ,,*Hr Zermelo ei ole tõestanud, et tema aksioomid oleksid vabad vasturääkivustest ... ta lähtub oletusest, et kehtestatud tõdesid, valmis teadust ei ole; ta teeb laua puhtaks ja tahab, et kõik järelduks iseenesest tema aksioomidest.*" Kaitstes Cantorit, keda me täna tunneme hulgateooria rajajana, ZERMELO rünnaku vastu, vt lk 2112: ,,*On vaja, et me teaksime juba ette, mis on Menge, et meil oleks vastav intuitsioon ...,*" ning ,, *...kuid mis see intuitsioon saab olla, kui ta ei ole Cantori definitsioon, mille me põlglikult kõrvale heitsime¿*' RUSSELi tüüpide hierarhiasse suhtub H. POINCARÉ suurema lugupidamisega, kuid ka siin ta ei jäta märkimata, vt lk 2107, et ka see ,, *...jääb arusaamatuks, kui mitte eeldada, et ordinaalarvude teooria on juba välja töötatud.*" Me ei saa kõnelda 1. ja 2. järku ning üldse n-järku väidetest, kui naturaalarvud 1, 2, 3, ... pole intuitiivselt mõistetavad. Nagu meie kõik oma loogilistes arutlustes, vast ehk alateadlikult ja intuitiivselt, käsitleb H. POINCARÉ järjekindlalt RUSSELi loogikat. H.POINCARÉle on iseloomulik arutlusviis, kui, märgates mingit seost $A \sim B$, ta jälgib teatud asjaoludel selle seose teisendamist või selle muutumist seoseks $A_1 \sim B_1$. Kõne all on seoste teisendused, siis ka teisenduste teisendused ning kõrgemat järku teisendused – vastavalt Russeli tüüpidele. Nii me jõuame tänapäeva aktuaalse teema juurde, liikumiste liikumiste ja kõrgemat järku liikumisteni. H. POINCARÉ käsitluses puudutab see kõigepealt seaduste evolutsiooni, lk 1862-1875. Enam haarab H. POINCARÉd HILBERTi aksiomaatika. Seda esiteks sellepärast, et peale LOBATŠEVSKI (1826) ja RIEMANNi (1854) sensatsioonilisi avastusi oli HILBERT, kes pani aluse analysis situs'e ning pideva keskkonna aksiomaatikale, ja siis ka sellepärast, et ,,*analysis situs on geomeetrilise intuitsiooni tõeline pärusmaa*". Ta rõõmustab, et on olemas rohkem kui kolmemõõtmeline analysis situs ja et meil kõigil on selleks vastav intuitsioon olemas (vt lk 2099). Miks mitte, kui kinnisest ringjoonest tasandil on võimalik välja hüpata, kasutades kolmandat dimensiooni, siis samamoodi on võimalik väljuda sfäärist neljamõõtmelises ruumis; kui liikudes Möbiuse lehel on võimalik kelleosutit panna liikuma vastassuunas, siis nähtavasti rohkem kui kolmemõõtmelises ruumis on võimalik ka vasakpoolne kruvijoon pidevalt teisendada parempoolseks kruvijooneks. Sellised väited on intuitiivselt usutavad, kuigi teoreemidena on neil õigus esineda vaid siis, kui nad on tõestatud.

Otsides tõde, me lähtume hüpoteesist, kuid hüpoteese me sõnastame, lähtudes intuitsioonist. Ka geomeetria on eriline teiste teaduste kõrval, sest temas on enam intuitiivset näitlikkust. Kui mainime, et sel invariandil on hea geomeetrline tõlgendus, siis see tähendab, et meil on selle kohta meelepärane intuitiivne nägemus. Nõustugem lõpuks, et nii mittetäiuslikud, primitiivsed ja rumalad kui me siin oleme selles väikeses ϵ-ümbruses, mis on meie tajutav maailm, k.a HUBBLE'i teleskoobi haardepiirkond, selle väikese ajavahemiku Δt kestel, mis on meile antud siin olemiseks, suudame liikuda selles maailmas vaid kobamisi, tehes vaid väikesi liigutusi vastavalt meie intuitiivsetele võimetele.

Omaette teemaks on H. POINCARÉ arutlustes pidevuse ja diskreetsuse vahekord. Me tuleme selle juurde tagasi peale kõnelust duaalsusest. Meile näib, et üks oluline rõhuasetus H. POINCARÉ'l siiski puudub. Mõistetav, et möödunud sajandi alguses olid päevateemaks uued aksiomaatilised süsteemid, kuid kestvalt jätkas võidukäiku diferentsiaal- ja integraalarvutus. Integraalide arvutamisel ja ka diferentsiaalvõrrandite lahendamisel me valdavalt tegutseme samm-haaval, me koostame integraalsummad ja siis läheme üle piirväärtustele, või liidame kokku kõverjoone lõikude pikkused ja püüame nende pikkuste summa lähendada võimalikult mõõdetava joone reaalsele pikkusele; samamoodi toimime keerulisemates olukordades pindalade ja ruumalade arvutamisel. Kui aga üleminek piirväärtusele ei õnnestu ning täpne tulemus jääb saamata, siis lepime lineaarsete liidetavate lõpliku summaga, mis on kõikvõimalike ligikaudsete meetodite aluseks. Selline ekstrapoleerimine on toimumas igas meie arvutis, mille teguviis on puhtdiskreetne, samm-sammult ja nõks-haaval, pluss-miinus, kuid mitte pidev. Püüdlus üha täpsemate tulemuste järele võib olla õigustatud, kuid seejuures peab arvestama ka asjade tõenäosust ja juhuslikkust.

Näiteks, arvuti võib anda meile arvu $\pi = 3,14\ldots$ väärtusi sadu lehekülgi, kuid kus on garantii, et kusagil 20. leheküljel pole ta eksinud (mida on ka juhtunud)? Lineaarsuse ja lineariseerimise peale mõeldes tuleb arvestada veel asjaolu, kas me ei samasta kõverjoone kahte punkti ühendavat kõõlu selle joone puutujaga ja kas me ei samasta pinna triangulatsiooni kolmnurka selle pinna puutujatasandiga.

Kõverjoone puutuja ja pinna puutujatasand, nagu üldse mingi sileda muutkonna puutujaruum, on vektorruum ja kõik, mis on toimumas selles vektorrumis, on lineaarne maailm. Siin pole midagi ühist ektsrapoleerimisülesannetega ja ligikaudsete arvutusvõtetega. Kui me oleme lineaarses maailmas ja harjunud lineaarse mõtteviisiga, siis loomulikult ka usume, et kogu maailm on selline. Näiteks, kui tasand pöörleb ümber 0-punkti ja me liigume selles voos mingit ringjoont pidi, siis kõik tasandi punktid, liikudes igaüks oma trajektooril, pöörlevad me ümber ja kogu taasand pöörleb me liikuvas teljestikus, nagu oleksime meie selle keskpunktiks. Kui ruum näib meile paisuvat või temas on toimumas mõni teistsugune lineaarne voog, siis seda paisumist ja seda voogu tajub samamoodi oma teljestikus iga vaatleja, kes selles voos osa võtab. Seda on kerge põhjendada:

$$U' = CU \;\Rightarrow\; (dU)' = CdU$$

ehk, sõnades, lineaarne maailm on homogeenne ja lokaalne kordub tema globaalsuses. Kui sellega nõustuda, siis oleme nõus ka spiraalse ruumiehitusega ja selle eksponentsiaalseadusega

$$U_t = e^{tC}U,$$

mis kõlab hümnina lineaarses maailmas. Me oleme oma väikeses maailmas, selles väikeses ϵ-ümbruses lineaarsuse lummuses, oleme niivõrd harjunud oma seadustega, mida me oleme suutnud sõnastada, et tahame haarata selle pilguga kogu maailma. Meil oleks ka õigus kuulata kogu seda hümni globaalses ajas ja globaalses ruumis, kuid maailm ... ei ole lineaarne. Lineaarsus on ilus, kuid paraku me peame arvestama maailma mittelineaarsusega. Just nüüd, 100 aastat hiljem, on see teravalt päevakorras, kui tahame orienteeruda ning oma ettekujutuses luua mingit korda selles näivas tohuvapohus me ümber. Lineaarselt mõeldes, kui näeme kaost ümberringi, valitseks kaos ka kõikjal, ja me oleksime meeleheitel. Õnneks on teadlane oma matemaatikaga (Kr sõnast *mathēma*) suutelina tajuma mittelineaarsust ja on ka astumas julgeid samme meile uusi seni tundmatuid seaduspärasusi esile tooma[1]. Asi pole selles, et lineaarsed reeglid heita kõrvale ja neid unustada, vaid *,,haritlaste asi on maailm tükkidest kokku panna"*[2]. See pole tavaline ekstrapoleerimine, ligikaudne arvutusviis, vaid delikaatsem eksponentsiaalkujutus, mis Lie rühmade puhul samastab Lie algebra ühikelemendi väikese ümbrusega, - nii ka puutujaruumi lineaarne stuktuur kirjeldab teatud lähenduses suvalise muutkonna lokaalset ehitust.

Siit jääb üks samm, et sügavamalt mõista maatrikseid, determinante ja nende omadusi. Determinantide tähtsus ei seisne vaid selles, et Krameri reeglit kasutades võime, nagu seda meile õpetatakse koolis, lahendada lineaarvõrrandite süsteeme. Maatriksit, nimelt Jacobi maatriksit, mis koosneb osatuletistest, tuleb mõista nagu tuletist, kuid mitte tavalise funktsiooni, vaid üldisema kujutuse puhul. Ja kui me ekstreemumülesandeid lahendades alustame tuletistest, siis, võttes tuletisena maatriksit, on vaja selgusele jõuda, millal ja kus võib langeda selle astak. Väljendades V. Arnoldi[3] sõnadega, see on nagu *"estreemumülesande grandioosne üldistus"*. Veel paar sammu, ja me jõuame siit otse ka kujutuste singulaarsuste e nn *"katastroofide"* teooriasse[4]. Seejuures *"katastroof"* ei tähenda mingit katkemist, rebenemist või hävingut, ka mitte kaootilist olukorda, küll aga bifurkatsiooni mingis pidevas protsessis, kui ta teatud hetkel (nagu kasvav funktsioon võib äkki muutuda kahanevaks, või vastupidi) kaotab stabiilsuse ja see vahetub teise stabiilse protsessiga. Meie kolmemõõtmelises ruumis on toimumas keerulised paljuparameetrilised protsessid, mille kulg

[1] Vt, näit., Ü. Lepik, J. Engelbrecht, *Kaoseraamat*, Tln, 1999.

[2] Vt J. Engelbrechti intervjuu, Eesti Päevaleht, 29.07.2006.

[3] V. I. Arnold (1937), vene matemaatik.

[4] Katastroofide teooria sai alguse R. Thomi (pr mat) töödest, vt Thom R., *Structural Stability and Merphogenesis.* W. A. Benjamin, Massachusetts, 1975.

paljumõõtmelises ruumis toimuks iseärasusteta, kuid kuna me ruum on selleks liiga kitsas dimensioonide vähesuse tõttu, siis järsud ümberkorraldused ja stabiilsete olekute vahetumine on vältimatu. Katastroofidega, olgu nad emotsionaalses plaanis meile rohkem või vähem meelepärased, tuleb leppida. Loomulikult, teades bifurkatsioonide iseloomu, me võime neid vajadusel ennetada, või, kui vaja, ka tekitada. Katastrofistide ambitsioonid küünivad termodünaamikasse, kvantmehhaanikasse, klimatoloogiasse, bioloogiasse ja isegi sotsioloogiasse ja psühholoogiasse. Kõikjal leiavad nende mudelid vastavaid väljundeid.