Black-Scholes-Mertoni järgne finantsmatemaatika

Artur Sepp [1]
Tartu Ülikool

Käesolevas artiklis käsitletakse mõningaid tähtsaid arenguid finantsmatemaatikas pärast Black-Scholes-Mertoni ([1], [4], 1973) poolt tuletisinstrumentide, s.t. teiste finantsinstrumentide nagu näiteks aktsiad, võlakirjad, valuutad jne. turuhindadest sõltuvate väärtustega finantsinstrumentide, hindade arvutamise ja nendega kauplemisega seondavate riskide taandamise metodoloogia väljatöötamist. Käesolev artikkel kajastab ainult autori akadeemilise ja professionaalse tegevusega seonduvat, seega ei saa järgnevat mingil juhul vaadelda kui ammendavat ülevaadet vägagi laia ja mitmekesise finantsmatemaatika valdkonna tähtsamatest arengutest ja lahendamata probleemidest.

Sissejuhatus

Kõige lihtsamateks tuletisinstrumentideks on Euroopa tüüpi ostu- ja müügioptsioonid, mille aluseks oleva finantsvara hinda ajal t tähistame kujul $S(t)$. Vaatleme Euroopa tüüpi ostuoptsiooni, mille väärtus olgu antud funktsiooniga $C(t, S)$. See optsioon annab omanikule õiguse (ilma igasuguste kohustusteta) osta üks alusvara aktsia täitmisajal T lepingus määratud täitmishinnaga K. Teiste sõnadega, selle optsiooni rahalist väärtust täitmisajal kirjeldab nn. maksefunktsioon kujul

$$C(T, S) = \max(S - K, 0), \tag{1}$$

kus maksimumi võtmine vastab sellele, et optsioon on õigus ja mitte kohustus, mistõttu omanikul on mõistlik seda kasutada ainult

[1] Autor kaitses doktoritöö matemaatilise statistika erialal 20. juunil 2007.

Eesti Matemaatika Selts Aastaraamat 2007

siis, kui täitmishind (s.t. optsiooni realiseerimisel makstav hind) on väiksem kui momendi turuhind, millega oleks võimalik vastavat alusvara osta.

Vaatleme nüüd ostuoptsiooniga kauplemist müüja seisukohalt. Oletame, et meid huvitab ajamoment t, $0 \leq t < T$. Optsiooni müüja peab leidma vastuse järgmistele olulistele küsimustele: 1) kui palju oleks õige küsida sellise optsioonilepingu müümise eest, ning 2) kuidas elimineerida või kahandada lepinguga seotud riski, arvestades, et müüja seisukohalt on võimalik ainult piiratud suurusega positiivne lõpptulemus ning alusvara hinna plahvatuslikul kasvamisel potentsiaalselt kuitahes suur negatiivne tulemus.

Selleks, et nende küsimustega tegeleda matemaatilisest vaatenurgast lähtuvalt, on esimeseks vaadeldavaks ideeks kirjeldada kõigepealt alusvara hinna jaotus ajal T, seejärel leida seda jaotust kasutades vaadeldava ostuoptsiooni maksefunktsiooni keskväärtus ajal T ning lõpuks rakendada sobivat diskonteerimist selleks, et leida ajamomendile t vastav optsiooni hind. On selge, et alusvara hinna jaotuse valimisel on oluline küsimus vastava keskväärtuse ja dispersiooni leidmine. Keskväärtus peaks olema seotud vaadeldava alusvara keskmise tulususega, standardhälve aga iseloomustaks alusvara tulususe muutlikkust ehk riski.

On ilmne, et ülalmainitud tõenäosusjaotuse kuju muutub ajas sõltuvalt alusvara momendihinnast ning (võib-olla ka) alusvara tulususe muutlikkusest, seetõttu optsioonide dünaamiliseks hindamiseks ja riskide maandamiseks tuleb kirjeldada alusvara hinna ajas arenemist kajastav mudel. Selleks sobivad stohhastilised diferentsiaalvõrrandid. Kuna Feynman-Kac'i teoreem võimaldab esitada keskväärtusi stohhastiliste diferentsiaalvõrrandite poolt kirjeldatud juhuslike suuruste suhtes osatuletistega diferentsiaalvõrrandite (ODV) lahenditena, siis võib optsioonide hindade arvutamise taandada teatud ODV-de lahendamisele.

Black-Scholes-Mertoni mudel

Finantsoptsioonide hidamises ja riskide maandamises tõi murrangu Black-Scholes-Mertoni poolt 1973. aastal väljatöötatud lähenemine, mille kohaselt võib aktsiahindade ajas arenemist kirjeldada log-normaalse difusiooni mudeliga:

$$dS(t) = \mu S(t) + \sigma S(t) dW(t), \ \ S(0) \text{ on antud,} \tag{2}$$

kus μ on alusvara trend (iseloomustab keskmist protsentuaalset alusvara hinnatõusu), σ on alusvara volatiilsus (mõõdab alusvara hinna $S(t)$ suhteliste muutuste varieeruvust) ja $W(t)$ on standardne Browni liikumine, mida kasutatakse hinnamuutuste juhuslikkuse modelleerimiseks.

Black-Scholes-Mertoni lähenemise põhiliseks uuenduseks oli optsiooni müügiga seotud riskide maandamise strateegia väljatöötamine, mis võimaldas tuletisväärtpaberi müügiga seotud riskid elimineerida alusvaraga dünaamilise kauplemise ja selleks vajamineva raha riskivaba protsendiga r laenamise (või ülejääva raha sama protsendiga hoiustamise) abil. Kuna see strateegia on sama kõigi müüjate jaoks sõltumata nende riskitundlikkusest, siis järelikult on võimalik optsioonide hinna leidmisel kasutada nn. riskineutraalset martingaalimõõtu $\mathbb{Q}$, mille korral iga tuletisinstrumendi (sh. alusvara enda) diskonteeritud hind on martingaal ning alusvara trend on riskivaba protsent r. Viimasest võib mõelda kui lühiajaliste riigivõlakirjade tulususprotsendist.

Eelneva põhjal võib ostuoptsiooni hinda arvutada kui keskväärtust tema diskonteeritud väärtusest ajal T:

$$C(t, S) = e^{-r(T-t)} \int_0^\infty \max(S' - K, 0) \Xi(t, S; T, S') dS', \tag{3}$$

kus $\Xi(t, S; T, S')$ on võrrandiga (2) kirjeldatud log-normaalse juhusliku suuruse üleminekutõenäosuse tihedusfunktsioon, milleks on

$$\Xi(t, S; T, S') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)} S'} \exp\left\{ -\frac{\left(\ln\left(\frac{S}{S'}\right) + rT - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)} \right\}. \tag{4}$$

Feynman-Kac'i teoreemi kohaselt rahuldab ostuoptsiooni hind

$C(t, S)$ ka tuntud Black-Scholes-Mertoni ODV-d:

$$\begin{aligned} &C_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS} + rSC_S - rC = 0, \\ &C(T, S) = \max(S - K, 0), \end{aligned} \tag{5}$$

kus me eeldame, et $C(t, S)$ on piisavalt sile, s.t. et osatuletised C_t, C_S ja C_{SS} eksisteerivad.

Võrrandi (5) lahendamisel saame kuulsa Black-Scholes-Mertoni ostuoptsiooni hinna valemi

$$\begin{aligned} &C(t, S) = S\mathcal{N}(d_+) + e^{-r(T-t)}K\mathcal{N}(d_-), \\ &d_{+,-} = \frac{\ln(S/K) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \end{aligned} \tag{6}$$

kus $\mathcal{N}(x)$ on standardse normaaljaotuse jaotusfunktsioon.

Valemis (6) $S(t)$ ja r on määratud olemasoleva turuinfoga, T ja K on toodud optsioonilepingus, seega alusvara volatiilsus σ on ainus "vaba" parameeter, mida on vaja kuidagi leida või järeldada olemasolevate andmete põhjal.

Lõpetuseks märgime, et kuna ostuoptsiooni hind esitub nii keskväärtusena (3) kui ka ODV (5) lahendina, võime me leida selle (ja teiste sarnaste lepingute) hindasid kahte moodi: 1) leides integraali (3) väärtuse analüütiliselt või Monte-Carlo meetodil, või 2) lahendades ODV (5) kas ilmutatud kujul analüütiliste meetoditega (sh. Laplace'i ja Fourier' teisendusi kasutades) või numbriliselt näiteks võrgumeetodeid kasutades. Praktikas tuleb valida sobiv meetod vastavalt lahendatava ülesande keerukusele: lihtsamate ülesannete korral on eelistatumaks täpsete lahendite olemasolu, kuid keerulisemate ülesannete korral tuleb kasutada kas võrgumeetodit või Monte-Carlo simulatsioone.

Volatiilsuse naeratus

Kuigi Black-Scholes-Mertoni lähenemine on finantsiliselt robustne ning matemaatiliselt mugav kasutada, on tema suureks puuduseks eeldus, et alusvara volatiilsus σ on konstantne kõigi täitmishindade ja täitmisaegade suhtes. Praktikas on investorid aga tüüpiliselt mures finantsvara suure negatiivse muudatuse võimaluse pärast ning kaitsevad ennast selle riski vastu madala täitmishinnaga müügioptsioonide ostmise abil (müügioptsioon annab omanikule õiguse müüa alusvara täitmisajal T lepingus määratud täitmishinnaga K). Lisaks sellele on investoritel, kes plaanivad alusvara hinna kasvamisel oma osaluse kasumi väljavõtmise eesmärgil teatud hinnatasemel realiseerida, kasulikum hoopis müüa vastava täitmishinnaga ostuoptsioon.

Nõudlus madala hinnatasemega müügioptsioonide järele ning huvi kõrgema hinnatasemega ostuoptsioonide müümise vastu toob kaasa nn. volatiilsuse naeratuse. Seda efekti on võimalik näha, kui kasutada valemit (6) selleks, et leida volatiilsusväärtus $\sigma_{imp}(K)$, kasutades teadaolevaid turuhindu täitmishinnaga K_p müügioptsiooni, täitmishinnaga K_c ostuoptsiooni ning täitmishinnaga K_0 ostuoptsiooni korral juhul $K_p < K_0 < K_c$. Tulemusena näeme enamasti, et

$$\sigma_{imp}(K_p) > \sigma_{imp}(K_0) > \sigma_{imp}(K_c), \tag{7}$$

mis on vastuolus Black-Scholes-Mertoni konstantse volatiilsuse eeldusega.

Lisaks eelnevale on finantsturgudel täheldatav ka nn. täitmisajast sõltuvuse efekt, mille kohaselt volatiilsused ja võrratuste (7) täidetuse rangus sõltuvad ka täitmisajast T.

Selleks, et võtta arvesse ülalmainitud efekte, tuleb modifitseerida Black-Scholes-Mertoni eeldust alusvara log-normaalse dünaamika (5) kohta. Kasutada tuleks sellist alusvara dünaamikat, mille korral alusvara tulevikuhindade jaotus oleks sobivalt asümmeetriline, s.t. keskväärtusest madalamate hindade tõenäosused peaks olema kõrgemad ning keskmisest kõrgemate väärtustega hindade tõenäosused madalamad kui vastaval log-normaalsel jaotusel. Need efektid muudavad madalate (kõrgete) täitmishindadega müügioptsioonid (ostuoptsioonid) rohkem (vähem) väärtuslikumaks võrreldes Black-Scholes-Mertoni mudelil põhineva hinnaga, mis automaatselt tooks kaasa reaalsetel turgudel täheldatava naeratuse efekti.

Hüpetega difusiooniprotsessid

Esimeseks katseks asümmeetriliste jaotuste sissetoomiseks tegi Merton [5], kes täiendas Black-Scholes-Mertoni mudelit (2). Hüppeid lubava matemaatilise mudeli kasutamine alusvara hinna modelleerimisel on täiesti realistlik, kuna reaalsetel turgudel toimuvad aeg-ajalt järsud hinnahüpped.

Modelleerimisel tavaliselt eeldatakse, et hüpped toimuvad vastavalt konstantse intensiivsusega λ Poissoni protsessile $N_\lambda(t)$, seega aktsiahinna muutumise võrrandiks on

$$dS(t) = rS(t) + \sigma S(t)dW(t) + S(t)(e^J - 1)dN_\lambda(t), \; S(0) \text{ on antud.} \tag{8}$$

Kui hüpe toimub, siis tema suurus J on juhuslik suurus tõenäosustihedusfunktsiooniga $\varpi(J)$. Selleks, et alusvara hind oleks martingaal mõõdu $\mathbb{Q}$ suhtes, tuleb keskmine hüppe suurus m lisada alusvara trendile, $m = \int_{-\infty}^{\infty}[e^{J'} - 1]\varpi(J')dJ'$.

Merton soovitas kasutada normaaljaotusega hüppe suurust J. Teiseks arvestatavaks alternatiiviks on kasutada asümmeetrilist topelt-eksponentjaotust, mida soovitas Kou [3]; selle jaotuse tihedusfunktsioon on kujul

$$\varpi(J) = q^+ \frac{1}{\eta^+} e^{-\frac{1}{\eta^+}J} \mathbf{1}_{\{J \geq 0\}} + q^- \frac{1}{\eta^-} e^{\frac{1}{\eta^-}J} \mathbf{1}_{\{J<0\}}, \tag{9}$$

kus $1 > \eta^+ > 0$, $\eta^- > 0$ on positiivsete ja negatiivsete hüpete keskväärtused; q^+ ja q^- kirjeldavad vastavalt positiivsete ja negatiivsete hüpete tõenäosusi, kusjuures $q^+, \, q^- \geq 0, \; q^+ + q^- = 1$.

Sel juhul optsiooni hind on lahendiks nn. osatuletistega integro-diferentsiaalvõrrandile (PIDE):

$$\begin{aligned} & C_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS} + (r - \lambda m)SC_S - rC \\ & + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} (C(t, Se^{J'}) - C(t, S))\varpi(J')dJ' = 0, \\ & C(T, S) = \max(S - K, 0), \end{aligned} \tag{10}$$

Seda tüüpi võrrandeid on mugav lahendada, kasutades Fourier' teisendust normaliseeritud alusvara hinna logaritmi $x = \ln \frac{S}{K}$

suhtes. On selge, et Fourier' teisenduse kasutamisel eeldatakse tõkestamata piirkonda muutuja x jaoks: $-\infty < x < \infty$. Seega, kuigi Fourier' teisendus on võimas vahend tõkestamata ülesannete puhul, on seda küllaltki raske rakendada juhul, kui hindamisülesanne (10) on defineeritud tõkestatud piirkonnas.

Vaatleme näitena nn. üles-ja-välja tõkkega ostuoptsiooni, mille väärtus muutub nulliks, kui alusvara hind saavutab optsiooni eluea jooksul ülemise tõkke U. Sel juhul vastava ostuoptsiooni hind rahuldab võrrandit (10) koos rajatingimusega

$$C(t, U) = 0. \tag{11}$$

Vaadeldava optsiooni väärtus on ilmselt väiksem kui vastava tavalise ostuoptsiooni väärtus, kuna juhul, kui alusvara hind optsiooni eluea jooksul puudutab (või ületab) mingil ajahetkel tõket U, siis optsioon muutub väärtusetuks. Seda tüüpi optsioonid on aga teatud aktsepteeritava riskitasemega või võimalike hinnamuutuste osas kindlate ootustega investorite jaoks atraktiivsed, kuna nende hind on madalam kui standardse ostuoptsiooni hind, nõudes seega investeerimiseks vähem vahendeid.

Tõketega optsioonide hindade arvutamist alusvara evolutsiooni kirjeldavate topelt-eksponentsiaalsete hüpetega difusiooniprotsesside korral uuris Sepp [7], kes kasutas Laplace'i teisenduse meetodit selleks, et tuletada analüütilised avaldised ostu- ja müügioptsioonide hindade jaoks nii ühe- kui ka kahepoolsete tõkete korral. Selleks, et anda lugejale ettekujutust leitud lahendite kuju kohta, toome siinkohal ostuoptsiooni hinna Laplace'i teisenduse, tähistatud kujul $U(p, x)$, kus x on logaritm normaliseeritud hinnast ning p on järelejäänud eluea $\tau = T - t$ suhtes võetud Laplace'i teisenduse muutuja,

$$U(p, x) := \frac{1}{K}\mathcal{L}[C(\tau, x)] = \frac{1}{K}\int_0^\infty C(\tau, x)e^{-p\tau}d\tau, \tag{12}$$

valemi:

$$U(p, x) = \begin{cases} C_0 e^{\psi_0 x} + C_1 e^{\psi_1 x}, x < 0 \\ C_2 e^{\psi_2 x} + C_3 e^{\psi_3 x}\left[\frac{e^x}{p} - \frac{1}{r+p}\right], x \geq 0, \end{cases} \tag{13}$$

kus konstandid C_0, C_1, C_2, C_3 on lahendiks süsteemile

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ \psi_0 & \psi_1 & -\psi_2 & -\psi_3 \\ \frac{1}{\psi_0\eta^-+1} & \frac{1}{\psi_1\eta^-+1} & -\frac{1}{\psi_2\eta^-+1} & -\frac{1}{\psi_3\eta^-+1} \\ \frac{1}{\psi_0\eta^+-1} & \frac{1}{\psi_1\eta^+-1} & -\frac{1}{\psi_2\eta^+-1} & -\frac{1}{\psi_3\eta^+-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} - \frac{1}{r+p} \\ \frac{1}{p} \\ \frac{1}{p(\eta^-+1)} - \frac{1}{r+p} \\ \frac{1}{p(\eta^+-1)} + \frac{1}{r+p} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

kus $\mu = r - \lambda m - \frac{1}{2}\sigma^2$ ning $\psi_i, i = 0, 1, 2, 3$ on polünoomi

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sigma^2\eta^-\eta^+\psi^4 + \left(\mu\eta^-\eta^+ - \frac{1}{2}\sigma^2(\eta^- - \eta^+)\right)\psi^3 \\ &- \left(\frac{1}{2}\sigma^2 + \mu(\eta^- - \eta^+) + (r+p+\lambda)\eta^-\eta^+\right)\psi^2 \\ &+ \left(-\mu + (r+p+\lambda)(\eta^- - \eta^+) - \lambda(q^+\eta^- - q^-\eta^+)\right)\psi + (r+p) \end{aligned} \quad (15)$$

reaalsed juured. Ostuoptsiooni hinna $C(t, S)$ leidmiseks on võimalik kasutada vastava Laplace'i teisenduse $U(p, x)$ numbrilist pööramist, mida on võimalik teha kiirelt ning suure täpsusega. Tõketega ostuoptsiooni hind avaldub sarnaselt, omades ainult mõningaid lisaliikmeid valemis (13).

Lõpuks märgime, et tõketega optsioonide hindamisele sarnased probleemid tekivad Mertoni poolt ([5]) kasutusele võetud nn. laostumise struktuursete mudelite kasutamise korral, kus eeldatakse, et firma väärtuse muutumine on stohhastiline protsess ning laostumine leiab aset siis, kui väärtus kukub ettemääratud tasemeni. Seda tüüpi mudelid on vajalikud selleks, et hinnata võlakirju või teisi väärtpabereid, mille väärtus sõltub väljaandja võimalikust laostumisest. Struktuurimudelite kasutamine toob automaatselt kaasa volatiilsuse naeratuse, kuna nende kohaselt on müügioptsioonid kõrgemalt hinnatud, mida võib vaadelda kui kaitset laostumise vastu juhul, kui aktsiate turuhind langeb peaaegu nullini. Empiirilised andmed toetavad hüpete olemasolu firmaväärtuse protsessi ajalises arengus. Struktuurimudeleid, kus eeldatakse, et firma väärtus on topelt-eksponentsiaaljaotusega hüpetega difusiooniprotsess, on uurinud Sepp ([9]), kes demonstreeris ka seose olemasolu eelmainitud firmaväärtuse protsessi ja selle firma aktsiate Euroopa tüüpi optsioonide hindade vahel.

Stohhastiline volatiilsus

Järgmisena vaatleme teist tähtsat Black-Scholes-Mertoni mudeli alternatiivina kasutatavat mudelite klassi, kus eeldatakse, et alusvara volatiilsus on samuti juhuslik. Stohhastilise volatiilsusega mudelid üritavad toime tulla volatiilsuse naeratuse efektiga sel teel, et eeldavad, et alusvara muutlikkus $V(t) = \sigma^2$ on stohhastiline protsess, mis on korreleeritud alusvara hinnaga. Laialdaselt aktsepteeritud mudeliks on nn. ruutjuure protsess (*square root process*), mis võeti kasutusele Hestoni [6] poolt. Selle kohaselt kehtivad võrrandid

$$\begin{cases} dS(t) & = rS(t) + S(t)\sqrt{V(t)}dW(t), \\ dV(t) & = \kappa(\theta - V(t))dt + \varepsilon\sqrt{V(t)}dW^v(t), \end{cases} \tag{16}$$

kus θ on muutlikkuse $V(t)$ keskväärtus, κ on keskmisele lähenemise kiirus (*reversion speed*), ε on muutlikkuse volatiilsus ning ρ on Browni liikumiste $W(t)$ ja $W^v(t)$ vaheline korrelatsioon. Selle mudeli kehtivuse korral rahuldab ostuoptsiooni hind järgnevat osatuletistega diferentsiaalvõrrandit:

$$\begin{aligned} & C_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS} + rSC_S + \kappa(\theta - V)C_V + \\ & \frac{1}{2}\varepsilon^2 V C_{VV} + \rho\varepsilon V S C_{SV} - rC = 0, \\ & C(T, S) = \max(S - K, 0). \end{aligned} \tag{17}$$

Eeltoodud diferentsiaalvõrrandi lahendamise efektiivseks meetodiks on Fourier' teisenduse kasutamine normaliseeritud hinna $x = \ln \frac{S}{K}$ suhtes. Täpsemalt võib mainitud lahendamise meetodi kohta lugeda artiklist [2]. Käesolevas artiklis toome ainult ära ostuoptsiooni hinna valemi turumudeli (16) kehtimise korral:

$$C(t,S) = S - \frac{Ke^{-\tau r}}{\pi}\int_0^\infty \Re\left[\frac{e^{(-ik+\frac{1}{2})(x+r\tau)+A(\tau,k)+B(\tau,k)V}}{k^2+\frac{1}{4}}\right]dk, \tag{18}$$

kus

$$\begin{aligned}
&A(\tau,k) = -\frac{\kappa\theta}{\varepsilon^2}\left[\psi_+\tau + 2\ln\left(\frac{\psi_- + \psi_+ e^{-\zeta\tau}}{2\zeta}\right)\right],\\
&B(\tau,k) = -(k^2+1/4)\frac{1-e^{-\zeta\tau}}{\psi_- + \psi_+ e^{-\zeta\tau}},\\
&\psi_\pm = \mp(u+ik\rho\varepsilon)+\zeta,\\
&\zeta = \sqrt{(k^2\varepsilon^2(1-\rho^2)+2ik\rho\varepsilon u + u^2+\varepsilon^2/4},\\
&\tau = T-t,\ u = \kappa - \rho\varepsilon/2.
\end{aligned}$$

Lõpetuseks märgime, et stohhastilise volatiilsusega mudelid on muutunud äärmiselt tähtsaks seoses realiseerunud alusvara muutlikkusest sõltuvate optsioonide ilmumisega. Hestoni mudeli (16) korral avaldub realiseerunud muutlikus üle perioodi T, tähistatuna kujul $I(T)$, järgnevalt:

$$I(T) = \frac{1}{T}\int_0^T V(t')dt'. \tag{19}$$

On selge, et $I(T)$-st sõltuvate optsioonide hindamiseks on vaja teada tema jaotust. Ka seda probleemi võib rünnata Fourier' teisenduste tehnikat kasutades. Mainitud lähenemist on rakendanud artiklites [8] ja [10].

Finantsmatemaatika rakendustest

Kaasajal mängib finantsmatemaatika tähtsat rolli finantsmaailmas, mis nähtub sellest, et suured pangad ja investeerimisfondid palkavad tosinate kaupa PhD kraadiga teadusliku taustaga töötajaid tuletisväärtpaberite hidamise, riski haldamise, erakauplemistehingute (*proprietary trading*) jms. igapäevaste tegevuste teostamiseks. Selliseid töötajaid kutsutakse kõnekeeles kvantideks (*quants*), keda on valdavalt nelja liiki:

1) Kontorikvandid (*desk quants*), kes töötavad otseselt kauplejatega, aidates neil analüüsida spetsiifiliste tehingute hindamise küsimusi ning riskide haldamise võimalusi. Nende töö hõlmab tavaliselt Exceli tabelite ning finantsvarade hindamise tarkvarade ulatuslikku kasutamist.

2) Arenduskvandid, kelle ülesandeks on välja töötada ja rakendada uusi hindamise mudeleid, mida saaksid kasutada kauplejad ja kontorikvandid. See töö eeldab laialdast programmide kirjutamist selleks, et luua kasutamiskõlblikku tarkvara.

3) Riskide haldamise kvandid, kelle ülesandeks on olemasolevate mudelite hindamine ja testimine, samuti broneeritud tehingutega seotud riskide ning ülefirmaliste riskide arvutamine. Selle töö puhul peab oskama kasutada Excelit, andmebaase ning hindade leidmise tarkvara.

4) Erakauplemistehingute kvandid kavandavad ja viivad ellu kauplemisstrateegiaid, mis põhinevad valdavalt aegridade analüüsimisel selleks, et leida turul eksisteerivaid arbitraaživõimalusi.

Sageli võib kvant olla hõlvatud mitmes ülalmainitud valdkonnas.

Järgnevalt kirjeldame lühidalt arenduskvantide põhitegevusi, mida võib jagada kolme laia kategooriasse.

1) Andmetöötlusprobleemid (*data-fitting*), mis sisaldab olemasolevate turuandmete interpoleerimist ja ekstrapoleerimist selleks, et arvutada volatiilsuse maatrikseid, siledaid hoiustamise protsendi kõveraid (*interest yield curves*) jne. Tüüpiline kasutatav matemaatiline aparatuur sisaldab splaine, polünomiaalset interpolatsiooni, vähimruutude meetodit.

2) Hindamismudelite kalibreerimine, mis sisaldab väga likviidsete tuletisväärtpaberite hindamise mudelite väljatöötamist ja realiseerimist ning kasutatavate mudelite parameetrite turuandmete põhjal arvutamise protseduuride loomist. Matemaatilised

vahendid sisaldavad analüütiliste hinnavalemite leidmiseks kasutatavaid otseseid ja teisendustel põhinevaid meetodeid. Analüütiliste hinnavalemite olemasolu on sellel etapil väga tähtis, kuna neid tuleb ulatuslikult kasutada mudelite kalibreerimisel (s.t. hindade arvutamise kiirus on äärmiselt oluline). Kalibreerimine hõlmab aga töökindlate optimiseerimismeetodite kasutamist.

3) Eksootiliste finantsinstrumentide hindamine, mis sisaldab töökindlate numbriliste või, harvemini, analüütiliste meetodite väljatöötamist keerulisemate finantsinstrumentide hindade ja hinna tuletiste arvutamiseks. Matemaatilisteks vahenditeks on tüüpiliselt osatuletistega diferentsiaalvõrrandite lahendamine võrgumeetodite või Monte-Carlo meetodi abiga.

Tüüpiline ajajaotus nende erinevate tegevuste vahel on umbes 40% – 40% – 20%. Autori hinnangul on matemaatiliselt kõige suuremat väljakutset pakkuvaks teine kategooria, kuna see nõuab paljude kõrgetasemeliste matemaatiliste meetodite kasutamist keeruliste ülesannete efektiivseks lahendamiseks.

Kokkuvõte

Eelnevas on toodud lühike ülevaade finantsmatemaatika arengust pärast Black-Scholes-Mertoni fundamentaalseid artikleid ([1],[4]), pöörates põhitähelepanu hüpetega difusiooniprotsesside ning stohhastilise volatiilsusega mudelite kasutamisele alusvara hinna käitumise modelleerimisel. Samuti on antud põgus kirjeldus matemaatiliste vahendite spektrist, mida kasutatakse praktikas finantsmatemaatikaga seotud ülesannete lahendamisel.

Kirjandus

1. Black, F.; Scholes, M. (1973), *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy **81**, 637–659.

2. Kangro, R.; Pärna, K.; Sepp, A. (2004), *Pricing European-style options under jump diffusion processes with stochastic volatility: applications of Fourier transform*, Acta Comment. Univ. Tartuensis Math. **8**, 123–133.

3. Kou,Š. (2002), *A jump diffusion model for option pricing*, Management Science **48**, 1086–1101.

4. Merton, R. (1973), *Theory of rational option pricing*, Bell Journal of Economics and Management Science **4** (1), 141–183.

5. Merton, R. (1976), *Option pricing when underlying stock returns are discontinuous*, Journal of Financial Economics **3**, 125–144.

6. Heston,Š. *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options*, Review of Financial Studies **6** (1993), 327–343.

7. Sepp, A. (2004), *Analytical pricing of double-barrier options under a double-exponential jump diffusion process: applications of Laplace transform*, International Journal of Theoretical and Applied Finance **2**, 151–175.

8. Sepp, A. (2008), *Pricing options on realized volatility in Heston model with volatility jumps*, Journal of Computational Finance, **11**(4), 33–70.

9. Sepp, A. *Extended credit grades model with stochastic volatility and jumps*, Wilmott Magazine, trükki vastu võetud.

10. Sepp, A. (2007), *Variance swaps under no conditions*, Risk Magazine, **20** (March), 82–87.