Banachi operaatorruumide kompaktsete alamhulkade ühtlane faktorisatsioon

Kristel Mikkor[1]
Tartu Ülikool

Sissejuhatus

Käesolevas töös tutvustatakse Banachi operaatorruumide kompaktsete alamhulkade ühtlast faktorisatsiooni. Peamiselt vaadeldakse artiklite [10, 12, 13] ning nende artiklite põhjal valminud doktoritöö [11] tulemusi.

Banachi ruumiks nimetatakse selliseid normiga vektorruume (üle korpuse , s.t. üle reaal või kompleksarvude korpuse), milles elementide jada koondumine on määratud Cauchy kriteeriumiga. Olgu X ja Y Banachi ruumid.

Operaatori all mõistame lineaarset kujutust Banachi ruumide vahel, s.o. kujutust, mis on kooskõlas nende ruumide algebralise struktuuriga. Kõikide ruumist X ruumi Y tegutsevate pidevate lineaarsete operaatorite Banachi ruumi tähistamiseks kasutame sümbolit $\mathcal{L}(X, Y)$. Siin saame erijuhul $Y =$ kaasruumi $X^* = \mathcal{L}(X,)$.

Operaatorit nimetatakse kompaktseks, kui ta kujutab Banachi ruumi X iga tõkestatud hulga Banachi ruumi Y suhteliselt kompaktseks hulgaks. Kõikide ruumist X ruumi Y tegutsevate kompaktsete operaatorite Banachi ruumi tähistamiseks kasutame sümbolit $\mathcal{K}(X, Y)$.

Operaatorit nimetatakse nõrgalt kompaktseks, kui ta kujutab Banachi ruumi X iga tõkestatud hulga Banachi ruumi Y suhteliselt nõrgalt kompaktseks hulgaks. Kõikide ruumist X ruumi Y tegutsevate kompaktsete operaatorite Banachi ruumi tähistamiseks kasutame sümbolit $\mathcal{W}(X, Y)$.

[1] Autor sai 2006. aastal Arnold Humala stipendiumi kätte 2007 a. kevadel.

Banachi ruumi, mis langeb kokku oma teise kaasruumiga nimetatakse refleksiivseks.

Olgu antud operaator $S \in \mathcal{L}(X,Y)$. Kui Banachi ruumi Z ning operaatorite $u \in \mathcal{L}(X,Z)$ ja $v \in \mathcal{L}(Z,Y)$ korral $S = v \circ u$, siis öeldakse, et operaator S faktoriseerub läbi ruumi Z.

Faktorisatsiooniteoreemid

Alates Grothendiecki ja Pietschi töödest, vastavalt 1950-ndatel aastatel ja 1960-ndate aastate lõpus, on operaatorite faktoriseerimist läbi klassikaliste ruumide Z või ruumidest X ja Y lihtsamate ruumide Z uurinud paljud matemaatikud (vt. näiteks monograafiat [4] aastast 1995).

Aastal 1971 tõestas Johnson [8] et iga aproksimeeritav operaator faktoriseerub läbi ruumi C_p, $1 \leq p \leq \infty$.

Tuginedes Johnsoni teoreemile, tõestas Figiel [5] aastal 1973, et iga kompaktne operaator faktoriseerub läbi ruumi C_p kinnise alamruumi.

Kompaktsete operaatorite faktoriseeruvuse läbi klassikaliste jadaruumide ℓ_1 ja c_0 tõestasid Randtke [14, järeldus 7] Terzioğlu [17, lk 252] ja Dazord [3, lause 5.12].

Randtke ja Terzioğlu-Dazord'i teoreemid annavad ühe kompaktse operaatori faktorisatsiooni läbi ruumide ℓ_1 ja c_0. Enam kui kümme aastat hiljem, aastal 1987 tõestasid Graves ja Ruess [6, teoreem 2.1] järgneva kompaktsete operaatorite kompaktsete alamhulkade faktorisatsiooniteoreemi läbi ruumide ℓ_1 ja c_0.

[Graves-Ruess] Olgu X $\mathcal{L}_1$-ruum (vastavalt $\mathcal{L}_\infty$-ruum) ja Y Banachi ruum. Olgu $\mathcal{C}$ suhteliselt kompaktne alamhulk ruumis $\mathcal{K}(X,Y)$. Siis leidub operaator $u \in \mathcal{K}(X,\ell_1)$ (vastavalt $u \in \mathcal{K}(X,c_0)$) ja suhteliselt kompaktne alamhulk $\{A_S : S \in \mathcal{C}\}$ ruumis $\mathcal{K}(\ell_1,Y)$ (vastavalt ruumis $\mathcal{K}(c_0,Y)$) nii, et $S = A_S \circ u$ iga $S \in \mathcal{C}$ korral.

Kompaktsete operaatorite ühtlase faktoriseerumise üldisemal juhul annab järgmine Aron-Lindström-Ruess-Ryani teoreem (vt. [1. teoreem 1]) aastast 1999, kus tähistab Figiel-Johnsoni universaalset faktorisatsiooniruumi (näiteks $= (\sum_{W \subset C_p} W)_p$, kus lõpmatu otsesumma on võetud üle ruumi C_p kõikide kinniste alamruumide W).

[Aron-Lindström-Ruess-Ryan] Olgu X ja Y Banachi ruumid ja olgu $\mathcal{C}$ suhteliselt kompaktne alamhulk ruumis $\mathcal{K}_{w^*}(X^*, Y)$. Siis leiduvad operaatorid $u \in \mathcal{K}_{w^*}(X^*,)$ ja $v \in \mathcal{K}(, Y)$ ning suhteliselt kompaktne alamhulk $\{A_S : S \in \mathcal{C}\}$ ruumis $\mathcal{K}(,)$ nii, et $S = v \circ A_S \circ u$ iga $S \in \mathcal{C}$ korral.

Artiklis [1, järeldus 4] on näidatud, et Aron-Lindström-Ruess-Ryani teoreemist järeldub Graves-Ruessi teoreem.

Aron-Lindström-Ruess-Ryani ning Graves-Ruessi teoreemid koos tõestustega ei anna mingit informatsiooni hulkade vastavust kirjeldavate kujutuste omaduste kohta. Nimetagem mõned antud kontekstis kerkivad loomulikud küsimused. Kas need kujutused on homöomorfismid? Millised on nende pidevusomadused? Kuidas on omavahel seotud vastavate hulkade diameetrid?

Doktoritöö [11] põhitulemusena on tõestatud järgmised Graves-Ruessi ning Aron-Lindström-Ruess-Ryani teoreemide kvantitatiivsed versioonid.

Olgu X ja Y Banachi ruumid ja olgu $\mathcal{C}$ kompaktne alamhulk ruumis $\mathcal{K}_{w^*}(X^*, Y)$. Siis iga $\varepsilon > 0$ korral leiduvad operaatorid $u \in \mathcal{K}_{w^*}(X^*,)$ ja $v \in \mathcal{K}(, Y)$, mis rahuldavad tingimust $1 \leq \|u\|, \|v\| \leq 1 + \varepsilon$, ja leidub lineaarne kujutus Φ : span $\mathcal{C}\mathcal{K}(,)$ nii, et $S = v \circ \Phi(S) \circ u$, iga operaatori $S \in$ span $\mathcal{C}$ korral. Kujutus Φ ahendatuna hulgale $\mathcal{C} \cup \{0\}$ on homöomorfism, mis rahuldab

$$\|S - T\| \leq \|\Phi(S) - \Phi(T)\|$$

$$\leq \min\Big\{\mathrm{d}, \mathrm{d}^{3/4}\Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{\ln a}\Big)^{3/4}\|S - T\|^{1/4}\Big\},\ S, T \in \mathcal{C} \cup \{0\},$$

kus

$$\mathrm{d} = \ \mathrm{diam}\ \mathcal{C} \cup \{0\}.$$

Olgu $1 \leq p \leq \infty$ ja $1 \leq \lambda < \infty$. Olgu X $\mathcal{L}_p$-ruum nii, et X^* on $\mathcal{L}_{q,\lambda}$-ruum (kus $1/q + 1/p = 1$ on omadusega $q = \infty$ kui $p = 1$ ja $q = 1$ kui $p = \infty$) ja olgu Y Banachi ruum. Kui $\mathcal{C}$ on ruumi $\mathcal{K}(X, Y)$ kompaktne alamhulk, siis iga $\varepsilon > 0$ korral leidub lineaarne kujutus $\Phi : \operatorname{span} \mathcal{CK}(\ell_p, Y)$ ja operaator $u \in \mathcal{K}(X, \ell_p)$ omadusega $1 \le \|u\| \le \lambda + \varepsilon$ nii, et $S = \Phi(S) \circ u$, iga operaatori $S \in \operatorname{span} \mathcal{C}$ korral ja kujutus Φ restricted to $\mathcal{C} \cup \{0\}$ on homöomorfism, mis rahuldab tingimust

$$\|S - T\| \le \|\Phi(S) - \Phi(T)\|$$

$$\le \min\left\{\mathrm{d}, \mathrm{d}^{1/2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\ln a}\right)^{1/2}\|S - T\|^{1/2}\right\}, \ S, T \in \mathcal{C} \cup \{0\},$$

kus

$$\mathrm{d} = \ \operatorname{diam} \mathcal{C} \cup \{0\}.$$

Need Graves-Ruessi ning Aron-Lindström-Ruess-Ryani teoreemide kvantitatiivsed versioonid kirjeldavad operaatorite suhteliselt kompaktsete hulkade faktorisatsiooni Hölderi mõttes pidevate homöomorfismide kaudu, mille pöördkujutused on Lipschitzi mõttes pidevad, ning on leitud tõhusaid hinnanguid vastavuses olevate hulkade diameetrite kohta. Tõestamisel on tuginetud kompaktsete ja nõrgalt kompaktsete operaatorite kompaktsete alamhulkade ühtlasele faktorisatsioonile, mille konstruktsioon tugineb kuulsa Davis-Figiel-Johnson-Pełczyński faktorisatsioonilemma [2] Lima, Nygaardi ja Oja [9] isomeetrilisele versioonile. Tõestuse idee seisneb niisuguse kujutuse SA_S, kus $S \in \mathcal{C}$ ja $\mathcal{C}$ on nõrgalt kompaktsete operaatorite kompaktne alamhulk, konstrueerimises, mis säilitab kompaktsed ja lõplikumõõtmelised operaatorid, on Hölderi mõttes pidev ning mille pöördkujutus on Lipschitzi mõttes pidev. Seejuures $\operatorname{diam}\{A_S : S \in \mathcal{C}\} = \operatorname{diam} \mathcal{C}$ niipea, kui $0 \in \mathcal{C}$. Võrdluseks märgime, et Graves-Ruessi teoreemi tõestus artiklis [6] on vägagi tehniline, tugineb Ruessi artiklis [15] tuletatud hulkade suhtelise kompaktsuse kriteeriumitele ruumis $\mathcal{K}_{w^*}(X^*, Y)$ ning kasutab Saphari tensorkorrutiste aparatuuri [16] Artikkel [1] annab Aron-Lindström-Ruess-Ryani teoreemile kaks erinevat tõestust, milledest üks toetub suurel määral Grothendiecki memuaaris [7] antud suhteliselt kompaktsete hulkade iseloomustusele Banachi ruumide projektiivses tensorkorrutises ning teine Banach-Dieudonné teoreemile.

Doktoritöös [11] on tõestatud ühtlase faktorisatsiooni teoreem, mis kirjeldab ruumist X kaasruumi X^* tegutsevate kompaktsete ja nõrgalt kompaktsete operaatorite kompaktsete hulkade faktorisatsiooni Hölderi mõttes pidevate homöomorfismide, mille pöördkujutus on Lipschitzi mõttes pidev, kaudu.

Olgu X Banachi ruum. Olgu $W = W_X$ ja $Z = Z_X$. Siis iga kompaktse alamhulga $\mathcal{C}$ of $\mathcal{W}(X, X^*)$ jaoks leidub operator $u, v \in \mathcal{W}(X, W)$ normiga üks ja lineaarne kujutus Φ : span $\mathcal{C}\mathcal{W}(W, W^*)$, mis säilitab lõplikumõõtmelised ja kompaktsed operaatorid nii, et $S = v^* \circ \Phi(S) \circ u$, iga operaatori $S \in$ span $\mathcal{C}$ korral. Kujutus Φ ahendatuna hulgale $\mathcal{C} \cup \{0\}$ on homöomorfism, mis rahuldab tingimust

$$\|S - T\| \leq \|\Phi(S) - \Phi(T)\|$$

$$\leq \min\Big\{\mathrm{d}, \mathrm{d}^{3/4}\Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{\ln a}\Big)^{3/4}\|S - T\|^{1/4}\Big\},\ S, T \in \mathcal{C} \cup \{0\},$$

kus

$$\mathrm{d} = \text{ diam } \mathcal{C} \cup \{0\}.$$

Rakendused

Eelmises peatükis nimetatud tulemused on rakendatud polünoomidele.

Olgu $n \in$. Tähistame sümboliga $\mathcal{L}(^n X)$ ruumil X pidevate n-lineaarsete vormide ruumi, mille norm on defineeritud võrdusega

$$\|A\| = \sup\{|A(x_1, \ldots, x_n)| : x_1, \ldots, x_n \in B_X\}.$$

Öeldakse, et n-lineaarne vorm $A \in \mathcal{L}(^n X)$ on sümmetriline, kui

$$A(x_1, \ldots, x_n) = A(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$$

iga $x_1, \ldots, x_n \in X$ ja hulga esimese n arvu iga permutatsiooni π korral. Tähistame sümboliga $\mathcal{L}^s(^n X)$ sümmeetrilistest n-lineaarsetest vormidest koosnevat alamruumi ruumis $\mathcal{L}(^n X)$.

Tähistame sümboliga $s : \mathcal{L}(^nX)\mathcal{L}^s(^nX)$ sümmetrisatsioonioperaatori, mis on defineeritud võrdusega

$$s(A)(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} A(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$$

kus π on n esimese naturaalarvu permutatsioon. Siis s on lineaarprojektsioon ruumist $\mathcal{L}(^nX)$ ruumile $\mathcal{L}^s(^nX)$ ning tema norm võrdub ühega.

Pidevat kujutust $P : X$ nimetatakse n-homogeenseks polñoomiks, kui leidub $A \in \mathcal{L}(^nX)$ nii, et $P(x) = A(x, \ldots, x)$ iga $x \in X$ korral. Tähistame sümboliga $\mathcal{P}(^nX)$ ruumil X pidevate n-homogeensete polñoomide ruumi, mille norm on defineeritud võrdusega

$$\|P\| = \sup\{|P(x)| : x \in B_X\}.$$

On tõestatud faktorisatsiooniteoreem 2-homogeensete polünoomide kompaktsete hulkade jaoks.

Olgu X Banachi ruum. Siis iga ruumi $\mathcal{P}_{wu}(^2X)$ kompaktse alamhulga $\mathcal{C}$ korral leiduvad $u, v \in \mathcal{K}(X, Z)$, mille norm võrdub ühega ja leidub lineaarne kujutus Ψ : span $\mathcal{C}\mathcal{P}_{wu}(^2Z)$ and ψ : span $\mathcal{C}\mathcal{L}(^2Z)$ nii, et iga $P \in$ span $\mathcal{C}$ korral

$$P(x) = \psi(P)(ux, vx), \ x \in X,$$

and

$$s(\psi(P)) = A_{\Psi(P)}.$$

Kujutused Ψ ja ψ ahendatuna hulgale $\mathcal{C} \cup \{0\}$ rahuldavad tingimust

$$\max\Big\{\|P - Q\|, \|\Psi(P) - \Psi(Q)\|\Big\} \leq \|\psi(P) - \psi(Q)\|$$

$$\leq 2 \min\Big\{\mathrm{d}, \mathrm{d}^{3/4}\Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{\ln a}\Big)^{3/4} \|P - Q\|^{1/4}\Big\}, \ P, Q \in \mathcal{C} \cup \{0\},$$

kus

$$\mathrm{d} = \ \mathrm{diam}\ \mathcal{C} \cup \{0\}.$$

Tõestatud on ka Aron-Lindström-Ruess-Ryani [1] ning Toma [18] teoreemide kvantitatiivsed versioonid Banachi ruumi ühikkeral nõrgalt ühtlaselt pidevate polünoomide jaoks.

Olgu X Banachi ruum ja olgu $n = 2, 3, \ldots$. Olgu C_n ruumi $\mathcal{K}(X, \mathcal{L}^s_{wu}(^{n-1}X))$ suhteliselt kompaktne alamhulk. Siis leidub kompaktne alamhulk C of X^* omadusega $|C| = \max\{|C_n|, 1\}$ nii, et iga operaatori $S \in C_n$ ja iga $x \in X$ korral kehtib

$$|(Sx)(x, \ldots, x)| \leq \sup_{x^* \in C} |x^*(x)|^n.$$

Olgu X Banachi ruum, $n = 2, 3, \ldots$ ja $P \in \mathcal{P}(^nX)$. Järgmised väited on samaväärsed:
(a) $P \in \mathcal{P}_{wu}(^nX)$,
(b) leidub kompaktne alamhulk C ruumist X^* nii, et iga $x \in X$ korral

$$|P(x)| \leq \sup_{x^* \in C} |x^*(x)|^n,$$

(c) leidub kompaktne alamhulk C ruumist X^* omadusega

$$\max\{\|P\|, 1\} \leq |C| \leq \max\{\frac{n^n}{n!}\|P\|, 1\}$$

nii, et iga $x \in X$ korral

$$|P(x)| \leq \sup_{x^* \in C} |x^*(x)|^n.$$

Kirjandus

[1] Aron, R.; Lindström, M.; Ruess, W. M.; Ryan, R. (1999), *Uniform factorization for compact sets of operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **127**, 1119–1125.

[2] Davis, W.; Figiel, J. T.; Johnson, W. B.; Pełczyński, A. (1974), *Factoring weakly compact operators*, J. Funct. Anal. **17**, 311–327.

[3] Dazord, J., (1976), *Factoring operators through c_0*, Math. Ann. **220**, 105–122.

[4] Diestel, J.; Jarchow, H.; Tonge, A. (1995), *Absolutely Summing Operators*, Cambridge Studies in Advanced Math. **43**, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[5] Figiel, T. (1973), *Factorization of compact operators and applications to the approximation problem*, Studia Math. **45**, 191–210.

[6] Graves, W. H.; Ruess, W. M. (1987), *Representing compact sets of compact operators and of compact range vector measures*, Arch. Math. (Basel) **49**, 316–325.

[7] Grothendieck, A. (1955), *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. **16**.

[8] Johnson, W. B. (1971), *Factoring compact operators*, Israel J. Math. **9**, 337–345.

[9] Lima, Å.; Nygaard,Õ.; Oja, E. (2000), *Isometric factorization of weakly compact operators and the approximation property*, Israel J. Math. **119**, 325–348.

[10] Mikkor, K. (2006), *On polynomials that are weakly uniformly continuous on the unit ball of a Banach space*, Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. **55**, 16–23.

[11] Mikkor, K. (2006), *Uniform factorization for compact subsets of banach spaces of operators*, Tartu University Press, Tartu.

[12] Mikkor, K.; Oja, E. (2006), *Uniform factorization for compact sets of weakly compact operators*, Studia Math. **174**(1), 85–97.

[13] Mikkor, K.; Oja, E. (2005), *Uniform factorization for compact sets of operators acting from a Banach space to its dual space*, Acta Comment. Univ. Tartuensis Math. **9**, 87–93.

[14] Randtke, D. J. (1974), *A compact operator characterization of* ℓ_1, Math. Ann. **208**, 1–8.

[15] Ruess, W. M. (1981), *Compactness and collective compactness in spaces of compact operators*, J. Math. Anal. Appl. **84**, 400–417.

[16] Saphar, P. D. (1970), *Produits tensoriels d'espaces de Banach et classes d'applications linéaires*, Studia Math. **38**, 71–100.

[17] Terzioğlu, T. (1972), *Remarks on compact and infinite-nuclear mappings*, Math. Balkanica **2**, 251–255.

[18] Toma, E. (1993), *Aplicações holomorfas e polinômios* τ*-contínuous*, Thesis, Univ. Federal do Rio de Janeiro.

