KOOLIMATEMAATIKA

Kokkuvõte matemaatikavõistlustest 2007. aastal

Matemaatikavõistluste tulemuste tabelites kasutame koolide nimetuste lühendeid järgmiselt:

AG	—	Ahtme Gümnaasium
HTG	—	Hugo Treffneri Gümnaasium
IPK	—	Ilmatsalu Põhikool
KG	—	Kohila Gümnaasium
MHG	—	Miina Härma Gümnaasium
NPG	—	Narva Pähklimäe Gümnaasium
NRG	—	Nõo Reaalgümnaasium
PKG	—	Pärnu Koidula Gümnaasium
NHG	—	Narva Humanitaargümnaasium
SÜG	—	Saaremaa Ühisgümnaasium
T37KK	—	Tallinna 37. Keskkool
TIK	—	Tallinna Inglise Kolledž
TKVG	—	Tallinna Kesklinna Vene Gümnaasium
TPL	—	Tallinna Prantsuse Lütseum
TRK	—	Tallinna Reaalkool
TTRK	—	Tallinna Tõnismäe Reaalkool

Alljärgnevates tekstides ja tabelites õpilase nime järel sulgudes olev arv tähistab klassi, kus ta vastava võistluse ajal õppis.

Eesti koolinoorte LIV matemaatika-olümpiaadi lõppvoor

Lõppvoorus oli võistlemas 28 osavõtjat 9. klassi arvestuses, 24 osavõtjat 10. klassi arvestuses, 25 osavõtjat 11. klassi arvestuses ja 28 osavõtjat 12. klassi arvestuses. Igal lahendajal oli võimalik saada maksimaalselt 35 punkti.

Lõppvooru ülesanded kõikidele klassidele koos lahendustega saab leida TÜ Teaduskooli veebilehelt aadressil
//www.math.olympiaadid.ut.ee/arhiiv/loppv/lp2007/lp2007.pdf.

Töid kontrollis žürii koosseisus: Härmel Nestra — esimees (TU teadur), Elts Abel (TÜ dots), Uve Nummert (AS APROTE), Indrek Zolk (TÜ, mag), Jan Villemson (TÜ lektor), Raili Vilt (TÜ Teaduskool).

Järgnevas on žürii poolt autasustatud õpilaste nimed esitatud tabelitena klasside kaupa.

9. klass

Koht	Nimi	Kool	Klass	Punktid	Auhind
1.	Rauno Siinmaa	PKG	9	35	I
2.	Kadi Liis Saar	TIK	**8**	32	II
2.	Tuule Mall Kull	TTRK	**8**	32	II
4.	Gerli Viikmaa	PKG	9	31	III
5.	Andre Tamm	TIK	9	30	III
6.	Rauno Padari	IPK	9	28	III

10. klass

Koht	Nimi	Kool	Klass	Punktid	Auhind
1.	Kairi Kangro	HTG	10	25	I
2.	Sander Kask	KG	10	22	II
3.	Lauri Taaleš	NRK	10	20	II
4.	Viktor Karabut	AG	10	19	III
4.	Astrid Pung	HTG	10	19	III
4.	Paavo Parmas	GAG	10	19	III
6.	Andres Aas	TPL	10	18	III
7.	Andres Kaldvee	PKG	10	18	III

11. klass

Koht	Nimi	Kool	Klass	Punktid	Auhind
1.	Heiki Niglas	T37KK	11	30	I
2.	Fjodor Gainullin	TTRK	11	29	I
3.	Pille Pullonen	HTG	11	27	II
4.	Olga Bulgakova	NPG	11	25	II
5.	Rait Ool	SÜG	11	22	III
6.	Karen Atabekjan	TTRK	11	18	III
7.	Natalja Rõžkova	TKVG	11	17	III
8.	Jana Tšerkšina	NHG	11	17	III

12. klass

Koht	Nimi	Kool	Klass	Punktid	Au
1.	Jevgeni Martjušev	TTRK	12	31	I
2.	Heiki Niglas	T37KK	**11**	30	I
3.	Kaarel Nummert	HTG	12	28	II
3.	Nikolai Voitsehhovski	NPG	12	28	II
5.	Indrek Klanberg	TRK	12	26	III
6.	Ardi Tampuu	HTG	12	25	III
7.	Toomas Krips	HTG	12	22	III
8.	Ott Tinn	HTG	12	21	III
8.	Arti Velk	NRG	12	21	III

Eesti võistkonna komplekteerimiseks 2007. a. rahvusvahelisele matemaatikaolümpiaadile korraldatavale valikvõistlusele otsustati kutsuda järgmised õpilased: Jevgeni Martjušev (TTRK, 12. kl), Kaarel Nummert (HTG, 12. kl), Nikolai Voitsehhovski (NPG, 12. kl), Toomas Krips (HTG, 12. kl), Ivan Avanessov (AG, 12. kl), Heiki Niglas (T37KK, 11. kl), Fjodor Gainullin (TTRK, 11. kl), Pille Pullonen (HTG, 11. kl), Olga Bulgakova (NPG, 11. kl), Rait Ool (SÜG, 11. kl) Karen Atabekjan (TTRK, 11. kl) Kairi Kangro (HTG, 10. kl) Sander Kask (KG, 10. kl) Lauri Taaleš (NRG, 10. kl) Viktor Karabut (AG, 10. kl), Andres Aas (TPL, 10. kl) Jonatan Jõks (TRK, 10. kl), Rauno Siinmaa (PKG, 9. kl), Tuule Mall Kull (MHG, 9. kl), Gerli Viikmaa (PKG, 9. kl), Kadi Liis Saar (TIK, 8. kl), Aleksandr Šved (TTRK, 8. kl).

IMO'2007

Eesti võistkonda 48. rahvusvahelisel matemaatikaolümpiaadil 19.-31. juulil 2007. aastal Vietnamis (Hanois) kuulusid:

Kairi Kangro (HTG, 10), Toomas Krips (HTG, 12), Heiki Niglas (T37KK, 11), Kaarel Nummert (HTG, 12), Nikolai Voitsehhovski (NPG, 12).

Võistkonna juhendajad olid Jan Willemson (TÜ dotsent) ja Mart Abel (TÜ vanemteadur).

Osalenud 93 riigi hulgast kümne parema ja võistlusest „Balti tee 2007" osa võtnud riikide tulemused on toodud järgmises tabelis:

Koht	Riik	Punkte	Kuld	Hõbe	Pronks	Dip
1	Venemaa	184	5	1	0	0
2	Hiina	181	4	2	0	0
3	Lõuna-Korea	168	2	4	0	0
3	Vietnam	168	3	3	0	0
5	USA	155	2	3	1	0
6	Jaapan	154	2	4	0	0
6	Ukraina	154	3	1	2	0
8	Põhja-Korea	151	1	4	0	1
9	Bulgaaria	149	2	3	1	0
9	Taivan	149	2	3	1	0
15	Saksamaa	132	1	3	1	1
18	Poola	122	1	2	2	0
31	Leedu	92	1	0	2	1
41	Rootsi	81	0	0	4	2
43	Norra	79	0	1	1	1
60	Läti	58	0	0	0	4
61	Soome	55	0	1	0	2
65	Taani	50	0	0	1	3
73	Island	35	0	0	0	1

Parima ülesande eest läks üks punkt maha ainult Kaarel

NUMMERTilt, kes jäigi diplomist ilma. Siiski sündis Eesti kõigi aegade IMO rekord: $6*7-1 = 41$ punkti ühe ülesande eest. Kokku teenis võistkond seekord 64 punkti, mis, üsna rasket ülesannetekomplekti arvestades, on Eesti tiimi kohta keskmine tulemus. Parimana NIKOLAI VOITSEHHOVSKI oma 16 punktiga teenis pronksmedali. Järgnesid TOOMAS KRIPS (12 punkti) ja HEIKI NIGLAS (11 punkti).

Esitame ka lahendada tulnud ülesanded.

Esimese päeva (24. juuli 2007) ülesanded

1. On antud reaalarvud $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Iga i $(1 \leq i \leq n)$ korral defineerime $d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$ ja olgu
$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}\,.$$
   (a) Tõesta, et suvaliste reaalarvude $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ korral kehtib võrratus
$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}\,. \qquad (*)$$
   (b) Näita, et leiduvad reaalarvud $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$, mille korral võrratuses $(*)$ kehtib võrdus.

2. On antud viis punkti A, B, C, D ja E nii, et $ABCD$ on rööpkülik ja $BCED$ kõõlnelinurk. Sirge ℓ läbib punkti A ning lõikab lõigu DC sisepiirkonda punktis F ja sirget BC punktis G. Lisaks on teada, et $|EF| = |EG| = |EC|$. Tõesta, et ℓ on nurga DAB poolitaja.

3. Mõned matemaatikavõistlusest osavõtjad on omavahel sõbrad; sõprus on alati vastastikune. Võistlejate mingit rühma nimetame *klikiks*, kui suvalised kaks võistlejat selles on sõbrad. (Muuhulgas on klikid kõik vähem kui kahest võistlejast moodustatud rühmad.) Kliki liikmete arvu nimetame selle kliki *suuruseks*. On teada, et kogu võistluse suurima kliki suurus on paarisarv. Tõesta, et võistlejad saab niimoodi kahte ruumi jagada, et mõlema ruumi suurimad klikid on võrdse suurusega.

Teise päeva (25. juuli 2007) ülesanded

1. Kolmnurga ABC nurga BCA poolitaja lõikab kolmnurga ümberringjoont teistkordselt punktis R ning külgede BC ja AC keskristsirgeid vastavalt punktides P ja Q. Külgede BC ja AC keskpunktid on vastavalt K ja L. Tõesta, et kolmnurkade RPK ja RQL pindalad on võrdsed.

2. Olgu a ja b positiivsed täisarvud. Tõesta, et kui arv $(4a^2-1)^2$ jagub arvuga $4ab-1$, siis $a=b$.

3. Olgu n positiivne täisarv. Vaatleme $(n+1)^3-1$ punktist koosnevat hulka
$$S = \{(x,y,z) \ : \ x,y,z \in \{0,1,\ldots,n\},\ x+y+z>0\}$$
kolmemõõtmelises ruumis. Leia vähim võimalik niisuguste tasandite arv, millede ühend sisaldab kõik hulga S punktid, kuid mitte punkti $(0,0,0)$.

Võistkondlik matemaatikavõistlus „Balti tee 2007"

Võistkondlik matemaatikavõistlus **„Balti tee 2007"** peeti Kopenhaagenis, 3. novembril 2007. aastal. Osa võttis 11 võistkonda.

Eesti võistkonna koosseis oli järgmine:
Heiki Niglas (T37KK, 12. kl), Fjodor Gainullin (TTR 12. kl), Kairi Kangro (HTG, 11. kl), Rauno Siinmaa (PKG, 10. kl), Kadi Liis Saar (TIK, 9. kl).

Võistkonna esindajad olid Hendrik Nigul ja Oleg Košik.

Nelja ja poole tunni jooksul tuli igal võistkonnal ühiselt lahendada 20 ülesannet. Iga ülesande lahenduse eest võis saada kuni 5 punkti. Ülesandeid oli neljast valdkonnast: algebra (ül. 1–5), diskreetne matemaatika (ül. 6–10), geomeetria (ül. 11–15) ja arvuteooria (ül. 16–20).

Kõik tulemused on esitatud järgmise lehel asuvas tabelis. Võistkondade asetus veergudes ongi nende paremusjärjestus.

Iga ülesande eest võis saada kõikide võistkonnade peale summaarselt 55 punkti. Tegelikult summaarselt kogutud punktide summa on tabeli viimases veerus. Toome ülesannete lahendusprotsendid kahanevas järjestuse ja lisame juurde vastava(te) ülesand(net)e numbri(d):

89% – 2;	87% – 1;	80% – 8, 14;	78% – 1, 3;
71% – 17;	69% – 4;	62% – 18;	60% – 7;
56% – 16;	53% – 13;	51% – 5, 12, 19;	49% – 15;
45% – 20;	36% – 11;	25% – 6;	9% – 9.

Liites valdkondade kaupa ülesannete lahenduste eest saadud punktide summad, näeme, et algebra ülesandeid lahendati pisut paremine, aga teiste valdkondade osas olulist erinevust ei olnud:

algebra – 193, arvuteooria – 157, geomeetria – 148, diskreetne matemaatika – 144.

Tulemuste tabel[1]

	Po	**Pe**	**Sa**	**Ee**	**Le**	**Lä**	**Ta**	**Ro**	**So**	**Is**	**No**	**Su**
1	5	5	5	5	5	5	5	5	3	0	0	43
2	5	5	5	5	3	5	5	5	5	4	2	49
3	5	5	5	5	4	5	4	5	5	0	0	43
4	5	5	5	3	5	5	5	0	0	5	0	38
5	5	1	3	5	2	3	1	1	5	0	2	20
6	3	5	0	1	0	0	0	0	0	0	5	14
7	5	4	1	5	3	5	0	4	3	2	1	33
8	5	5	5	5	5	5	3	1	5	4	1	44
9	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
10	5	5	5	5	5	5	5	5	0	5	3	48
11	5	5	5	0	5	0	0	0	0	0	0	20
12	5	5	5	3	5	5	0	0	0	0	0	28
13	5	5	0	0	4	5	5	5	0	0	0	29
14	5	5	5	5	5	4	5	5	0	5	0	44
15	5	5	0	5	4	5	3	0	0	0	0	27
16	5	1	5	2	3	5	5	1	4	0	0	31
17	5	5	5	5	5	0	4	5	5	0	0	39
18	5	5	5	5	4	0	0	5	5	0	0	34
19	5	5	5	5	2	4	0	2	0	0	0	28
20	5	5	5	5	5	0	0	0	0	0	0	25
$\sum$	98	86	74	74	74	66	50	46	40	25	14	642

Esitame siinkohal kolme kõige kehvemini lahendatud ülesande tekstid.

9. Nõukogu valib juhatust. Igal nõukogu liikmel on 10 lemmikkandidaati ning ta on rahul, kui vähemalt üks nendest pääseb juhatusse. Nõukogu mistahes kuue liikme jaoks leidub kaheliikmeline juhatus, millega kõik kuus on rahul. Tõesta, et saab valida kümneliikmelise juhatuse, millega jäävad rahule kõik nõukogu liikmed.

6. Juku kirjutas tahvlile arvud $1, 2, \ldots, n$ mingis (suvalises) järjekorras. Nii moodustus arvujärjend. Seejärel koostas ta nimekirja

[1] Tabeli peas esinevate lühendite tähendus on järgnev: Po – Poola, Pe – Peterburg, Sa – Saksamaa, Ee – Eesti, Le – Leedu, Lä – Läti, Ta – Taani, Ro – Rootsi, So – Soome, Is – Island, No – Norra, Su – summa.

kõigist paaridest (i, j), kus $1 \leq i < j \leq n$, kuid järjendi i-s arv on j-ndast suurem. Edasi järgib Juku, seni kuni on võimalik, järgmist tegevusjuhist: valida nimekirjast paar (i, j), vahetada tahvlil olevas järjendis i-s ja j-s arv ning kustutada paar (i, j) nimekirjast. Tõesta, et Juku saab paare valida sellises järjekorras, et pärast protsessi lõppu on tahvlil olev järjend kasvav.

11. Olgu AD, BE ja CF kolmnurga ABC kõrgused. Punktid P, Q, R ja S rahuldavad järgmisi tingimusi:
(1) Punkt P on kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt;
(2) Lõikude PQ, QR ja RS pikkus on võrdne ümberringjoone raadiusega;
(3) Vektorid $\mathrm{vec}\, PQ$ ja $\mathrm{vec}\, AD$ on samasuunalised (lühidalt, $\mathrm{vec}\, PQ \uparrow\uparrow \mathrm{vec}\, AD$). Analoogiliselt ka $\mathrm{vec}\, QR \uparrow\uparrow \mathrm{vec}\, BE$ ja $\mathrm{vec}\, RS \uparrow\uparrow \mathrm{vec}\, CF$.
Tõesta, et S on kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt.

