MATEMAATIKA

Thurstoni hüpotees, Ricci voog ja edusammud Poincaré probleemi lahendamisel

Viktor Abramov
Tartu Ülikool

1. Clay instituudi millenniumiprobleemid

2000. a. avaldas Clay Matemaatika Instituut (Clay Mathematics Institute) loetelu seitsmest kaasaegse matemaatika tähtsaimast probleemist (millenniumiprobleemist), määrates iga probleemi lahenduse eest preemiaks miljon USA dollarit. Probleemide arv oli ära määratud selle instituudi asutaja Bostoni miljardäri Landon T. Clay poolt preemiateks eraldatud miljonite arvuga. Clay instituudi eksperdid, kes tegid eespool nimetatud valiku, arvavad, et just nimelt need 7 probleemi määravad ära matemaatika arengu XXI sajandil. Eesti Matemaatika Seltsi juhatus korraldas 2001. a. millenniumiprobleemidele pühendatud seltsi ettekandekoosoleku. Sellel koosolekul ettekantu publitseeriti Eesti Matemaatika Seltsi aastaraamatus 2001. Käesoleva artikli autor esines ettekandega teemal “Poincaré hüpotees”, milles kirjeldas probleemi olemust, sisu ja arengut eelmisel sajandil. Ettekanne avaldati Eesti Matemaatika Seltsi aastaraamatus 2001 ([1]) ja autor soovitab sellega tutvuda lugejatel, kes soovivad saada ettekujutust diferentsiaalgeomeetria ja topoloogia põhimõistetest selleks, et mõista Poincaré hüpoteesi sisu.

Peterburi matemaatik Grigori (mõnikord kirjutatakse Grisha) Perelman paigutas aastatel 2002–2003 e-preprintide elektroonilise arhiivi `arXiv.org` (`http://arxiv.org`) diferentsiaalgeomeetria ossa (math.DG) kolm preprinti ([13], [14], [15]), mis suurema osa 3-mõõtmeliste muutkondade topoloogiaga tegelevate eskpertide arvates lubavad väita, et Poincaré probleem on lahendatud. Tahaks rõhutada, et G. Perelman talitas küllaltki omapäraselt, paigutades

Eesti Matemaatika Selts   Aastaraamat 2006

oma tööd e-preprintide elektroonilisse arhiivi, sest rangelt võttes ei loeta neid sel juhul teaduspublikatsioonideks. Kui sellisel juhul oleks teoreemide tõestustes ilmnenud lüngad või puudused ja oleks leidunud matemaatik, kes, kõrvaldanud lüngad ja puudused, oleks oma töö avaldanud matemaatilises teadusväljaandes, oleks too matemaatik võinud ka pretendeerida Poincaré probleemi lahendajaks. Peale selle ei saa G. Perelman pretendeerida ka miljonidollarilisele preemiale ühe millenniumiprobleemi lahenduse eest, kuna seal on tingimuseks, et probleemi lahendus peab olema publitseeritud retsenseeritavas teadusajakirjas ning kahe aasta jooksul alates avaldamise momendist pole lahenduse õigsus antud valdkonnas tegutsevate ekspertide poolt kahtluse alla seatud. Samas otsustades massimeedias G. Perelmanile pühendatud artiklite järgi, ei kavatsegi ta sellele preemiale pretendeerida. Just need momendid ning ka see, et G. Perelman ei sõitnud 2006. a. Hispaanias toimunud rahvusvahelisele matemaatikakongressile, kus kuningas Juan Carlos pidi talle üle andma Fieldsi preemia panuse eest geomeetriasse ja saavutuste eest Ricci voogude (*Ricci flow*) geomeetrilise ja analüütilise struktuuri uurimisel, tegidki G. Perelmani nime avalikkusele tuttavaks. Käesoleva artikli eesmärgiks on luua ettekujutus struktuuridest, meetoditest ja ideedest, mida kasutas G. Perelman Poincaré probleemi lahendamiseks.

2. Poincaré probleem

Meenutagem lühidalt Poincaré hüpoteesi (probleemi) formuleeringut (üksikasjalise kirjelduse leiab artiklis [1]). Oma 1904. a. avaldatud artikli ([17]) lõpus mainis Henri Poincaré (1854–1912), et on jäänud veel üks probleem, mida tasuks uurida (sõnastus on antud kaasaegsetes terminites):

Kas 3-mõõtmeline diferentseeruv kinnine (s.o. kompaktne ja rajata) triviaalse fundamentaalrühmaga $\pi_1(M)$ muutkond M on difeomorfne 3-mõõtmelise sfääriga S^3?

Poincaré hüpotees seisneb selles, et vastus sellele küsimusele on jaatav. Poincaré ise ei jõudnud probleemi lahendamisel kuigi kaugele, osutades, et see kallutab teda põhiuuringutest kõrvale. Järgnevate aastate katsed leida probleemile lahendus stimuleerisid uute mõistete ja meetodite arengut lõplikumõõtmeliste muutkondade topoloogias. Poincaré probleemil on tähtis osa 3-mõõtmelise muutkonna topoloogilise struktuuri uurimisel, sest ta puudutab selliste muutkondade klassifikatsiooni. Mõned selle ala spetsialistid ennustavad, et juhul kui G. Perelmani antud Poincaré probleemi lahendus on õige (ja tõenäoliselt see nii ka on), siis huvi antud matemaatika valdkonna vastu jahtub ja paljud uurijad lülituvad teistele valdkondadele. Rõhutagem, et Poincaré probleemi lahendus pole tähtis mitte ainult muutkondade teooria sisemise arengu seisukohalt, vaid sellel on ka rakenduslikud aspektid. Arvatakse, et Perelmani poolt pakutud lahendus annab impulsi uute meetodite tekkeks füüsikaliste protsesside kirjeldamisel keerulistes 3-mõõtmelistes geomeetrilistes ruumides ja arvutitopoloogias.

Poincaré probleemiga analoogilise probleemi topoloogiliste muutkondade jaoks dimensioonis $m \geqslant 5$ lahendasid 1960. a. Stephen Smale ([18]), John Stallings ([19]) ja Andrew Wallace ([22]). Kuid meetodid, mida nemad kasutasid, osutusid kõlbmatuks 4-mõõtmeliste muutkondade puhul. Viimaste jaoks lahendas Poincaré probleemi 1981. a. Michael Freedman ([6]). Seega sai möödunud sajandi lõpuks selgeks, et 3-mõõtmelised muutkonnad kujutuvad endast kõige keerulisemat juhtu. Tähtis on see tõsiasi, et igal 3-mõõtmelisel topoloogilisel muutkonnal on ainult üks (difeomorfismi täpsusega) diferentseeruv struktuur. Seega on 3-mõõtmeliste topoloogiliste muutkondade klassifikatsioon homöomorfismi täpsusega ekvivalentne diferentseeruvate muutkondade klassifikatsiooniga difeomorfismi täpsusega. Asjalood on teised kolmest kõrgemate dimensioonide korral. Kirby ja Siebenmann näitasid ([10]), et topoloogilisel muutkonnal dimensiooniga $m \geqslant 4$ võib olla mitu erinevat diferentseeruvat struktuuri. Hiljem selgus, et kõige keerulisemateks selles suhtes on just 4-mõõtmelised muutkonnad. Michael Freedman näitas eksootiliste siledate struktuuride olemasolu triviaalsel topoloogilisel muutkonnal $\mathbb{R}^4$. Muutkonna $\mathbb{R}^4$ siledat struktuuri nimetatakse eksootiliseks, kui ta ei ole difeomorfne selle muutkonna standartse sileda struktuuriga. Tõestuseks näitas M. Freedman, et selle väite eitus viib vastuoluni 4-mõõtmeliste muutkondade täieliku klassifikatsiooni konstrueerinud S. Donaldsoni teoreemidega ([4],[5]). Hiljem tõestas C.H. Taubes ([20]), et selliste eksootiliste siledate struktuuride hulk on mitteloenduv. Dimensiooni 4 puhul erinevate siledate struktuuride ilmsikstulek oli sedavõrd sensatsiooniline, et New York Times'is ilmus sellele avastusele pühendatud artikkel ja ühes oma artiklis esitas C.H. Taubes küsimuse: "Kas me oskame diferentseerida?"

Seega fakt, et 3-mõõtmelisel juhul muutkondade klassifikatsiooniprobleemi uurides võime vaadelda diferentseeruvaid muutkondi, võimaldab rakendada diferentsiaalgeomeetria meetodeid. Diferentseeruvate muutkondade hulgas on tähtsaimaks ja huvitavaimaks klassiks Riemanni muutkonnad. Et G. Perelmani ja tema eelkäijate lähenemine 3-mõõtmeliste muutkondade vallas tugineb 3-mõõtmelise muutkonna Riemanni struktuurile, siis järgmises punktis meenutame lühidalt Riemanni geomeetria mõningaid põhimõisteid.

3. Ricci kõverus ja lokaalselt homogeenne Riemanni muutkond

Diferentseeruvat m-mõõtmelist muutkonda M^m nimetatakse Riemanni muutkonnaks, kui muutkonna igas punktis $p \in M^m$ on puutujaruumil T_pM^m antud bilineaarne sümmeetriline positiivselt määratud ruutvorm g, mis sõltub siledalt punktist p. Seega määrab g puutujavektorite $u, v \in T_pM^m$ skalaarkorrutise $g(u,v)$ muutkonna M^m igas punktis p. Vormi g nimetatakse Riemanni meetrikaks. Muutkonna M^m lokaalsetes koordinaatides $x^1, x^2, \ldots, x^m$ kirjutatakse meetrika g tavaliselt kujul $g = g_{ij}(x)\,dx^i dx^j$, kus $g_{ij}(x)$ on lokaalsete koordinaatide siledad funktsioonid ja mida nimetatakse meetrilise tensori komponentideks. Riemanni muutkonna tähtsaimaks karakteristikuks on tema kõverus. Kõveruse defineerimisel lähtutakse kõveruse mõistest, mis on üks olulisim kaasaegses diferentsiaalgeomeetrias.

Olgu $C^\infty(M^m)$ siledate funktsioonide algebra ja $\mathfrak{D}(M^m)$ siledate vektorväljade Lie algebra diferentseeruval muutkonnal M^n. Meenutame, et vektorväli $X \in \mathfrak{D}(M^m)$ on algebra $C^\infty(M^m)$ derivatsioon, s.o. vektorruumi $C^\infty(M^m)$ lineaarteisendus, mis rahuldab Leibnizi valemit funktsioonide korrutamise suhtes. Vektorväljade $X, Y \in \mathfrak{D}(M^m)$ kommutaator $[X, Y] = X \cdot Y - Y \cdot X$, kus $X \cdot Y$ on teisenduste korrutis (kompositsioon), tekitab Lie algebra struktuuri vektorruumil $\mathfrak{D}(M^m)$. Levi-Civita seostuseks muutkonnal M^m nimetatakse reeglit, mis igale vektorväljale $X \in \mathfrak{D}(M^m)$ seab vastavusse vektorruumi $\mathfrak{D}(M^m)$ lineaarteisenduse (endomorfismi) ∇_X nii, et rahuldatud on tingimused

$$\begin{aligned} \nabla_{f\,X+h\,Y} &= f\,\nabla_X + h\,\nabla_Y, \\ \nabla_X(f\,Y) &= X(f)\,Y + f\,\nabla_X Y, \end{aligned}$$

kus $f, h \in C^\infty(M^m)$ ja $X, Y \in \mathfrak{D}(M^m)$. Kui M^m on Riemanni muutkond meetrikaga g, siis Levi-Civita seostust nimetatakse Riemanni seostuseks, kui ta rahuldab kahte tingimust:

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \nabla_X Y - \nabla_Y X, \\ Z(g(X, Y)) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y), \quad Z \in \mathfrak{D}(M^m). \end{aligned}$$

Esimene tingimus näitab, et Riemanni seostus on seostus ilma väändeta ja teine tingimus näitab, et Riemanni seostus on kooskõlas meetrikaga. Riemanni muutkondade teoorias tõestatakse, et Riemanni muutkonnal M^m meetrikaga g leidub parajasti üks Riemanni seostus ([16]), s.t. Riemanni seostus on üheselt määratud meetrikaga g. Riemanni seostuse kõveruseks R nimetatakse suurust

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}, \quad X, Y \in \mathfrak{D}(M^m).$$

Et $R(X, Y) = -R(Y, X)$, osutub kõverus R teist järku diferentsiaalvormiks (2-vormiks) muutkonnal M^m, mille väärtusteks punktis $p \in M^m$ on puutujaruumi T_pM^m lineaarteisendused. Kõverus R tekitab kõverustensori $R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$. Kõverustensor on $(0, 4)$-tüüpi tensor (neljandat järku kovariantne tensor), mille komponente tähistame R_{lijk}, kus $R_{lijk} = g(R(e_j, e_k)e_i, e_l)$ ja

$\{e_i\}$ on muutkona M^m puutujakihtkonna lokaalne ortonormeeritud reeper. Ricci kõveruseks nimetatakse sümmeetrilist bilineaarset vormi Ric : $T_pM^m \times T_pM^m \to \mathbb{R}$, mis on määratud lokaalses ortonormeeritud reeperis $\{e_i\}$ valemiga

$$\mathrm{Ric}(u,v) = \sum_{i=1}^{m} g(R(e_i,u)v,e_i), \quad u,v \in T_pM^m.$$

Ricci kõverus tekitab Ricci (0,2)-tensori, mille komponendid avalduvad kõverustensori komponentide kaudu järgmiselt:

$$\mathrm{Ric}_{ij} = \sum_{k=1}^{m} R_{kikj}. \tag{1}$$

Seega võib öelda, et Ricci kõverus osutub kõverustensori jäljeks. Kuna Ricci voogu kirjeldav võrrandisüsteem tugineb Ricci kõverusele, siis Ricci kõverustensori komponendid avalduvad meetrika ja Riemanni seostuse komponentide kaudu. Kui $x^1, x^2, \ldots, x^m$ on muutkonna M^m lokaalsed koordinaadid, siis kehtib

$$\mathrm{Ric}_{ik} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km},$$

kus Γ^k_{ij} on Riemanni seostuse lokaalsed komponendid (lokaalsete koordinaatide funktsioonid), mis omakorda avalduvad meetrilise tensori komponentide kaudu järgmiselt:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right).$$

Ricci kõveruse jälge nimetatakse skalaarseks kõveruseks. Kui skalaarset kõverust tähistada $\mathfrak{R}$, siis saame

$$\mathfrak{R} = \mathrm{Tr}\,\mathrm{Ric} = \sum_{i,j=1}^{m} g(R(e_i,e_j)e_j,e_i). \tag{2}$$

Suunakõveruseks nimetatakse vormi

$$\sec(u,v) = \frac{g(R(v,u)u,v)}{g(u,u)g(v,v) - (g(u,v))^2}, \quad u,v \in T_pM^m.$$

Saab näidata, et suunakõverus sõltub ainult vektorite u, v poolt tekitatud tasandist $\pi \subset T_pM^m$, tingimusel, et nood on lineaarselt sõltumatud. Kui suunakõverus $\sec(\pi)$ on võrdne ühe ja sama reaalarvuga k iga tasandi $\pi \subset T_pM^m$ korral ja muutkonna M^m kõikides punktides, siis nimetatakse Riemanni muutkonda M^m konstantse kõverusega Riemanni muutkonnaks. Kolmemõõtmelise Riemanni muutkonna M^3 puhul sisaldub kogu informatsioon selle muutkonna kõveruse R kohta Ricci kõveruses Ric.

Kui M^m ja N^n on kaks Riemanni muutkonda vastavalt meetrikatega g ja h, siis difeomorfismi $\phi : M^m \to N^n$ nimetatakse isomeetriaks, kui ta rahuldab tingimust $g(u, v) = h(D_\phi(u), D_\phi(v))$ suvaliste $u, v \in T_pM^m$ ja $p \in M^m$ korral (siin $D\phi : TM^m \to TN^n$ on kujutuse ϕ diferentsiaal). Ilmselt moodustab muutkonna M^m kõikide isomeetriate $\phi : M^m \to M^m$ hulk rühma, mida tähistame $\mathrm{Isom}(M^m)$. See rühm toimib loomulikul viisil muutkonnal M^m, s.t. $M^m \times \mathrm{Isom}(M^m) \to M^m$, kus $(p, \phi) \mapsto \phi(p)$. Kui isomeetriate rühm toimib transitiivselt, siis nimetatakse Riemanni muutkonda homogeenseks muutkonnaks. Meenutagem, et rühm toimib transitiivselt, kui muutkonna M suvalise kahe punkti p ja q korral leidub selline isomeetria $\phi \in \mathrm{Isom}(M^m)$ nii, et $q = \phi(p)$. Seega on homogeensel muutkonnal igas punktis üks ja sama meetriline struktuur. Homogeense Riemanni muutkonna näideteks on sfäär S^n, Eukleidiline ruum $\mathbb{R}^n$, hüperboolne ruum $\mathbb{H}^n$. Märkigem, et neist kaks esimest on konstantse kõverusega, vastavalt kõverustega $+1$ ja 0. Hüperboolne ruum $\mathbb{H}^n$ on Riemanni muutkond konstantse kõverusega -1 ja tema mudelit võib kirjeldada järgmiselt: ruum $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x^0, x^1, \ldots, x^n) : x^\mu \in \mathbb{R}\}$ temal määratud meetrikaga g, kus

$$g = -(dx^0)^2 + \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2; \tag{3}$$

vastavat Riemanni muutkonda tähistame $\mathbb{R}^{1,n}$. Seega on $\mathbb{R}^{1,n}$ harilik (topoloogilises mõttes) ruum $\mathbb{R}^{n+1}$ indefiniitse meetrikaga g ja meetrika indefiniitsuse pärast ei ole $\mathbb{R}^{1,n}$ Riemanni muutkond. Kui $n = 3$, siis nimetatakse ruumi $\mathbb{R}^{1,3}$ Minkowski ruumiks. Mainime, et sellel ruumil baaserub relatiivsusteooria geomeetria. Olgu $r > 0$ ja

$H(r) \subset \mathbb{R}^{1,n}$ hüperpind ruumis $\mathbb{R}^{1,n}$, mis on määratud võrrandiga

$$-(x^0)^2 + \sum_{i=1}^{n}(x^i)^2 = -r^2.$$

Mainime, et hüperpinda $H(r)$ võib interpreteerida imaginaarse raadiusega ir n-mõõtmelise "sfäärina" meetrikas g. Juhul $n = 2$ on $H(r)$ kahekatteline hüperboloid ning me võime eraldada ühe tema katetest, seades tingimuse $x^0 > 0$. Pole keeruline näidata, et meetrika g kitsendus $g|_{H(r)}$ hüperpinnale $H(r)$ määrab Riemanni meetrika h hüperpinnal $H(r)$ ja $H(r)$ indutseeritud meetrikaga h muutub Riemanni muutkonnaks. See muutkond ongi juhul $r = 1$ hüperboolse ruumi $\mathbb{H}^n$ mudeliks.

Riemanni geomeetria põhimõisteks, mis on vajalik, et anda lugejale ettekujutus Poincaré hüpoteesi üldistuseks olevast Thurstoni hüpoteesist, on lokaalselt homogeenne Riemanni muutkond. Lokaalselt homogeenne Riemanni muutkond peab rahuldama kahte tingimust:

1. olema lokaalselt isomeetriline antud homogeense Riemanni muutkonnaga M^m;

2. olema täielik Riemanni muutkond.

Olgu N lokaalselt homogeenne Riemanni muutkond. Esimene nõue tähendab, et muutkonna N suvalise punkti q jaoks leidub selle ümbrus $U_q \subset N$ ja isomeetria $\phi : U_q \to V$, kus $V \subset M^m$ on muutkonna M^m lahtine alamhulk. Homogeenset Riemanni muutkonda M^m nimetatakse lokaalselt homogeense Riemanni muutkonna N mudelmuutkonnaks. Et selgitada teist, täielikkuse nõuet, meenutagem geodeetilise joone mõistet Riemanni muutkonnal. Siledat joont $\gamma : I \to M^m$, kus $I \subset \mathbb{R}$, nimetatakse geodeetiliseks, kui $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$, kus $\dot\gamma$ on puutujavektorväli piki joont γ ja ∇ on Riemanni seostus. Geodeetilistel joontel on Riemanni muutkonnal täita sama roll, mis sirgetel Eukleidilises ruumis $\mathbb{R}^n$. Riemanni geomeetrias tõestatakse ([16]), et Riemanni muutkonna M^m suvalise punkti p ja suvalise puutujavektori $v \in T_pM^m$ korral leidub ainus geodeetiline joon $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M^m$ nii, et joon γ läbib punkti p ja tema puutujavektoriks punktis p on vektor v, s.t. $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v$. Seega punkt ja muutkonna puutujavektor selles punktis määravad üheselt ära geodeetilise joone, kuid see, kui kaugele seda võib jätkata, sõltub muutkonnast. Riemanni muutkonda nimetatakse geodeetiliselt täielikuks kui kõik selle muutkonna geodeetilised jooned on määratud kogu arvsirgel $\mathbb{R}$. Hoff-Rinowi teoreem kehtestab selle mõiste ja Riemanni muutkonna kui meetrilise ruumi täielikkuse mõiste ekvivalentsuse, kui kahe punkti vaheline kaugus määrata valemiga

$$d(p, q) = \inf\{l(\gamma) : \gamma \in \Omega(p, q)\},$$

kus $l(\gamma)$ on tükiti-sileda joone γ pikkus ja $\Omega(p, q)$ on muutkonna M^m tükiti-siledate punktist p punkti q kulgevate joonte hulk.

Ruumala vormiks Riemanni muutkonnal M^m meetrikaga g nimetatakse m-diferentsiaalvormi dV_g, mis on määratud muutkonna punktis p valemiga

$$dV_g(v_1, v_2, \ldots, v_m) = \det(g(v_i, e_j)), \tag{4}$$

kus $v_1, v_2, \ldots, v_m \in T_pM^m$ ja $\{e_i\}$ on puutujaruumi T_pM^m positiivselt orienteeritud ortonormeeritud baas. Ruumala vormi kuju lokaalsetes koordinaatides on

$$dV_g = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m.$$

Riemanni muutkonda M^m nimetatakse lõpliku ruumalaga Riemanni muutkonnaks, kui kehtib

$$\int_{M^m} dV_g < \infty.$$

Suuremat huvi pakuvad meile lõpliku ruumalaga lokaalselt homogeensed Riemanni muutkonnad.

4. Thurstoni hüpotees

Olles end varustanud Riemanni geomeetria vajalike mõistetega, võime asuda kirjeldama Poincaré probleemiga seotud geomeetria ja topoloogia valdkonna edasist arengut. Olulise panuse sellesse arengusse on andnud W. Thurston ([21]), kes 1980-ndatel aastatel edendas teistsugust, topoloogilistest meetoditest erinevat lähenemisviisi 3-mõõtmelistele muutkondadele. Thurston vaatles lokaalselt homogeenseid Riemanni muutkondi, mille mudelmuutkonnaks on hüperboolne ruum $\mathbb{H}^3$. Selliseid muutkondi nimetatakse hüperboolseteks muutkondadeks. Mitte iga 3-mõõtmeline muutkond ei saa olla varustatud sellise meetrikaga (mis teeb ta hüperboolseks muutkonnaks), sest on olemas ilmsed ja hästituntud takistused. Kõige üldisemalt formuleeritud Thurstoni hüpotees väidab, et need takistused osutuvad ainukesteks ja et kui nad kõrvaldada, siis saab muutkonda varustada hüperboolse muutkonna meetrikaga. Tõestanud selle hüpoteesi mitme erijuhu korral, jõudis Thurston hüpoteesi üldisema formuleeringuni lokaalselt homogeensete meetrikate olemasolust (kas hüperboolsete või vastasel juhul kõikide muutkondade jaoks). Seda hüpoteesi hakati nimetama Thurstoni geometriseerimise hüpoteesiks. Oluline on, et selles hüpoteesis sisaldub Poincaré hüpotees erijuhuna. Thurstoni hüpoteesi eelis Poincaré hüpoteesi ees väljendub selles, et Thurstoni hüpotees:

1. käsitleb kõiki kinniseid orienteeritavaid 3-muutkondi;
2. tekitab seose 3-mõõtmeliste muutkondade topoloogia ja diferentsiaalgeomeetria vahel.

Et anda Thurstoni hüpoteesi täpne formuleering, meenutagem mõnda hädavajalikku mõistet muutkondade teooriast. Olgu M^m ja N^n kaks siledat muutkonda, $n \geqslant m$, ja olgu $f : M^m \to N^n$ sile kujutus. Kujutust f nimetatakse muutkonna M^m sisestuseks muutkonda N^n, kui f on injektsioon ja kujutuse f diferentsiaali $Df : TM^m \to TN^n$ astak igas punktis on m, s.t. maksimaalne.

Topoloogiliste muutkondade teoorias on tähtis roll topoloogiliste muutkondade sidusa summa mõistel. Olgu M ja N kaks orienteeritavat topoloogilist (või siledat) sidusat n-mõõtmelist muutkonda. Eemaldame mõlema muutkonna sisemusest (s.t. riivamata nende muutkondade rajasid ∂M ja ∂N) n-mõõtmelise kera. Me saame kaks muutkonda, mille rajade üheks komponendiks on n-mõõtmeline sfäär. Nüüd kleebime need muutkonnad piki sfääre kokku nii, et nende orientatsioonid liimitavatel sfääridel kokku langeksid. Võib näidata, et saadud objekt on sile n-mõõtmeline muutkond (kui M ja N on siledad muutkonnad), mille sile struktuur on kooskõlas lähtemuutkondade siledate struktuuridega, ja mis ei sõltu ei kera ega kleepiva (liimiva) isomorfismi valikust. Sellist muutkonda nimetataksegi muutkondade M ja N sidusaks summaks ja tähistatakse sümboliga $M\#N$. Tuletame meelde, et topoloogiliste muutkondade teoorias nimetatakse 3-mõõtmelist muutkonda algmuutkonnaks (*prime manifold*), kui ta pole difeomorfne 3-mõõtmelise sfääriga S^3 ja igal antud muutkonda sisestatud ja seda kaheks mittelõikuvaks osaks eraldaval 2-mõõtmelisel sfääril S^2 on see omadus, et üks neist osadest on difeomorfne 3-mõõtmelise keraga.

Üks tähtsaimatest teoreemidest 3-mõõtmeliste muutkondade topoloogias kuulub H. Kneserile[1] ([11]).

Teoreem (Kneser, 1929). *Iga kinnine orienteeritav 3-mõõtmeline muutkond on esitatav lõpliku arvu orienteeritavate 3-mõõtmeliste algmuutkondade (prime factor) sidusa summana. See lahutus on ainus liidetavate järjestuse ja iga liidetava orientatsiooni säilitava difeomorfismi täpsusega. Kõikide orienteeritavate 3-mõõtmeliste algmuutkondade hulk on lõpmatu, kuid loenduv.*

Seega Kneseri teoreem taandab kinniste orienteeritavate 3-mõõtmeliste muutkondade topoloogia uurimise Kneseri lahutuse liidetavate uurimisele. Tähtsaks on antud juhul osutunud fakt, et iga lokaalselt homogeenne Riemanni muutkond on algmuutkond, välja arvatud erandina $\mathbb{R}P^3\#\mathbb{R}P^3$, kus $\mathbb{R}P^3$ on 3-mõõtmeline

[1] On huvitav teada, et Hellmuth Kneser sündis 16. aprillil 1898. a. Tartus, kus tema isa Adolf Kneser oli tollal Tartu Ülikooli matemaatikaõppejõud

projektiivne ruum, millele mudelmuutkonnaks on $S^2 \times \mathbb{R}$.

Tahtes kasutada Riemanni geomeetria meetodeid 3-mõõtmelise muutkonna uurimisel, peame viimase varustama lokaalselt homogeense meetrikaga ja seepärast peame piirduma algmuutkondade klassiga. Thurstoni hüpotees käib just algmuutkondade kohta.

Thurstoni hüpotees. *Olgu M kinnine, orienteeritav 3-mõõtmeline algmuutkond. Eksisteerib mittelõikuvate 2-mõõtmeliste tooride ja Kleini pudelite ühendi sisestus $f : \amalg_i T_i^2 \to M$ muutkonda M nii, et täiendi $M \setminus f(\amalg_i T_i^2)$ iga komponendi jaoks leidub lõpliku ruumalaga lokaalselt homogeenne meetrika.*

Seega on näha, et lõigates kinnise orienteeritava algmuutkonna M lahti piki 2-toore ja Kleini pudeleid, lahutame me selle tükkideks, millest igaühe jaoks leidub lokaalselt homogeenne Riemanni meetrika. Tasub tähele panna, et sisestus f tekitab 2-toori ja Kleini pudeli fundamentaalrühmade injektiivse homomorfismi muutkonna M fundamentaalrühma $\pi(M)$. Seda kasutades võib näidata, et Thurstoni hüpoteesist järeldub Poincaré hüpotees, s.t. Poincaré hüpotees on Thurstoni hüpoteesi erijuht. Olgu Σ^3 homotoopne sfäär, s.t. kinnine ühelisidus (s.t. triviaalse fundamentaalrühmaga) 3-mõõtmeline muutkond. Oletame, et Thurstoni hüpotees vastab tõele. Siis pole keeruline näidata, et homotoopse sfääri Σ^3 lahutus piki 2-toore ja 2-Kleini pudeleid lahtilõikamise teel on triviaalne, s.t. et homotoopset sfääri Σ^3 selles mõttes lahutada ei saa. Tõepoolest, kui selline 2-toor või Kleini pudel leiduksid, siis kujutuksid nende fundamentaalrühmad (nad on mittetriviaalsed) injektiivselt rühma $\pi(\Sigma^3)$ kuid $\pi(\Sigma^3) = \{1\}$ on triviaalne, seega selliseid 2-toore ja Kleini pudeleid pole. Vastavalt Thurstoni hüpoteesile leidub sfääril Σ^3 lõpliku ruumalaga lokaalselt homogeenne Riemanni meetrika. Et $\pi(\Sigma^3) = \{1\}$, on Σ^3 mudelmuutkonnaks Σ^3. Kuid Σ^3 on kompaktne muutkond ja 3-mõõtmelistest mudelmuutkondadest on kompaktne ainult üks, S^3. Seega on Σ^3 isomeetriline (seega difeomorfne) muutkonnaga S^3, millega on Poincaré hüpotees tõestatud.

5. Ricci voog, Hamiltoni ja Perelmani tulemused

Riemanni geomeetria vaatevinklist kinnitab Thurstoni hüpotees "parima võimaliku" meetrika olemasolu kinnisel 3-mõõtmelisel muutkonnal. Sellise meetrika võib konstrueerida sobiva vektorvälja integraaljoonte abil antud muutkonna kõikide meetrikate ruumil. Mainime, et lõplikumõõtmelise sileda muutkonna M^m kõikide Riemanni meetrikate ruum $\mathfrak{G}_{M^m}$ on lõpmatumõõtmeline funktsionaalne ruum, mille elementideks on antud muutkonnal määratud Riemanni meetrikad g. Meenutagem, et kui N^n on lõplikumõõtmeline sile muutkond ja X on vektorväli muutkonnal N^n, siis genereerib vektorväli X integraaljoonte voo, mille iga joon $\alpha : I \to N^n$, kus $I \subset \mathbb{R}$, rahuldab diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\frac{d}{dt}(\alpha(t)) = X(\alpha(t)) \tag{5}$$

algtingimusega $\alpha(0) = p \in N^n$. Võrrandisüsteem (5) näitab, et vektorvälja integraaljoone puutujavektor iga $t \in I$ korral on võrdne vektorvälja väärtusega vastavas punktis $\alpha(t)$.

Kuna muutkonnaks N^n on lõplikumõõtmelise muutkonna M^m kõikide meetrikate funktsionaalne ruum $\mathfrak{G}_{M^m}$, siis selleks, et meil oleks määratud vektorväli meetrikate ruumil $\mathfrak{G}_{M^m}$, peame sobivalt valima funktsionaali sellel ruumil. Funktsionaal peab sõltuma meetrikast (ja võib-olla meetrika tuletistest) ja meetrikate ruumi $\mathfrak{G}_{M^m}$ igas punktis g on funktsionaali väärtuseks sümmeetriline teist järku kovariantne tensor nagu meetrikagi. Kõige loomulikum ja lihtsam valik on Ricci kõverustensor Ric_{ij} (1). Sel juhul kirjeldab vektorvälja integraaljoonte voogu võrrandisüsteemiga (5) analoogiline võrrandisüsteem

$$\frac{d}{dt}(g(t)) = -2\,\mathrm{Ric}(g(t)). \tag{6}$$

Võrrandisüsteemiga (6) määratud integraaljoonte voogu meetrikate ruumis $\mathfrak{G}_{M^m}$ nimetatakse Ricci vooks (*Ricci flow*). Ricci voo mõiste võttis kasutusele R. Hamilton. Põhjused, miks Hamilton valis võrrandisüsteemi (6) paremale poole Ricci kõverustensori, on väga sarnased nendega, miks Einstein võttis oma gravitatsiooniteoorias kasutusele Ricci kõverustensori: vaja oli teist järku kovariantset sümmeetrilist tensorit, mis sõltuks meetrikast ning selle esimest ja teist järku osatuletistest. Nende nõuetega on Ricci kõverustensor määratud peaaegu üheselt (meetrilise tensori kordseks oleva tensori täpsusega).

Olgu $x^1, x^2, \ldots, x^m$ Riemanni muutkonna M^m lokaalsed harmoonilised koordinaadid meetrika $g(t)$ suhtes, kus $g(t)$ on võrrandisüsteemiga (6) määratud Ricci voog. Riemanni muutkonna harmoonilistes koordinaatides kehtib võrdus ([16])

$$-2\,\mathrm{Ric}_{ij} = \Delta\, g_{ij} + Q_{ij}(g, \partial g),$$

kus $\Delta = g^{kl}\partial_k\partial_l$ on Laplace'i operaator (meetrikas g) ning avaldis Q_{ij} on polünomiaalne meetrika g ja tema osatuletiste suhtes, sealjuures ruutvorm osatuletiste suhtes. Muutkonna M^m harmoonilistes koordinaatides muutub Ricci voo võrrandisüsteemi (6) kuju järgmiseks:

$$\frac{dg_{ij}}{dt} = \Delta\, g_{ij} + Q_{ij}(g, \partial g). \tag{7}$$

See on mittelineaarne soojusjuhtivuse tüüpi võrrand meetrika jaoks. Diferentsiaalvõrrandite teooriast järeldub Ricci voo $g(t)$ olemasolu ja ainsus ajaintervallil $-\delta < t < \delta$, kui algtingimuseks on sile Riemanni meetrika g_0. Seega Ricci voo võrrandisüsteemi (6) paremal poolel asetseval miinusel on tähtis roll, sest ta viib meid korrektsele soojusjuhtivuse tüüpi võrrandile (harmoonilistes koordinaatides) ja sellega Ricci voo eksisteerimine on garanteeritud. Kui võrrandisüsteemi (6) paremal pool asuv Ricci tensor oleks plussiga, siis esimene liige võrrandisüsteemi (7) paremal poolel oleks miinusega ja vastav võrrandisüsteem oleks soojusjuhtivuse tüüpi võrrand tagasisuunatud ajaga. Sellisel võrrandisüsteemil lahendeid üldiselt ei ole.

Võrrandisüsteemi (6) lahendiks algtingimusega $g(0) = g_0$, kus g_0 on mingi sile Riemanni meetrika muutkonnal M^m, on Riemanni meetrikate $g(t)$ pere antud muutkonnal M^m. Riemanni meetrikate pere $g(t)$ käitumine erinevate parameetri t väärtuste korral ja samuti tekkivad singulaarsused olid Hamiltoni uuringute objektiks. Toome ära kaks Hamiltoni poolt tõestatud tulemust ([7], [8], [9]):

1. *olemasolu ja ainsus lõplikul ajaintervallil*: kui g_0 on sile Riemanni meetrika kompaktsel muutkonnal, siis leidub selline meetrikast g_0 sõltuv arv $\epsilon > 0$ ja võrrandisüsteemi (6) ainuke lahend $g(t)$, mis on määratud $t \in [0, \epsilon)$ korral ning $g(0) = g_0$;

2. *singulaarsuste tekkimise iseloomustamine kõveruse abil*: kui võrrandisüsteemi (6) lahend $g(t)$ on määratud intervallil $[0, T)$, kus T on reaalarv, ja seda pole võimalik jätkata suuremale intervallile $[0, T')$, kus $T' > T$, siis leidub muutkonna punkt x, milles Riemanni meetrikaga $g(t)$ määratud kõverustensor $R(x, t)$ on tõkestamata $t \to T$ korral.

Need Hamiltoni tulemused on üldise iseloomuga selles mõttes, et kehtivad suvalise mõõtmega muutkonna jaoks. Hamilton kasutas kolmemõõtmeliste muutkondade uurimiseks omaenda tehnikat ning proovis tõestada Thurstoni hüpoteesi. Õnnestus tal see siiski vaid tugevate lisaeeldustega juhu jaoks. Hamiltoni poolt tõestatud teoreemidest järeldub järgmine tulemus:

Kui Ricci voog $g(t)$ 3-mõõtmelisel sidusal Riemanni muutkonnal M Riemanni meetrikaga g_0 (s.t. $g(0) = g_0$) on määratud suvalise $t \in [0, \infty)$ korral ja meetrika $g(t)$ poolt määratud normaliseeritud kõverus $t \cdot R(x, t)$, kus $x \in M$, on tõkestatud $t \to \infty$ korral, siis rahuldab muutkond M Thurstoni hüpoteesi.

Thurstoni hüpoteesi lahenduse pakkus välja Perelman oma preprintide seerias ([13], [14], [15]). Perelman jätkas Ricci voo uurimist, pakkudes välja suure hulga originaalseid ideid. Selle artikli lõpetuseks olekski mõningate Perelmani ideede ja meetodite lühike kirjeldus ([3], [12]).

Gravitatsiooniteoorias nimetatakse Einstein-Hilberti mõjufunktsionaaliks funktsionaali $S : \mathfrak{G}_M \to \mathbb{R}$, kusjuures

$$S(g) = \int_M \mathfrak{R}\, dV_g, \tag{8}$$

kus M on Riemanni muutkond meetrikaga g, $\mathfrak{R}$ on skalaarne kõverus (2), dV_g on ruumala vorm (4) ja $\mathfrak{G}_M$ on muutkonna M meetrikate ruum. Mainime, et selle mõjufunktsionaali Euler-Lagrange'i võrrandid on Einsteini võrrandid gravitatsioonivälja jaoks.

Meenutagem, et siledal lõplikumõõtmelisel muutkonnal N antud sile funktsioon $f : N \to \mathbb{R}$ tekitab vektorvälja $\mathrm{grad}(f)$, kusjuures muutkonna N lokaalsetes koordinaatides $x^1, x^2, \ldots, x^n$ kehtib

$$\mathrm{grad}(f) = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right).$$

Vektorvälja $\mathrm{grad}(f)$ integraaljoontega on määratud selle vektorvälja voog, mida nimetatakse funktsiooni f gradiendi vooks. Einstein-Hilberti mõjufunktsionaal on funktsionaal muutkonna M meetrikate ruumil $\mathfrak{G}_M$ ja seoses sellega kerkib loomulik küsimus, kas Ricci voog on seotud Einstein-Hilberti mõjufunktsionaaliga $S(g)$? Näiteks, kas Ricci voog on Einstein-Hilberti mõjufunktsionaali gradiendi voog? Osutub, et see on väga lähedane sellele, et olla õige, kuid siiski vastus on eitav. On võimalik isegi näidata, et Einstein-Hilberti mõjufunktsionaali gradiendi voog ei eksisteeri ja see on seotud sellega, et Einstein-Hilberti mõjufunktsionaali varieerimine viib meid soojusjuhtivuse võrrandile skalaarse kõveruse jaoks tagasisuunatud ajaga, s.t.

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{R}) = -\Delta \mathfrak{R} + Q,$$

ja see on mittekorrektne võrrand. Funktsiooni $f \in C^\infty(M)$ kasutades modifitseerime Einstein-Hilberti mõjufunktsionaali $S(g)$ järgmiselt

$$\mathcal{S}(g, f) = \int_M (\mathfrak{R} + |\mathrm{grad}(f)|^2)\, e^{-f}\, dV_g. \tag{9}$$

Funktsionaali $\mathcal{S}(g, f)$ võime vaadelda kui muutkonna M Riemanni meetrikate ruumil määratud funktsionaalide parve, kus parve parameetrite ruumiks on siledate funktsioonide ruum $C^\infty(M)$. Mainime, et funktsionaal $S(g, f)$ tekib stringiteoorias (väljateooria kaasaegses teoreetilises füüsikas ([2]), milles osakest kujutatakse mitte punktina ruumis nagu klassikalises teoorias, vaid ühedimensionaalse objektina (string) ehk matemaatika vaatevinklist kõverjoonena) kui madalenergia efektiivne mõjufunktsionaal, kusjuures funktsiooni f (ehk väljateooria terminites skalaarvälja) nimetatakse dilatoniks. Valime muutkonnal M mingi sileda mõõdu $d\mu$ ja defineerime Perelmani seose (*Perelman coupling*) valemiga

$$e^{-f} dV_g = d\mu. \tag{10}$$

Perelmani seose abil saadud funktsionaal

$$\mathcal{S}^\mu(g, f) = \int_M (\mathfrak{R} + |\mathrm{grad}(f)|^2)\, d\mu,$$

on funktsionaal muutkonna M Riemanni meetrikate ruumil $\mathfrak{G}_M$. Esmapilgul paistab, et saadud funktsionaal on palju keerulisem, kui Einstein-Hilberti funktsionaal $S(g)$ ja sellega meie suurt midagi ei võida, kuid osutub, et leidub selliste funktsioonide f (või mõõtude $d\mu$) üsna suur klass, et funktsionaali $S^\mu(g, f)$ gradiendi voog eksisteerib ja rahuldab võrrandisüsteemi

$$\frac{d}{dt}(\tilde{g}(t)) = -2\,(\mathrm{Ric}(\tilde{g}(t)) + D^2 f), \tag{11}$$

kus $D^2 f$ on funktsiooni f Hesse determinant Riemanni meetrika $\tilde{g}(t)$ suhtes. Seega võrrandisüsteemiga (11) määratud meetrikate $\tilde{g}(t)$ voog on infinitesimaalse difeomorfismi $D^2 f$ abil modifitseeritud Ricci voog (6), kus

$$D^2 f = \frac{d}{dt}(\psi_t^*(\tilde{g}(t))),$$

ja ψ_t on vektorvälja $\mathrm{grad}(f)$ poolt indutseeritud muutkonna M lokaalsete difeomorfismide üheparameetriline rühm. Järelikult funktsionaali $\mathcal{S}^\mu(g, f)$ gradiendi voog on Ricci voog infinitesimaalsete difeomorfismide täpsusega, kusjuures mõõdu $d\mu$ erinevatele valikutele vastavad erinevad infinitesimaalsed difeomorfismid $D^2 f$. On tähtis, et funktsionaal $\mathcal{S}^\mu$ kasvab mööda Ricci voogu.

Perelman näitas, et kui $g(t)$ on muutkonna M Ricci voog algtingimusega $g(0) = g_0$, siis suvalise $t > 0$ korral funktsioonide ja vastavate mõõtude klass, mille iga funktsioon f ja vastav mõõt $d\mu$ rahuldavad Perelmani seost (10) meetrika $g(t)$ korral, on väga lai, ja valides sobival teel funktsiooni f, Perelman uuris Riemanni meetrika $g(t)$ poolt tekitatud muutkonna M geomeetriat. Näiteks uurides funktsionaali $\mathcal{S}^\mu$ Perelman näitas, et meetrika $g(t)$ kidumist (kollapsit) muutkonna M mingi punkti p ümbruses on võimalik kindlaks teha funktsionaali $\mathcal{S}^\mu(f, g(t))$ väärtuse abil, kui funktsioon f on valitud nii, et e^{-f} on deltafunktsiooni $\delta(x - p)$ lähend. Mida suurem on Riemanni meetrika $g(t)$ kollaps punkti p ligidal, seda suurem absoluutväärtuselt on funktsionaali $\mathcal{S}^\mu(f, g(t))$ negatiivne väärtus. Kasutades nüüd seda, et funktsionaal $\mathcal{S}^\mu(f, g(t))$ kasvab mööda Ricci voogu, on võimalik vältida meetrika suvalise mastaabiga kollapsit lõpliku aja t jooksul.

Kirjandus

1. V. Abramov, *Poincaré hüpotees*, Eesti Matemaatika Seltsi aastaraamat 2001, Tartu 2003, 56–68.

2. V. Abramov, P. Kuusk, *Supersümmeetria füüsikas ja matemaatikas*, Tartu Ülikooli Kirjastus, Tartu 1994.

3. M.T. Anderson, *Geometrization of 3-manifolds via the Ricci flow*, Notices Am. Math. Soc. **51** (2004), 184–193.

4. S. Donaldson, *An application of gauge theory to the topology of 4-manifolds*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 269–316.

5. D.S. Freed, K. Uhlenbeck, *Instantons and Four-Manifolds*, Springer-Verlag, 1984.

6. M. Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Differential Geom. **17** (1982), 357–453.

7. R. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Differential Geom. **17** (1982), 255–306.

8. R. Hamilton, *The Harnack estimate for the Ricci flow*, J. Differential Geom. **37** (1993), 225–243.

9. R. Hamilton, *Formation of singularities in the Ricci flow*, Surveys in Differential Geometry 2, International Press 1995, 7–136.

10. R. Kirby, L. Siebenmann, *On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung*, Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969), 742–749.

11. H. Kneser, *Geschlossene Flächen in drei-dimensionalen Mannigfaltigkeiten*, Jahresber. D. M. V. **38** (1929), 248–260.

12. J.W. Morgan, *Recent progress on the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds*, Bull. Am. Math. Soc., New Ser. **42** (2005), 57–78.

13. G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, preprint (2002), math.DG/0211159.

14. G. Perelman, *Ricci flow with surgery on thee-manifolds*, preprint (2003), math.DG/0303109.

15. G. Perelman, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, preprint (2003), math.DG/0307245.

16. P. Petersen, *Riemannian Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 171, Springer, 1997.

17. H. Poincaré, *Cinquième complément à l'analysis situs*, Rend. Circ. Mat. Palermo **18** (1904), 45–110.

18. S. Smale, *The generalized Poincaré conjecture in higher dimensions*, Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960), 373–375.

19. J. Stallings, *Polyhedral homotopy spheres*, Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960), 485–488.

20. C.H. Taubes, *Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds*, J. Diff. Geom. **25** (1987), 363–430.

21. W. Thurston, *Three-dimensional Geometry and Topology, Vol. 1*, Princeton Math. Ser., Vol. 35, Princeton Univ. Press 1997.

22. A. Wallace, *Modifications and cobounding manifolds. II*, J. Math. Mech. **10** (1961), 773–809.