Topeltjadade summeerimise uurimismeetoditest[1]

Maria Zeltser[2]

Tartu Ülikool

Topeltjada kujutab endast maatriksit, millel on lõpmatu palju ridu ja veerge. Just sellised maatriksid on aluseks tavaliste jadade maatriksteisendustele.

Topeltjada (x_{kl}) võib samastada tavalise jadaga (z_i) sama bijektsiooni abil, mis kasutatakse ratsionaalarvude loendamisel:

$$T(x) := (z_i) := (x_{11}, x_{21}, x_{22}, x_{12}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{23}, x_{13}, x_{41}, ...).$$

Kõigi topeltjadade vektorruumi, kus elementide liitmine ja korrutamine skalaariga määratakse koordinaaditi, tähistatakse sümboliga Ω. Tema alamruume nimetatakse *topeltjadade ruumideks*. Samuti võib topeltjadade ruume samastada jadaruumidega bijektsiooni T abil.

Seoses sellega annavad topeltjadade ruumid palju näiteid ja kontranäiteid (tavaliste jadade) summeeruvusteoorias. Näiteks topeltjadade ruumide abil oli näidatud [3], et leidub separaabel FK-ruum (s.t. jadaruum, mis on varustatud täieliku metriseeruva lokaalselt kumera topoloogiaga, mille suhtes on kõik koordinaatfunktsionaalid $x = (x_i) \to x_k$ $(k \in \mathbb{N})$ pidevad), mis ei võrdu temas sisalduvate maatriksmeenetluste summeeruvusväljade ühisosaga.

Erinevalt jadadest saab topeltjadade jaoks defineerida palju koonduvuseeskirju. Neist kõige tuntum ja kõige enam uuritud on Pringsheimi poolt 1898. aastal [8] defineeritud koonduvus, mida me nimetame p-koonduvuseks. Topeltjada (x_{kl}) koondub arvuks a *Pringsheimi mõttes*, kui tema liikmete ja arvu a vahe saab kui tahes väikseks kõikjal, v.a. lõpliku arvu ridade ja veergude korral,

[1] Tahan siiralt tänu avaldada oma juhendajale prof. T. Leigerile abi eest doktoritöö kirjutamisel.

[2] Maria Zeltser sai 2002. aastal EMSi Arnold Humala preemia.

matemaatilises keeles, kui

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \ k, l > N \ \Rightarrow | \ x_{kl} - a \ | < \varepsilon.$$

Selle koonduvuse puhul tekitab kõige enam probleeme asjaolu, et koonduv topeltjada ei pruugi olla tõkestatud. Sellest puudusest on vaba Hardy poolt [5] 1916. aastal kasutusele võetud regulaarse koonduvuse (lühidalt r-koonduvuse) mõiste, mille puhul eeldatakse lisaks p-koonduvusele veel vaadeldava topeltjada kõigi ridade ja veergude koonduvust. Näiteks, topeltjada

$$(x_{kl}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

koondub Pringsheimi mõttes arvuks 0, kuid ei ole tõkestatud, seega ei koondu regulaarselt.

Nimetatud kahe ja mitmete neile lähedaste koonduvustega seotud neljamõõtmeliste maatriksite abil määratud teisenduste kirjeldamisele olid pühendatud 20. sajandi esimesel poolel ilmunud topeltjadade summeerimist käsitlevad klassikalised tööd, mille hulgas on kõige tähelepanuväärsem Hamiltoni artikkel [4]. Seejuures kasutasid autorid valdavalt klassikalise analüüsi meetodeid. Funktsionaalanalüüsi meetodeid rakendas topeltjadade ruumide uurimisel esimesena Hill 1940. aastal. [6].

Hoolimata sellest, et tavaliste jadade summeeruvusteooria areneS 20. sajandi teisel poolel kiiresti nüüdisaegseks uurimisvaldkonnaks, milles funktsionaalanalüüsi meetoditel on oluline koht, topeltjadade summeeruvuse uurimisel sellist progressi ei toimunud. Põhjuseks on ilmselt oluliste topeltjadade ruumide keeruline topoloogiline struktuur, mis teeb traditsiooniliste funktsionaalanalüütiliste meetodite rakendamise väga keeruliseks. Erandiks on r-koonduvate topeltjadade ruum $\mathcal{C}_r$, millel on suhteliselt lihtne loenduv põhihulk. Seevastu kõigi tõkestatud p-koonduvate topeltjadade ruum $\mathcal{C}_{bp}$ ei ole oma loomulikus topoloogias separaabel, kõigi p-koonduvate topeltjadade ruum $\mathcal{C}_p$ ei ole isegi oma loomulikus topoloogias metriseeruv, selle ruumi LFDK-topoloogia kirjelduse andsid Boos, Leiger ja Zeller alles 1997. aastal [2].

Eelneva märkuse põhjal on arusaadav, et topeltjadade summeeruvuse uurimisel on olulisem nn. jäikade (s.o. klassikalise analüüsi võtetel põhinevate) meetodite arendamine, täpsemalt, nende oskuslik kombineerimine pehmete (s.o. lineaar-topoloogiliste) meetoditega. See eeldab topeltjadade ruumidega seotud probleemide põhjalikku käsitlemist.

Olulise tõuke andis topeltjadade ruumide uurimisele 1977. aastal valminud Przybylski doktoritöö [9], milles käsitletakse nn. SM-menetlusi. Tegemist on jadade summeerimismenetlusega, see defineeritakse kolmemõõtmelise maatriksiga määratud maatriksteisendusega, mis seab jada vastavusse (vaadeldava eeskirja mõttes koonduva) topeltjadaga. Przybylski vaatles kindlat tüüpi SM-menetlusi, mis on määratud topeltjada c-koonduvusega. Selle korral eeldatakse, et topeltjada kõik veerud on koonduvad jadad ja nende piirväärtused moodustavad samuti koonduva jada. Przybylski näitas, et kahe regulaarse maatriksmenetluse kompositsioon on alati esitatav niisuguse SM-menetlusega.

Boos, Leiger ja Zeller [2] käsitlesid SM-menetlusi üldisemalt, lähtudes suvalisest etteantud lineaarsest topeltjadade koonduvuseeskirjast. Nende 1997. aastal ilmunud töö põhitulemused baseeruvad nn. e-koonduvusel, mis on nii p- kui ka c-koonduvusest üldisem. Vastavalt definitsioonile e-koondub topeltjada (x_{kl}) arvuks a, kui

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists l_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall l \geq l_0 \;\; \exists k_l \in \mathbb{N} : \; k \geq k_l \;\Rightarrow\; |x_{kl} - a| \leq \varepsilon.$$

Osutub, et kõigi e-koonduvate topeltjadade ruum $\mathcal{C}_e$ on mittemetriseeruv LFDK-ruum, kõigi tõkestatud e-koonduvate topeltjadade ruum $\mathcal{C}_{be}$ on mitteseparaabel FDK-ruum, milles kõigi c-koonduvate topeltjadade ruum $\mathcal{C}_c$ on separaabel kinnine alamruum. e-koonduvuse olulisust topeltjadade ja -ridade puhul kinnitab asjaolu, et talle vastavaid summeerimismenetlusi, mis saksakeelses kirjanduses kannavad nimetust *Einschachtelungsverfahren*, on uuritud palju varem [12]. Näitasime, et ka Volkovi [11] vaadeldud summeerimismenetlused on tegelikult e-koonduvusega määratud SM-menetlused.

Meie uuringutes oli põhitähelepanu pööratud topeltjadade summeeruvusele eespool mainitud kuue koonduvuseeskirja mõttes.

Üheks põhieesmärgiks oli niisuguste “libiseva küüru” meetodite väljatöötamine, mis võimaldaksid leida tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et SM-menetlus teisendaks iga tõkestatud jada *e*-, *be*- või *c*-koonduvaks topeltjadaks, samuti selleks, et neljamõõtmeline maatriks oleks nimetatud koonduvuse mõttes koonduvust säilitav (ülejäänud kolme koonduvuse jaoks on need tingimused teada). Samuti oli leitud ka tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et SM-menetlus teisendaks iga jada ja iga koonduva jada *e*-, *be*- või *c*-koonduvaks topeltjadaks.

Teiseks eesmärgiks on vastavate summeeruvusväljade struktuuri kirjeldamine. Piirdume seejuures põhiliselt r- ja c-koonduvusega, sest ruumide $\mathcal{C}_r$ ja $\mathcal{C}_c$ topoloogiline struktuur on soodsam, see teeb võimalikuks ka summeeruvusväljade $\mathcal{C}_{rA}$ ja $\mathcal{C}_{cA}$ struktuuri täpsema kirjeldamise. Seejuures lähtume samast skeemist, mis on kasutusel kahemõõtmeliste maatriksite summeeruvusväljade struktuuri uurimisel. Topoloogilise kaasruumi $\mathcal{C}'_{\nu A}$ abil kirjeldame summeeruvusvälja tähtsate alamruumide seoseid ja uurime, kuidas need seosed iseloomustavad maatriksi summeeruvus-teoreetilisi omadusi.

Summeeruvusväljade struktuuriga seoses otsime vastust mitmele küsimusele, mis puudutavad antud koonduvusele vastavate tõkestatud topeltjadade summeeruvust. Teatavasti kehtivad tavaliste koonduvust säilitavate maatriksmenetluste puhul järgmised tähelepanuväärsed väited: 1) kui kõigi koonduvate jadade ruum on summeeruvusväljas kinnine, siis vaadeldav menetlus ei summeeri tõkestatud hajuvaid jadasid, 2) kui vaadeldav menetlus summeerib ainult tõkestatud jadasid, siis summeerib ta ainult koonduvad jadad, ning 3) kui menetlused A ja B on regulaarsed ja iga A-summeeruv tõkestatud jada on B-summeeruv, siis nendel jadadel on menetlused A ja B kooskõlas. Seadsime endale eesmärgi selgitada välja, milliste eespool nimetatud koonduvuseeskirjade puhul toodud väited on laiendatavad neljamõõtmeliste maatriksitega määratud topeltjadade summeerimismenetlustele. Iga koonduvuse puhul tuleb lähtuda konkreetselt temaga seotud tõkestatuse definitsioonist, näiteks *bp*- ja r-koonduvuse korral on selleks topeltjadade “tavaline”, s.o. ühtlane tõkestatus. Tulemus on mõnevõrra üllatav, sest ükski väidetest

1) – 3) ei kehti r-koonduvuse puhul (ka mitte p- ja bp-koonduvuse puhul). See lükkab ümber ühe Stieglitzi poolt 1970. aastal publitseeritud artikli [10] põhitulemuse. Seevastu e-, be- ja c-koonduvuse korral toodud väited kehtivad.

Oluline osa uuringutest on pühendatud topeltjadade ruumide β-kaasruumide nõrgale jadalisele täielikkusele. Definitsiooni kohaselt koosneb antud topeltjadade ruumi E $\beta(\nu)$-kaasruum $E^{\beta(\nu)}$ topeltjadadest $u = (u_{kl})$, mille puhul topeltrida $\sum_{k,l} u_{kl}x_{kl}$ on ν-koonduv iga $x = (x_{kl}) \in E$ korral. Loomulikel eeldustel moodustavad E ja $E^{\beta(\nu)}$ duaalse paari topoloogiliste vektorruumide teooria mõttes. See võimaldab mitmeid summeeruvusega seotud probleeme käsitleda selle teooria kontekstis. Erilisel kohal on siinjuures küsimus $\beta(\nu)$-kaasruumi nõrgast jadalisest täielikkusest. Ühelt poolt on nimetatud omadus oluline kokkupuutepunkt summeeruvusteooriaga, sest ta on lähtekohaks nn. Mazuri-Orliczi tüüpi teoreemidele, teisalt on see tähtis eeldus mõnede funktsionaalanalüüsi teoreemide rakendamise seisukohalt (näiteks Kaltoni teoreemi kinnisest graafikust). Klassikaline tulemus, mille kohaselt soliidse jadaruumi β-kaasruum on nõrgalt jadaliselt täielik, kuulub Köthele ja Toeplitzile [7]. "Libiseva küüru" tehnikast lähtudes on paljud autorid täpsustanud jadaruumi omadusi, mis garanteerivad β-kaasruumi nõrga jadalise täielikkuse. Nende probleemiasetuste ülekandmisel topeltjadade ruumidele lähtusime Boosi, Flemingi ja Leigeri poolt 1996. aastal [1] defineeritud omadusest signed P_OSCP. Selle mõiste eeskujul defineerime ν-koonduvuse korral ($\nu \in \{p, r, e, c\}$) vastava tingimuse signed P_OSCP(ν), mille täidetus topeltjadade ruumis E garanteerib $\beta(\nu)$-kaasruumi $E^{\beta(\nu)}$ nõrga jadalise täielikkuse, seejuures signed P_OSCP(r) ja signed P_OSCP(c) garanteerivad ka vastavalt $\beta(bp)$- ja $\beta(be)$- kaasruumi nõrga jadalise täielikkuse.

Duaalse paari $< E, E^{\beta(\nu)} >$ abil tõestame ka kolm üldist Bennetti-Kaltoni tüüpi sisalduvusteoreemi. Need on teoreemid, mis kirjeldavad seoseid topeltjadade ruumi struktuuri ja temal määratud maatriksteisenduste pidevuse vahel. Veendume, et see, kas Bennetti ja Kaltoni tuntud teoreemid on ülekantavad duaalse paari $< E, E^{\beta(\nu)} >$ juhule või ei, sõltub olulisel määral vaadeldavast koonduvuseeskirjast ν.

Kirjandus

1. J. Boos, D. J. Fleming, T. Leiger, Sequence spaces with oscillating properties, *J. Math. Anal. Appl.* **200** (1996), 519–537.
2. J. Boos, T. Leiger, K. Zeller, Consistency theory for SM-methods, *Acta Math. Hungar.* **76** (1997), 83–116.
3. J. Boos, T. Leiger, M. Zeltser, The intersection of matrix domains including a given sequence space. *Houston J. Math.* **32**(1) (2006), 205–225.
4. H. J. Hamilton, Transformations of multiple sequences, *Duke Math. J.* **2** (1936), 29–60.
5. G. H. Hardy, On the convergence of certain multiple series. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **19** (1916–1919), 86–95.
6. J. D. Hill, On perfect summability of double sequences, *Bull. Amer. Math. Soc.* **46** (1940), 327–331.
7. G. Köthe, O. Toeplitz, Lineare Räume mit unendlich vielen Koordinaten und Ringe unendlichen Matrizen. *J. reine angew. Math.* **171** (1934), 193–226.
8. A. Pringsheim, Elementare Theorie der unendliche Doppelreihen. *Sitsungs berichte der Math. Akad. der Wissenschafften zu Münch. Ber.* **7** (1898), 101–153.
9. B. Przybylski, *On the perfectness of methods defined by the iteration product of matrix transformations*, Thesis, University of Lódź, 1977.
10. M. Stieglitz, Über die Limitierbarkeit unbeschränkter Doppelfolgen. *Studia math.* **34** (1970), 177–182.
11. I. Volkov, Some problems of linear matrix transformations. *Matem. Sbornik, Nov. Seriya*, 1959, **44(86): 1**, 85–112 (in Russian).
12. K. Zeller, W. Beekmann, *Theorie der Limitierungsverfahren,* Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1970.