Matemaatika

$M(r,s)$-võrratus

RAINIS HALLER[1]
Tartu Ülikool

Sissejuhatus

Käesolevas töös tutvustatakse Banachi ruumide (täpsemalt, nende kaasruumide) struktuuri $M(r,s)$-võrratuste kontekstis. Peamiselt vaadeldakse artiklite [4,5,6] ning neid artikleid sisaldava doktoritöö[2] tulemusi.

Meenutame, et Banachi ruumiks nimetatakse selliseid normiga vektorruume (üle korpuse $\mathbb{K}$, s.t. üle reaal- või kompleksarvude korpuse), milles elementide jada koondumine on määratud Cauchy kriteeriumiga (nagu eukleidilises ruumis).

Ruumist[3] X ruumi Y tegutsevate kõigi pidevate operaatorite[4] ruumi tähistame $\mathcal{L}(X,Y)$ (erijuhul $X=Y$ kirjutame $\mathcal{L}(X)$). Siin saame erijuhul $Y=\mathbb{K}$ kaasruumi $X^*=\mathcal{L}(X,\mathbb{K})$. Selle kaasruum on omakorda ruumi X teist järku kaasruum $X^{**}=\mathcal{L}(X^*,\mathbb{K})$ jne. Nii saame moodustada veelgi kõrgemat järku kaasruume.

Ruumi võib üldiselt vaadelda tema paarisarvulist järku kaasruumide alamruumina. Täpsemalt räägitakse ruumi X loomulikust sisestusest:

$$j_X\colon X\to X^{**},\quad x\mapsto x^{**},\quad x^{**}(x^*)=x^*(x)\quad \forall x^*\in X^*.$$

Kui $j_X(X)=X^{**}$, siis ruumi X nimetatakse refleksiivseks (s.o. samaväärne kaasruumi X^* refleksiivsusega). Mitterefleksiivsel juhul

[1]Rainis Haller sai 2003.a. EMSi Arnold Humala preemia.

[2]R. Haller, *$M(r,s)$-inequalities*, Dissert. Math. Univ. Tartuensis, 28, Tartu University Press, Tartu, 2002. Juhendaja prof. E. Oja.

[3]Ruumi all mõtleme Banachi ruumi ja alamruumi all sellist (vektor-) alamruumi, mis on ise Banachi ruum (lähteruumi normi suhtes), s.t. kinnist (vektor-) alamruumi.

[4]Operaatori all mõistame lineaarset kujutust ruumide vahel, s.o. kujutust, mis on kooskõlas nende ruumide algebralise struktuuriga.

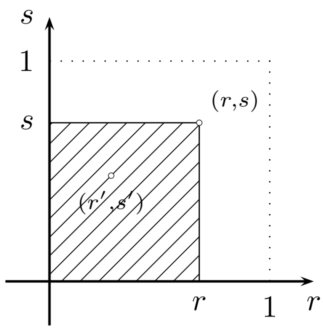
on ruumi kaasruumide struktuur üldiselt keerulisem lähteruumi omast. Konkreetse kaasruumi täielik kirjeldus on üsna haruldane; osalinegi kirjeldamine on sageli väärtuslik. Siiski on teada, et X^{***} esitub alati otsesummana[5] $X^* \oplus X^\perp$ (täpsemalt, $X^{***} = j_{X^*}(X^*) \oplus (j_X(X))^\perp$).

$M(r,s)$-võrratus

Olgu $X \neq \{0\}$ ruumi Y alamruum ning $r, s \geq 0$. Ütleme (vrd. [2]), et X on *$M(r,s)$-võrratust rahuldav ideaal* (ruumis Y), kui alamruum $X^\perp \subset Y^*$ on täiendatav, s.t. leidub (kinnine!) alamruum $G \subset Y^*$ nii, et $Y^* = G \oplus X^\perp$, ning

$$\|y^*\| \geq r\|g\| + s\|h\|, \quad y^* = g + h, \quad g \in G, \quad h \in X^\perp. \qquad (*)$$

Paneme tähele, et tingimuse $(*)$ kehtivuse korral võime paari (r,s) asendada temast "väiksemaga" (r', s'), kus $r' \leq r$ ja $s' \leq s$ (vt. joonist).



Ilmselt ei saa $M(r,s)$-võrratust rahuldava ideaali korral kehtida $r > 1$, samas $s > 1$ viitab triviaalsele juhule $X^\perp = \{0\}$.

Märgime ka, et Banachi ruumis on (kinnise) alamruumi täiendatavus (topoloogilises mõttes) samaväärne selle (vektor-) alamruumi täiendatavusega algebralises mõttes, s.t. leidub (lineaarne) projektor P nii, et vaadeldav ruum esitub otsesummana $\operatorname{ran} P \oplus \ker P$, kus üheks liidetavaks on see alamruum ise.

[5] Alamruumi $X \subset Y$ annullaator $X^\perp = \{y^* \in Y^* : y^*|_X = 0\}$ on kaasruumi Y^* alamruum.

Nimetusest

$M(r,s)$-võrratust rahuldav ideaal on M-ideaali ($r = s = 1$; vt. nt. [7]) üldistus ning sealt ka täht “M” ja sõna “ideaal”. Veelgi sügavamale minnes, “M” viitab maksimumnormile lähteruumis; kaasruumi summanorm ja lähteruumi maksimumnorm on teatud mööndustega duaalsed. (Selle seose täpsem selgitus nõuaks juba oluliselt rohkem valdkonna tundmist.) Nimetuses on sõna “ideaal” tulnud algebralisest ideaalist, nimelt C^*-algebras on M-ideaalideks parajasti kinnised kahepoolsed ideaalid. Näiteks ruumis $C(K)$ (s.o. kompaktsel Hausdorffi ruumil K kõigi pidevate operaatorite ruum) on M-ideaalideks parajasti alamruumid $\{f \in C(K)\colon f|_A = 0\}$, kus $A \subset K$ on suvaline kinnine hulk.

Ideaalid

Kui (päris-) alamruum X on M-ideaal ruumis Y, siis leidub täpselt üks niisugune projektor $P \in \mathcal{L}(Y^*)$, et $\ker P = X^\perp$ ja on täidetud tingimus $(*)$, juhul kui $r = s = 1$:

$$\|y^*\| = \|Py^*\| + \|y^* - Py^*\| \quad \forall y^* \in Y^*.$$

Ilmselt[6] $\|P\| = \|I - P\| = 1$.

M-ideaalidest inspireerituna räägitakse artiklis [3] ideaalist järgmises mõttes. Alamruumi $X \neq \{0\}$ nimetatakse *ideaaliks* ruumis Y, kui mingi projektori (*ideaaliprojektori*) $P \in \mathcal{L}(Y^*)$ korral $\ker P = X^\perp$ ja $\|P\| = 1$.

Ideaaliprojektor on tihedalt seotud Hahn-Banachi jätku-operaatoriga. *Hahn-Banachi jätkuoperaator* on (lineaarne!) operaator $\varphi\colon X^* \to Y^*$, kusjuures φx^* on funktsionaali $x^* \in X^*$ normi säilitav jätk ruumile Y.

Kui $\varphi\colon X^* \to Y^*$ on Hahn-Banachi jätkuoperaator ja $i\colon X \to Y$ on formaalne ühikoperaator, siis[7] $P = \varphi \circ i^*$ on ideaaliprojektor.

[6] Sümbol I tähistab ühikoperaatorit kaasruumis Y^*.

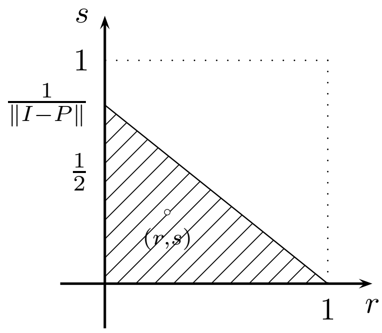
[7] Operaatori $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ kaasoperaator $A^* \in \mathcal{L}(Y^*,X^*)$ defineeritakse võrdusega

$$A^*y^* = y^* \circ A \quad y^* \in Y^*.$$

Ideaaliprojektori P korral saame jätkuoperaatori $\varphi\colon X^* \to Y^*$, kui defineerida $\varphi x^* = Py^*$, kus $y^* \in Y^*$ on funktsionaali $x^* \in X^*$ suvaline normi säilitav jätk.

Olgu X ideaal ruumis Y ja P vastav ideaaliprojektor. Kui $y^* \in Y^*$, siis ahendi $y^*|_X \in X^*$ üheks normi säilitavaks jätkuks on $Py^* \in Y^*$. Seeläbi on $\operatorname{ran} P$ ja X^* isomeetrilised ning me samastame nad. Koos sellega saame vaadelda (üldiselt mitte-Hausdorffi) nõrka topoloogiat $\sigma(Y, X^*)$. Ühtlasi saame algebralisele võrdusele $Y^* = \operatorname{ran} P \oplus \ker P$ anda kuju $Y^* = X^* \oplus X^\perp$. (Meenutame, et see võrdus kehtib alati juhul, kui $Y = X^{**}$.)

Üheks peamiseks probleemiks on siin ideaaliprojektori P leidumine. Niisugust projektorit ei pruugi leiduda isegi siis, kui lubada $\|P\| = \lambda > 1$. Kui aga niisugune projektor on olemas, siis (päris-) alamruum $X \subset Y$ on mingite parameetrite $r, s > 0$ korral $M(r, s)$-võrratust rahuldav ideaal ruumis Y. (Võime näiteks valida $r \le \frac{1}{\|P\|}$ ja $s \le \frac{1}{\|I-P\|}$. Vt. ka joonist, millel $\|P\| = 1$.)



Selge on, et $Y = X^{**}$ korral selline projektor leidub, iga ruum X on ideaal oma teises kaasruumis X^{**}; ideaaliprojektoriks on siin loomulik projektor $P = j_{X^*} \circ (j_X)^*$.

$$
\begin{tikzcd}
X^{***} \arrow[rr, "P=j_{X^*}\circ(j_X)^*"] \arrow[dr, "(j_X)^*"'] & & j_{X^*}(X^*) \subset X^{***} \\
& X^* \arrow[ur, "j_{X^*}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Lihtsa täiendava tingimusega saab kindlustada ideaaliprojektori leidumise ka juhul, kui (mingite ruumide E ja F korral)[8] $Y = \mathcal{L}(E, F)$ ja $X = \mathcal{K}(E, F)$; see on nii, kui näiteks leidub pere $K_\alpha \in \mathcal{K}(E, E)$, $\|K_\alpha\| \leq 1$, mille korral kaasoperaatorite pere K_α^* koondub vastavaks ühikoperaatoriks punktiviisi.

Tingimuse $\|P\| = 1$ asemel uuritakse (vt. nt. [GKS]) ka teisi erinevaid tingimusi projektorile P, mille tuum on vaadeldava alamruumi annullaator, näiteks tingimust kujul $\|I - \lambda P\| = 1$, kus λ on mingi arv: u-ideaale, $\|I - 2P\| = 1$ (sel juhul on muidugi ka $\|P\| = 1$), või h-ideaale, $\|I - (1 + \alpha)P\| = 1$, kus kompleksarvu α korral $|\alpha| = 1$.

$M(r, s)$-võrratuste lähtekoht

1994. aastal asusid hispaania matemaatikud Cabello ja Nieto uurima üht M-ideaalide üldistust − *$M(r, s)$-võrratust rahuldavaid ruume*. Need on niisugused $M(r, s)$-võrratust rahuldavad ideaalid X oma teises kaasruumis X^{**}, mille korral ideaaliprojektorina vaadeldakse vaid loomulikku projektorit $P = j_{X^*} \circ (j_X)^*$. Seejuures $r, s \in (0, 1]$ ning ruum on M-ideaal (oma teises kaasruumis) parajasti siis, kui ta rahuldab $M(1, 1)$-võrratust. Cabello ja Nieto tõestasid oma 1998. aastal ilmunud artiklis [1], et paljud M-ideaalide olulised omadused on iseloomulikud just $M(r, s)$-võrratust rahuldavatele ruumidele: mõned neist kehtivad, kui näiteks $r = 1$, teised jälle, kui $s = 1$ või $r + s > 1$. Näiteks viimasel juhul on sellist tingimust rahuldava ruumi X iga separaabli[9] alamruumi kaasruum separaabel (s.t. X on Asplundi ruum).

Cabello, Nieto ning Oja ühistööna (vt. nt. [2]) on muuhulgas antud mitmeid näiteid ruumidest, mis rahuldavad $M(r, s)$-võrratust, kuid ei ole M-ideaalid (oma teises kaasruumis).

---

[8] Sümboliga $\mathcal{K}(E, F)$ (erijuhul $E = F$ kirjutame $\mathcal{K}(E)$) tähistame kõigi kompaktsete operaatorite alamruumi ruumis $\mathcal{L}(E, F)$.

[9] Ruumi nimetatakse separaabliks, kui temas leidub loenduv kõikjal tihe osahulk.

$M(r,s)$-võrratuste transitiivsus ja Banachi ruumi kõrgemat järku kaasruumide geomeetriline struktuur

On hästi teada (vt. nt. [7]), et kui X ja Y on Banachi ruumi Z kinnised alamruumid, kusjuures X on M-ideaal ruumis Y ning Y on M-ideaal ruumis Z, siis X on M-ideaal ruumis Z. Artiklis [4] antakse selle tulemuse üldistus $M(r,s)$- võrratuste kontekstis. Meie põhitulemused on siin järgmised. (Vt. ka neid illustreerivaid jooniseid sõnastuse järel.)

Teoreem 1. *Olgu X ja Y Banachi ruumi Z kinnised alamruumid ning olgu $r,s,u,v \in (0,1]$. Eeldame, et X on $M(r,s)$-võrratust rahuldav ideaal ruumis Y ning Y on $M(u,v)$-võrratust rahuldav ideaal ruumis Z. Kui $su \leq v$, siis X on $M(\frac{rv}{s(1-u)+v}, \frac{sv}{s(1-u)+v})$-võrratust rahuldav ideaal ruumis Z. Kui $su \geq v$, siis X on $M(\frac{rv}{s}, v)$-võrratust rahuldav ideaal ruumis Z.*

Järeldus. *Kui X on $M(r,s)$-võrratust rahuldav ideaal ruumis Y ning Y on $M(r,s)$-võrratust rahuldav ideaal ruumis Z, siis X on $M(\frac{r}{2-r}, \frac{s}{2-r})$-võrratust rahuldav ideaal ruumis Z.*

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & & \\ & \overset{M(r,s)}{\cup} & & \overset{M(u,v)}{\supset} & \\ X & & \subset & & Z \end{array}$$

$su \leqslant v$: $M(\frac{rv}{s(1-u)+v}, \frac{sv}{s(1-u)+v})$

$su \geqslant v$: $M(\frac{rv}{s}, v)$

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & & \\ & \overset{M(r,s)}{\cup} & & \overset{M(r,s)}{\supset} & \\ X & & \subset & & Z \end{array}$$

$M(\frac{r}{2-r}, \frac{s}{2-r})$

Rao artiklis [R] on tõestatud, et kui X on M-ideaal oma teises kaasruumis X^{**}, siis X on M-ideaal kõigis oma paarisarvulist järku kaasruumides $X^{(2n)}$ ($n \in \mathbb{N}$). Teoreemi 1 rakendusena saame selle tulemuse üldistuse.

Teoreem 2. *Olgu $r,s \in (0,1]$. Kui Banachi ruum X on $M(r,s)$-võrratust rahuldav ideaal oma teises kaasruumis, siis X on $M(\frac{r}{r+n(1-r)}, \frac{s}{r+n(1-r)})$-võrratust rahuldav ideaal oma kaasruumis $X^{(2n)}$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral.*

Erilist tähelepanu väärib siin juht $r = 1$. Olgu X ruumi Y alamruum. Öeldakse, et alamruumil X on *SU-omadus* (*tugev ühesusomadus*) ruumis Y, kui X on ideaal ruumis Y ja iga $y^* \in Y^*$, $y^* \neq Py^*$, korral $\|Py^*\| < \|y^*\|$. Märgime, et alamruumil X on SU-omadus ruumis Y parajasti siis, kui X on ideaal ruumis Y ja igal funktsionaalil kaasruumist X^* leidub parajasti üks normi säilitav jätk ruumile Y.

Seega, kui Banachi ruum X on $M(1,s)$-võrratust rahuldav ideaal oma teises kaasruumis X^{**} mingi $s \in (0,1]$ korral, siis teoreemi 2 põhjal on (alam)ruumil X SU-omadus kõigis oma paarisarvulist järku kaasruumides.

Rao tulemuse (seega ka meie üldisema tulemuse) teeb eriliseks veel asjaolu, et ühelgi kaasruumil ei ole SU- omadust oma teises kaasruumis: kui näiteks X on $M(1,s)$-võrratust rahuldav ideaal ruumis X^{**}, siis ei ole kaasruumil X^{**} seda omadust oma teises kaasruumis $X^{(4)}$ (kuigi saadud tulemus ütleb, et X on $M(1,s)$-võrratust rahuldav ideaal ruumis $X^{(4)}$).

$M(r,s)$-võrratust rahuldavate ruumide sisemine iseloomustus

Artiklis [8] (vt. ka [7]) on antud selliste Banachi ruumide sisemine geomeetriline iseloomustus, mis on M-ideaalid oma teises kaasruumis. Artikli [8] ideed arendades on saadud analoogiline tulemus $M(r,s)$-võrratust rahuldavate Banachi ruumide jaoks (vt. [5]).

Teoreem 3. *Olgu X Banachi ruum ja olgu $r \leq 1$ ja $s > 0$. Järgmised tingimused on samaväärsed.*

(a) Ruum X rahuldab $M(r,s)$-võrratust.

(b) Mis tahes elementide $x \in S_X$ ja $x^{**} \in S_{X^{**}}$ korral leidub pere $x_\alpha \in B_X$ nii, et $x_\alpha \xrightarrow{w^*} x^{**}$ ja

$$\limsup_\alpha \|rx + s(x^{**} - x_\alpha)\| \leq 1.$$

(c) *Mis tahes arvu $\epsilon > 0$, elemendi $x \in S_X$ ning jada $x_n \in S_X$ korral leiduvad*[10] $n_0 \in \mathbb{N}$, $u \in \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_{n_0}\}$ *ja* $t \in \operatorname{conv}\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}$ *nii, et*

$$\|rx + s(t-u)\| \leq 1 + \epsilon.$$

Kuna teoreemi 3 tingimus (c) on väljendatud vaid ruumi X ühiksfääris paiknevate jadade kaudu, siis $M(r,s)$-võrratus on separaablilt määratud.

Järeldus. *Banachi ruum X rahuldab $M(r,s)$-võrratust parajasti siis, kui ruumi X iga separaabel kinnine alamruum rahuldab $M(r,s)$-võrratust.*

Rõhutame, et teoreem 3 kehtib ka triviaalsel juhul $s > 1$, mis tähendab, et $X^\perp = \{0\}$ ehk ruum X on refleksiivne. Teoreemi 3 tingimus (c) sarnaneb väga James'i kuulsa refleksiivsuskriteeriumiga: *Banachi ruum X on refleksiivne parajasti siis, kui leidub $\theta \in (0,1)$ nii, et iga jada $x_n \in S_X$ korral leiduvad $n_0 \in \mathbb{N}$, $u \in \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_{n_0}\}$ ja $t \in \operatorname{conv}\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}$ nii, et*

$$\|v - u\| < \theta.$$

Sellele sarnasusele viidatakse ka artiklis [5] ning ühtlasi näidatakse, kuidas teoreemist 3 järeldub James'i tulemus. Saadud uus tõestus erineb oluliselt James'i originaaltõestusest ning on sellest ka lihtsam. Kõrvaldades n-ö tööriistade jäljed, andis (vt. [9]) Oja (nüüd juba $M(r,s)$-võrratuse mõistet kasutamata) James'i refleksiivsuskriteeriumi veelgi lühema ja lihtsama tõestuse (mida peetakse kõigist senistest tõestustest lihtsaimaks).

Teoreemiga 3 analoogiline tulemus $M(r,s)$-võrratust rahuldavate ideaalide jaoks on järgmine (vt. [5]).

---

[10] Osahulga $A \subset X$ kumer kate $\operatorname{conv} A = \{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k : x_k \in A,\ \lambda_k > 0,\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Lause 4. *Olgu X ideaal Banachi ruumis Y ja olgu P vastav ideaaliprojektor. Antud arvude $r, s \in (0,1]$ korral on järgmised väited samaväärsed.*

(a) $\|y^*\| \geq r\|Py^*\| + s\|y^* - Py^*\| \quad \forall y^* \in Y^*$.

(b) Mis tahes $x \in S_X$ ja $y \in S_Y$ korral leidub pere $x_\alpha \in B_X$ nii, et $x_\alpha \xrightarrow{\sigma(Y,X^*)} y$ ja

$$\limsup_\alpha \|rx + s(y - x_\alpha)\| \leq 1.$$

Märgime, et artiklis [2] on ruumi Y ja tema alamruumi X kaasruume kasutamata antud (vaid) tarvilik tingimus selleks, et alamruum X oleks $M(r,s)$-võrratust rahuldav ideaal ruumis Y.

Kompaktsed operaatorid. Ruumi $\mathcal{L}(X,Y)$ kaasruumi struktuuri mõju

Operaatorit nimetatakse kompaktseks, kui ta teisendab iga tõkestatud hulga kompaktsesse hulka.

Üks peamistest põhjustest, miks siin ollakse huvitatud kompaktsetest operaatoritest on see, et kui $\mathcal{K}(X,Y)$ osutub M-ideaaliks ruumis $\mathcal{L}(X,Y)$, siis igal operaatoril $L \in \mathcal{L}(X,Y)$ leidub parim kompaktne lähend $K \in \mathcal{K}(X,Y)$, s.t.

$$\|L - K\| = d(L, \mathcal{L}(X,Y)) := \inf\{\|L - K\| \colon K \in \mathcal{K}(X,Y)\}.$$

On hästi teada, et $\mathcal{K}(H)$ on M-ideaal ruumis $\mathcal{L}(H)$ iga Hilberti ruumi H korral ning muuhulgas on huvitav teada, mil määral võime eemalduda ruumidega X ja Y Hilberti ruumist H, et sarnane omadus jääks siiski kehtima. Märgime, et käsitletavas valdkonnas on kompaktsete operaatorite M-ideaalide kirjeldamine klassikaline ülesanne.

Artiklis [6] on uuritud pidevate lineaarsete operaatorite ruumide $\mathcal{L}(X)$ ja $\mathcal{L}(\ell_1, X)$ kaasruumide struktuuri mõju Banachi ruumi X positsioonile tema teises kaasruumis. Uuringute lähtekohaks on kaks hästituntud päranduvusteoreemi: X on M-ideaal oma teises kaasruumis, kui kompaktsete operaatorite alamruum $\mathcal{K}(X)$ on M-ideaal pidevate lineaarsete operaatorite ruumis $\mathcal{L}(X)$ (see on norra matemaatiku Lima tulemus aastast 1982, vt. nt. [7]) ja X on M-ideaal oma teises kaasruumis, kui $\mathcal{K}(\ell_1, X)$ on M-ideaal ruumis $\mathcal{L}(\ell_1, X)$ (vt. [8]). Nimetatud kahe teoreemi tõestusmeetodid on kvalitatiivselt erinevad. Märgime, et esimesena nimetatud Lima päranduvusteoreem on üldistatud $M(r,s)$-võrratust rahuldavate ruumide jaoks juhule, kus $r + s/2 > 1$ (vt. [2]). Vaadeldavas valdkonnas ei näi M-ideaalide teooria meetodid töötavat ning artikli [2] autorid on oma tulemuse tõestamiseks töötanud välja metoodika, mis põhineb kaasruumi teatud w^*-tugevalt eksponeeritud punktide poolt defineeritud funktsionaalide ühesel jätkamisel. Artiklis [6] on välja arendatud mõlemale eespool nimetatud päranduvusteoreemile sobiv ühtne tõestusmeetod, kusjuures seda on tehtud märksa üldisemas $M(r,s)$-võrratust rahuldavate ideaalide kontekstis. On ka iseloomustatud niisuguseid ruumide X ja Y paare, mille puhul $\mathcal{K}(X,Y)$ moodustab ruumis $\mathcal{L}(X,Y)$ etteantud parameetrite r ja s suhtes $M(r,s)$-võrratust rahuldava ideaali. Seejuures on tehtud mitte üksnes kvalitatiivne, vaid ka kvantitatiivne uuring. Saadud tulemused üldistavad ja avavad kvantitatiivsest aspektist Cabello, Lima, Oja, Nieto, Põldvere, Rao ja Werneri M-ideaalide kohta käivaid varasemaid tulemusi. Meie põhitulemus siin on järgmine.

Teoreem 5. *Olgu X, Y ja Z Banachi ruumid, kusjuures olgu X isomorfne ruumi Z mingi faktorruumiga ja ruumi Y mingi alamruumiga. Kui $\mathcal{K}(Z,Y)$ on $M(r,s)$-võrratust rahuldav ideaal ruumis $\mathcal{L}(Z,Y)$ mingite arvude $r, s \in (0,1]$ korral, siis (täiendaval tingimusel, millega nõutakse teatud eriliste funktsionaalide normi säilitava jätku ühesust) X rahuldab $M(\frac{r}{j(X,Y)}, \frac{s}{j(X,Y)\, q(Z,X)})$-võrratust.*

Seejuures on (need parameetrid tuuakse sisse artiklis [6])

$$j(X,Y) = \inf\{\frac{\|T\|}{j(T)} \colon\ T \in \mathcal{L}(X,Y) \text{ on isomorfism “sisse”}\}$$

ja

$$q(Z,X) = \inf\{\frac{\|Q\|}{q(Q)} : \ Q \in \mathcal{L}(Z,X) \text{ on sürjektsioon}\},$$

kus sümbolitega $j(T)$ ja $q(Q)$ on tähistatud vastavalt T injektsioonimoodul ja Q sürjektsioonimoodul.

Kui ruumid X, Y ja Z on isomorfsed, siis teoreemist 5 järeldub, et ruum X rahuldab $M(\frac{r}{d(X,Y)}, \frac{s}{d(X,Y)\,d(X,Z)})$-võrratust, kus $d(\cdot,\cdot)$ tähistab Banach-Mazuri kaugust.

Kirjandus

1. J. C. Cabello, E. Nieto, *On properties of M-ideals*, Rocky Mountain J. Math. **28** (1998), 61–93.
2. J. C. Cabello, E. Nieto, and E. Oja, *On ideals of compact operators satisfying the $M(r,s)$-inequality*, J. Math. Anal. Appl. **220** (1998), 334–348.
3. G. Godefroy, N. J. Kalton, and P. D. Saphar, *Unconditional ideals in Banach spaces*, Studia Math. **104** (1993), 13–59.
4. R. Haller, *On transitivity of $M(r,s)$-inequalities and geometry of higher duals of Banach spaces*, Acta Comment. Univ. Tartuensis Math. **6** (2002), 9–16.
5. R. Haller, E. Oja, *Geometric characterizations of positions of Banach spaces in their biduals*, Arch. Math. **69** (1997), 227–233.
6. R. Haller, E. Oja, and E. Plewnia, *Quantitative versions of hereditary results on M-ideals of compact operators.* Math. Nachr. **246-247** (2002), 106–120.
7. P. Harmand, D. Werner, and W. Werner, *M-ideals in Banach spaces and Banach algebras*, Lecture Notes in Math., vol. 1547, Springer, Berlin, 1993.
8. Å. Lima, E. Oja, T. S. S. R. K. Rao, and D. Werner *Geometry of operator spaces*, Michigan Math. J. **41** (1994), 473–490.
9. E. Oja, *A short proof of a characterization of reflexivity of James*, Proc. Am. Math. Soc. **126** (1998), 2507–2508.
10. T. S. S. R. K. Rao, *On the geometry of higher duals of a Banach space*, Illinois J. Math. **45** (2001), 1389–1392.