

Mis on nurk?

INDREK ZOLK
Tartu Ülikool

1. Sissejuhatus

Igaüks on matemaatikat õppides pidanud mõtlema küsimusele: mis on nurk? Ja kui tüüpvastusest „nurk on geomeetriline kujund, mis koosneb ühise otspunktiga kahest kiirest“ väheks jääb, tekib vajadus sellise definitsiooni järele, mis võimaldab kergesti nurki omavahel võrrelda, mõõta (mis on nurga *suurus?*), rakendada trigonomeetriat.

Trigonomeetrilised funktsioonid. Mis nad õieti on? Koolis õpitakse, et „teravnurga siinus on vastaskaateti pikkus jagatud hüpotenuusi pikkusega“. (Analoogselt siis koosinuse kohta.) Sellise definitsiooni korral tekivad küsimused, mis juhtub täisnurkse kolmnurga pööramisel ja skaleerimisel, kuidas ära tunda, et üks (sama teravnurgaga) kolmnurk on teisest saadud nurki säilitavate manipulatsioonide teel, ja milline oleks üleüldse nurga siinus, kui ta pole teravnurk. Täisnurkseid kolmnurki kasutades oleks vist võimatu neid küsimusi lahendada korraga elegantselt ja vettpidavalt (*rigorously*).

Matemaatiline analüüs pakub ühe lihtsa pääsetee. Defineerime

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots, \quad \cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Aga siin pole justkui ühtki nurka ega tema haarasid (ka mitte ilmutamata kujul), ainult rea osasummad ja piirväärtus. Ei ilmne, kuidas võiks nurki liita geomeetriliselt. Nii ka ei ole hea.

Võiks vaadata ühikringi, arvutada nurgale vastava sektori kaarepikkusi, pindalasid. . . See tähendab mingis mahus mõõduteooria (kaare pikkus, pinnatüki pindala) väljaarendamist, mis on jällegi kohmakas. Või siis diferentsiaalvõrrandid, mis oleks küll vettpidav meetod siinuse ja koosinuse defineerimiseks reaalteljel, aga see jätaks ikkagi geomeetria tahaplaanile. (Kui ma tahan midagi arvata

kahe kiire või vektori „vahel“ toimuva kohta, miks ma peaks vajama tuletist?)

Käesolevas artiklis pakutakse välja alternatiivsed nurga ja tema trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonid, mis ühelt poolt on matemaatiliselt vettapidavad ega kasuta piltlikke arutelusid, aga teiselt poolt ei nõua ei mõõduteooriat, astmeridu ega isegi mitte tuletisi. Nurga definitsioonist ilmneb, millised on nurka moodustavad vektorid (nurga haarad). Originaalartikkel on [1], siin esitame põhiliselt ideed ega tee kõiki detaile ega tõestusi läbi.

2. Nurga mõiste. Nurga siinus ja koosinus

Selles alapeatükis defineerime nurgad kui nullist erinevate vektorite paaride teatavad ekvivalentsiklassid.

Definitsioon 1. Tähistame $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ning vaatame hulgal $X \times X$ järgmist seost (olgu tähistatud $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$):

$$(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \approx (\mathbf{y}, \mathbf{v}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{x_1 u_1 + x_2 u_2}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{u}\|} = \frac{y_1 v_1 + y_2 v_2}{\|\mathbf{y}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}, \\ \frac{x_1 u_2 - x_2 u_1}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{u}\|} = \frac{y_1 v_2 - y_2 v_1}{\|\mathbf{y}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}. \end{cases}$$

Lause 1. *Seos $\approx$ on ekvivalentsusseos.*

Definitsioon 2. Kahe vektori $\mathbf{x}, \mathbf{u} \in X$ vaheliseks *nurgaks* nime-tame ekvivalentsiklassi $\llbracket \mathbf{x}, \mathbf{u} \rrbracket := \llbracket (\mathbf{x}, \mathbf{u}) \rrbracket$. Nurdade hulga tähistame sümboliga $A = X \times X / \approx$.

Definitsioon 3. Nurga $\llbracket \mathbf{x}, \mathbf{u} \rrbracket \in A$ *siinus* ja *koosinus* olgu defineeritud vastavalt

$$\text{Sin} \llbracket \mathbf{x}, \mathbf{u} \rrbracket := \frac{x_1 u_2 - x_2 u_1}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{u}\|}, \quad \text{Cos} \llbracket \mathbf{x}, \mathbf{u} \rrbracket := \frac{x_1 u_1 + x_2 u_2}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{u}\|}.$$

Definitsioon 3 on koostatud nii, et koosinus klapiks skalaarkorrutamise-ga: juhul, kui skalaarkorrutamine on $\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = x_1 u_1 + x_2 u_2$, saame kirjutada, et

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{u}\| \cdot \text{Cos} \llbracket \mathbf{x}, \mathbf{u} \rrbracket.$$

Siinus on valitud nii, et ta oleks täiendusnurga koosinus: kui $\tilde{\mathbf{u}} = (u_2, -u_1)$, siis $\text{Sin}[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = \text{Cos}[\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{u}}]$.

Sellised siinuse ja koosinuse definitsioonid on korrektsed, sest nende väärtused ei sõltu ekvivalentsiklassi esindaja valikust (seda garanteerib seose $\approx$ definitsioon).

Märgime, et eukleidilistes ruumides on nurkade sissetoomine niimoodi alati käinudki: vektorite $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{u}$ vahelise nurga koosinus defineeritakse kui $\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{u}\|}$. Nurga suuruse leidmiseks võtame siis arkuskoosinuse. Ent selline definitsioon on poolik, kuna nii võime saada ainult nurki intervallist $[0, \pi]$. Siinuse lisamine on tingimata vajalik, et katta kogu täispööre.

Lause 2 (Cauchy–Schwarzi võrratus). *Mistahes kahe vektori $\mathbf{x}, \mathbf{u} \in X$ korral kehtib võrratus*

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{u}\|} \leq 1.$$

Cauchy–Schwarzi võrratuse tõttu on definitsioonis 3 toodud siinuse ja koosinuse väärtused lõigul $[-1, 1]$.

Vahetu kontroll näitab, et nurk on invariantne tema haarade skaleerimise ning pöörete suhtes:

- kui $k, l > 0$, siis $[\mathbf{k}\mathbf{x}, \mathbf{l}\mathbf{u}] = [\mathbf{x}, \mathbf{u}]$;
- kui a, b on sellised reaalarvud, et $a^2 + b^2 = 1$, ning

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

(nn pöördemaatriks), siis $(\mathbf{y}, \mathbf{v}) \approx (\mathbf{x}, \mathbf{u})$, $\|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\|$, $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|$;

- esimeseks vektoriks võib valida millise tahes nullist erineva (ühik)vektori. Näitame seda vektori $(1, 0)$ jaoks, muude vektorite korral on arutelu analoogne. Mistahes $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in X \times X$, $x_1^2 + x_2^2 = 1$, korral leiame pöördemaatriksi: ühese lahendi (a, b) võrrandisüsteemile

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Edaspidi eeldame, et kõigi ekvivalentsiklasside esindajad on ühikvektorite paarid.

Lause 3. *Saame, et*

$$\text{Sin}[(1, 0), (u_1, u_2)] = u_2, \quad \text{Cos}[(1, 0), (u_1, u_2)] = u_1.$$

3. Nurkade liitmine. Konkreetsete nurkade trigonomeetriliste funktsioonide väärtused

Defineerime nurkade summa järgnevalt: pöörame nurki nii, et esimese nurga teine haar ühtiks teise nurga esimese haaraga. (Kuna eeldame, et kõik haarad on ühikvektorid, siis on selline ühitamine võimalik.)

Definitsioon 4. Olgu $[\mathbf{x}, \mathbf{u}], [\mathbf{u}, \mathbf{v}] \in A$. Defineerime nurkade $[\mathbf{x}, \mathbf{u}]$ ja $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ summa kui

$$[\mathbf{x}, \mathbf{u}] + [\mathbf{u}, \mathbf{v}] = [\mathbf{x}, \mathbf{v}].$$

On võimalik anda suvaliste esindajatega nurkade (ekvivalentsiklasside) summa valem, ent see on üsna kohmakas; tõestuse idee on pöörata teine nurk nii, et haarad klapiks. Märgime ära järgmised omadused:

- $[\mathbf{x}, \mathbf{u}] + [\mathbf{u}, \mathbf{x}] = [(1, 0), (1, 0)],$
- $[(1, 0), \mathbf{u}] + [(1, 0), \mathbf{v}] = [(1, 0), (-u_2v_2 + u_1v_1, u_1v_2 + u_2v_1)],$
- $[(1, 0), \mathbf{u}] + [(1, 0), (1, 0)] = [(1, 0), \mathbf{u}],$
- $[(1, 0), \mathbf{u}] + [(1, 0), (u_1, -u_2)] = [(1, 0), (1, 0)].$

Nüüd on piisavalt motivatsiooni tuua sisse järgmised tähistused:

- $0 = [(1, 0), (1, 0)],$
- mistahes nurga $\alpha = [(1, 0), (u_1, u_2)]$ korral tähistame $-\alpha = [(1, 0), (u_1, -u_2)],$

- mistahes nurkade $\alpha, \beta \in A$ korral tähistame $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

Teoreem 1. $(A, +)$ on Abeli rühm.

Järgnevalt uurime nurkade kordseid, summasid ja poolnurga valemid.

Mistahes täisarvu n ja nurga $\alpha \in A$ korral tähistame

$$n\alpha = \begin{cases} \underbrace{\alpha + \dots + \alpha}_{n \text{ liidetavat}}, & \text{kui } n > 0, \\ 0, & \text{kui } n = 0, \\ (-n)\alpha, & \text{kui } n < 0. \end{cases}$$

Lause 4. Mistahes kahe nurga $\alpha, \beta \in A$ korral kehtivad võrdused:

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha, \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha, \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha, \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta, \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha, \\ \cos 2\alpha &= (\cos \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2. \end{aligned}$$

Tõestame ühe väidetest, teiste tõestus on analoogne.

Võrduse $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ tõestus.

Olgu $\alpha = \llbracket(1, 0), \mathbf{u}\rrbracket$ ja $\beta = \llbracket(1, 0), \mathbf{v}\rrbracket$. Nüüd $-\beta = \llbracket(1, 0), (v_1, -v_2)\rrbracket$. Niisiis

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta) = \llbracket(1, 0), (u_2v_2 + u_1v_1, -u_1v_2 + u_2v_1)\rrbracket.$$

Lause 3 annab, et

$$\cos(\alpha - \beta) = u_2v_2 + u_1v_1 = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta. \quad \square$$

Nurka $\curvearrowright = \llbracket(1, 0), (0, 1)\rrbracket$ nimetame *täisnurgaks* ning nurka $\curvearrowleft = \llbracket(1, 0), (-1, 0)\rrbracket$ nimetame *sirgnurgaks*. Saame, et $\cos \curvearrowright = 0$, $\sin \curvearrowright = 1$ ning $\cos \curvearrowleft = -1$, $\sin \curvearrowleft = 0$.

Lause 5. *Mistahes nurga $\alpha \in A$ korral kõik nurgad $\beta \in A$, mis rahuldavad tingimust $2\beta = \alpha$, on kujul*

$$\left[(1, 0), \pm \left(\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, (\operatorname{sgn} \sin \alpha) \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \right) \right],$$

ehk

$$\left[(1, 0), \left(\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, (\operatorname{sgn} \sin \alpha) \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \right) \right] + k \cdot \curvearrowright, \quad k \in \{0, 1\},$$

$$\text{kus } \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \geq 0, \\ -1, & \text{kui } x < 0. \end{cases}$$

Tõestus. Selleks, et leida kõik nurgad β , mille korral $\beta + \beta = \alpha$, tähistame $\beta = [(1, 0), \mathbf{u}]$, leiame $2\beta = [(1, 0), (u_1^2 - u_2^2, 2u_1u_2)]$ ning lahendame võrrandisüsteemi

$$(u_1^2 - u_2^2, 2u_1u_2) = (\cos \alpha, \sin \alpha), \quad u_1^2 + u_2^2 = 1. \quad \square$$

Tähistame

$$A_0 = \{\alpha \in A : \sin \alpha \in [0, 1], \cos \alpha \in [0, 1]\}.$$

Järgnev lause näitab, et siinuse ja koosinuse väärtused on üheselt määratud nende käitumisega nn esimeses kvadrantis A_0 .

Lause 6. *Mistahes nurga $\alpha \in A$ korral kehtivad võrdused*

$$\begin{aligned} \sin(\curvearrowleft - \alpha) &= \cos \alpha, & \sin(2 \cdot \curvearrowleft + \alpha) &= -\sin \alpha, \\ \cos(\curvearrowleft - \alpha) &= \sin \alpha, & \cos(2 \cdot \curvearrowleft + \alpha) &= -\cos \alpha, \\ \sin(2 \cdot \curvearrowleft - \alpha) &= \sin \alpha, & \sin(4 \cdot \curvearrowleft - \alpha) &= -\sin \alpha, \\ \cos(2 \cdot \curvearrowleft - \alpha) &= -\cos \alpha, & & \end{aligned}$$

$$\cos(4 \cdot \curvearrowleft - \alpha) = \cos \alpha,$$

$$\sin(4 \cdot \curvearrowleft + \alpha) = \sin \alpha,$$

$$\cos(4 \cdot \curvearrowleft + \alpha) = \cos \alpha.$$

Peatüki lõpetuseks leiame mõned siinuse ja koosinuse konkreetset väärtused ning toome sisse seose arvuga π .

Paneme tähele, et lause 3 kohaselt, kui $\alpha = \llbracket (1, 0), \mathbf{u} \rrbracket$ on selline nurk, et $u_1, u_2 \in (0, 1)$, siis $\text{Sin } \alpha = u_2 > 0$ ja $\text{Cos } \alpha = u_1 > 0$. Seega defineerime esimese kvadrandi nurga poolnurga nii, et see asuks samuti esimeses kvadrandis.

Definitsioon 5. Mistahes nurga $\alpha \in A_0$ korral tähistame

$$\frac{\alpha}{2} = \left\llbracket (1, 0), \left(\sqrt{\frac{1 + \text{Cos } \alpha}{2}}, \sqrt{\frac{1 - \text{Cos } \alpha}{2}} \right) \right\rrbracket.$$

$$\text{Muuseas siis } \frac{\curvearrowright}{2} = \left\llbracket (1, 0), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\rrbracket.$$

Järgmine lause on vahetu järeldus omadustest, mis esinevad lauses 4.

Lause 7. Mistahes nurkade $\alpha, \beta \in A_0$ korral, kus $\frac{\alpha \pm \beta}{2} \in A_0$, kehtivad valemid:

$$\begin{aligned} \text{Sin } \alpha \pm \text{Sin } \beta &= 2 \text{Sin } \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \text{Cos } \frac{\alpha \mp \beta}{2}, \\ \text{Cos } \alpha + \text{Cos } \beta &= 2 \text{Cos } \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \text{Cos } \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \text{Cos } \alpha - \text{Cos } \beta &= -2 \text{Sin } \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \text{Sin } \frac{\alpha - \beta}{2}. \end{aligned}$$

Nüüd saame arvutada siinuse ja koosinuse väärtused kõigi nurkade jaoks, mis on täisnurga $\curvearrowright$ diaadilised kordsed, ehk kõigi nurkade jaoks hulgast $D \cdot \curvearrowright$, kus

$$D = \left\{ \frac{m}{2^k} : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m \in \mathbb{Z} \cap [0, 2^k] \right\}.$$

Sammud selle teostamiseks on järgmised: poolitada täisnurka k korda ning seejärel liita m eksemplari kokku.

On tuntud fakt, et $\overline{D} = [0, 1]$, see tähendab, hulk D on kõikjal tihe lõigus $[0, 1]$.

Täpsed valemid täisnurga 2^{-k} -nurga trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste jaoks on järgmised.

Lause 8. *Mistahes $k \in \mathbb{N}$ korral kehtivad valemid*

$$\begin{aligned}\operatorname{Sin}\left(\frac{1}{2^k} \cdot \curvearrowright\right) &= \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}_{k \text{ juuremärki}}, \\ \operatorname{Cos}\left(\frac{1}{2^k} \cdot \curvearrowright\right) &= \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}_{k \text{ juuremärki}}.\end{aligned}$$

Lisaks sellele,

1) *jadad $\left(\operatorname{Sin}\left(\frac{1}{2^k} \cdot \curvearrowright\right)\right)_k$ ja $\left(\frac{\operatorname{Sin}\left(\frac{1}{2^k} \cdot \curvearrowright\right)}{\operatorname{Cos}\left(\frac{1}{2^k} \cdot \curvearrowright\right)}\right)_k$ on kahanevad ning koonduvad arvuks 0;*

2) *jada $\left(2^k \operatorname{Sin}\left(\frac{1}{2^k} \cdot \curvearrowright\right)\right)_k$ on kasvav, jada $\left(2^k \cdot \frac{\operatorname{Sin}\left(\frac{1}{2^k} \cdot \curvearrowright\right)}{\operatorname{Cos}\left(\frac{1}{2^k} \cdot \curvearrowright\right)}\right)_k$ on kahanev ning need kaks jada koonduvad samaks piirväärtuseks $\Pi > 0$.*

Valemid saab tõestada induktsiooniga. See lause on sisuliselt on üliõpilaste matemaatikavõistluse IMC 2001 teise päeva ülesanne 2 [4]. Tõestuse käigus selgub ka, et $\Pi > 2a_1 = 2\sqrt{2}$ ja $\Pi < 2b_1 = 4$.

Märkus. Viète'i valem

$$\frac{2}{\pi} = \lim_k \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2} \cdot \dots \cdot \frac{\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}_{k \text{ juuremärki}}}{2}$$

pärineb juba aastast 1593 [3]. Ent lause 8 kohaselt

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \dots \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}}{2}}_{k \text{ juurem\u00e4rki}} \\ &= \text{Cos}\left(\frac{1}{2} \cdot \hookleftarrow\right) \cdot \text{Cos}\left(\frac{1}{2^2} \cdot \hookleftarrow\right) \cdot \dots \cdot \text{Cos}\left(\frac{1}{2^k} \cdot \hookleftarrow\right) \\ &= \text{Cos}\left(\frac{1}{2} \cdot \hookleftarrow\right) \cdot \text{Cos}\left(\frac{1}{2^2} \cdot \hookleftarrow\right) \cdot \dots \cdot \text{Cos}\left(\frac{1}{2^k} \cdot \hookleftarrow\right) \cdot \frac{2^k \text{Sin}\left(\frac{1}{2^k} \cdot \hookleftarrow\right)}{2^k \text{Sin}\left(\frac{1}{2^k} \cdot \hookleftarrow\right)} \\ &= \frac{\text{Sin}(\hookleftarrow)}{2^k \text{Sin}\left(\frac{1}{2^k} \cdot \hookleftarrow\right)} = \frac{1}{2^k \text{Sin}\left(\frac{1}{2^k} \cdot \hookleftarrow\right)} \rightarrow \frac{2}{\Pi}. \end{aligned}$$

Märkuse tõttu tähistame edaspidi $\pi = \Pi$.

Peatükis toodud ideid saab kasutada ka muude nurkade leidmiseks. Näiteks, arutledes analoogselt lausega 5, võib leida kõik nurgad α nii, et $\alpha + \alpha + \alpha = \sphericalangle$. Osutub, et ainus selline nurk hulgast A_0 on $\llbracket (1, 0), (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) \rrbracket$.

4. Siinus ja koosinus reaalteljel

Selle alapeatüki eesmärk on leida (funktsioonide Sin, Cos baasil) funktsioonid $s, c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mis rahuldavad järgmise teoreemi eeldusi.

Teoreem 2 (artikli [2] põhitulemus). *Mistahes mittekonstantsete pidevate funktsioonide $s, c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ korral, mis rahuldavad kaht tingimust*

$$1) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad c(x - y) = c(x)c(y) + s(x)s(y),$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{s(x)}{x} = 1,$$

$$kehtib$$

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

see tähendab, s ja c ühtivad vastavalt „tavapärase“ siinuse ja koosinusega.

Reaalarvu a ja positiivse reaalarvu b korral märgime tähisega $a \bmod b$ vähimat mittenegatiivset arvu c nii, et $b \mid a - c$ ehk mille korral leidub täisarv x nii, et $bx = a - c$. (Selline arv c alati leidub, sest hulk $\{x \in \mathbb{Z} : a - bx \geq 0\}$ on mittetühi: nimelt $a - b \cdot \left\lfloor -\frac{a}{b} \right\rfloor \geq 0$.)

Vaatame rühma $(\mathbb{R}, +)$ tavalise liitmise suhtes.

Lause 9. Iga rühmade homomorfism $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow A$ (s.t. funktsioon, mis säilitab rühma tehte), mille korral $\varphi(\frac{\pi}{2}) = \epsilon$, on täielikult määratud ahendiga $\varphi|_{[0, \frac{\pi}{2}]}$. Sama kehtib ka vastavate kompositsioonide $\text{Sin} \circ \varphi, \text{Cos} \circ \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kohta.

Tõestus. Vahetu kontroll:

$$\begin{aligned}\varphi(\pi) &= \varphi\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) + \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \epsilon + \epsilon = \epsilon, \\ \varphi(2\pi) &= 2\varphi(\pi) = \epsilon + \epsilon = 0,\end{aligned}$$

seega mistahes arvu $x \in \mathbb{R}$ korral kõigepealt

$$\varphi(x) = \varphi(x \bmod 2\pi),$$

ning edasi, eeldades, et $x \in [0, 2\pi)$, saame, et

$$\varphi(x) = \varphi\left(x \bmod \frac{\pi}{2} + \left\lfloor \frac{x}{\frac{\pi}{2}} \right\rfloor \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \varphi\left(x \bmod \frac{\pi}{2}\right) + \left\lfloor \frac{x}{\frac{\pi}{2}} \right\rfloor \cdot \epsilon,$$

kus $\left\lfloor \frac{x}{\frac{\pi}{2}} \right\rfloor = 1, 2, 3$ vastavalt kui $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$, $x \in [\pi, \frac{3\pi}{2})$, või $x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$.

Täpsed taandamisvalemid $\text{Sin} \varphi(x)$ jaoks $\text{Cos} \varphi(x)$ (kui argument on $x \in (\frac{\pi}{2}, 2\pi)$) saab töötada välja lause 6 baasil. $\square$

Järgnevalt on meie ülesanne näidata, et vähemalt üks selline rühmade homomorfism φ leidub ning et funktsioonid $\text{Sin} \circ \varphi$ ja $\text{Cos} \circ \varphi$ rahuldavad teoreemi 2 tingimusi. Kõigepealt veel mõned tingimused, mida selline φ peab kindlasti rahuldama.

Lause 10. Olgu $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow A$ selline rühmade homomorfism, et $\varphi(\frac{\pi}{2}) = \lrcorner$. Arvu $\frac{\pi}{2}$ iga diaadilise kordse $\frac{m}{2^k} \cdot \frac{\pi}{2} \in D \cdot \frac{\pi}{2}$ jaoks kehtib

$$\varphi\left(\frac{m}{2^k} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{m}{2^k} \cdot \lrcorner.$$

Teoreem 3. Olgu $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow A$ selline rühmade homomorfism, et $\varphi(\frac{\pi}{2}) = \lrcorner$. Mistahes arvu $x \in (D \cdot \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$ korral kehtib

$$0 < x(\text{Cos } \varphi(x)) < \text{Sin } \varphi(x) < x.$$

Kahe viimase tulemuse tõestus on induktsioon nimetaja astendaja k järgi, teoreemis hiljem ka lugeja m järgi. Järgnev lause näitab aga, et siinus ja koosinus on monotoonsed ja pidevad täisnurga diaadiliste kordsete hulgal, luues eelduse nende pidevaks jätkamiseks täisnurga kõigile (murdarvuliste) kordsetele.

Lause 11. Olgu $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow A$ selline rühmade homomorfism, et $\varphi(\frac{\pi}{2}) = \lrcorner$. Mistahes arvude $x, y \in D \cdot \frac{\pi}{2}$ jaoks kehtivad võrratused:

$$x < y \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{Cos } \varphi(x) > \text{Cos } \varphi(y), \\ \text{Sin } \varphi(x) < \text{Sin } \varphi(y), \end{cases}$$

ning

$$|\text{Cos } \varphi(x) - \text{Cos } \varphi(y)| \leq |x - y|, \quad |\text{Sin } \varphi(x) - \text{Sin } \varphi(y)| \leq |x - y|.$$

Tõestus. Paneme tähele, et kui $t, t' \in D$ (eeldame, et $t > t'$), siis

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t \cdot \frac{\pi}{2}) \pm \varphi(t' \cdot \frac{\pi}{2})}{2} &= \frac{t \cdot \lrcorner \pm t' \cdot \lrcorner}{2} = \frac{(t \pm t') \cdot \lrcorner}{2} \\ &= \frac{t \pm t'}{2} \cdot \lrcorner = \varphi\left(\frac{t \pm t'}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

kuna $\frac{t-t'}{2} \in D$.

Nüüd, kui $y > x$ (mistõttu ka $\frac{y \pm x}{2} \in D \cdot \frac{\pi}{2}$), saame lause 7 ja teoreemi 3 kohaselt, et

$$\text{Sin } \varphi(y) - \text{Sin } \varphi(x) = 2 \left(\text{Cos } \frac{\varphi(y) + \varphi(x)}{2} \right) \cdot \left(\text{Sin } \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{2} \right) > 0,$$

$$\text{Cos } \varphi(y) - \text{Cos } \varphi(x) = -2 \left(\text{Sin } \frac{\varphi(y) + \varphi(x)}{2} \right) \cdot \left(\text{Sin } \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{2} \right) < 0.$$

Järelikult

$$\begin{aligned} |\cos \varphi(x) - \cos \varphi(y)| &= 2 \left| \sin \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2} \right| \cdot \left| \sin \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{2} \right| \\ &\leq 2 \cdot \frac{|x - y|}{2} = |x - y|, \end{aligned}$$

siinuse jaoks on tõestus analoogne. □

Vahetu järeldusena saame järgmise lause.

Lause 12. *Olgu $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow A$ selline rühmade homomorfism, et $\varphi(\frac{\pi}{2}) = \epsilon$. Olgu (x_n) ja (x'_n) jadad, mille elemendid kuuluvad hulka $D \cdot \frac{\pi}{2}$. Kehtigu $\lim_n (x_n - x'_n) = 0$. Siis*

$$\begin{aligned} \lim_n (\cos \varphi(x_n) - \cos \varphi(x'_n)) &= 0, \\ \lim_n (\sin \varphi(x_n) - \sin \varphi(x'_n)) &= 0. \end{aligned}$$

Teoreem 4. *Olgu $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow A$ selline rühmade homomorfism, et $\varphi(\frac{\pi}{2}) = \epsilon$. Siis funktsioonidel*

$$(D \cdot \frac{\pi}{2}) \ni x \mapsto \sin \varphi(x) \in [0, 1]$$

ja

$$(D \cdot \frac{\pi}{2}) \ni x \mapsto \cos \varphi(x) \in [0, 1]$$

leiduvad ühtlaselt pidevad jätkud lõigule $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Teoreemi tõestuse põhiline idee on märgata, et mistahes $t \in [0, 1]$ korral piirväärtused

$$\lim_n \cos \varphi(t_n \cdot \frac{\pi}{2}), \quad \lim_n \sin \varphi(t_n \cdot \frac{\pi}{2}), \quad t_n \in D, \quad t_n \rightarrow t. \quad (1)$$

leiduvad ning ei sõltu jada (t_n) valikust.

Definitsioon 6. Defineerime funktsiooni $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow A$ järgmisel viisil:

- mistahes arvu $t \in D$ jaoks defineerime $\varphi(t \cdot \frac{\pi}{2}) = t \cdot \epsilon$,

- mistahes arvu $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ defineerime

$$\varphi(x) = (\lim_n \text{Sin } \varphi(x_n), \lim_n \text{Cos } \varphi(x_n)),$$

kus (x_n) on mingi jada elementidega hulgast $D \cdot \frac{\pi}{2}$ ja piirväärtusega x ,

- mistahes arvu $x \in \mathbb{R}$, korral defineerime

$$\varphi(x) = \varphi(x \bmod (2\pi)),$$

ning kui $x \in [0, 2\pi)$, siis

$$\varphi(x) = \varphi(x \bmod \frac{\pi}{2}) + \left\lfloor \frac{x}{\frac{\pi}{2}} \right\rfloor \cdot \curvearrowright.$$

Tähistame

$$s(x) = \text{Sin } \varphi(x), \quad c(x) = \text{Cos } \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Lause 13. *Definitsioonis 6 esinev funktsioon φ on rühmade homomorfism.*

Lause 4 tõttu juba kehtibki järgmine teoreem.

Teoreem 5. *Mistahes arvude $x, y \in \mathbb{R}$ korral*

$$c(x - y) = c(x)c(y) + s(x)s(y).$$

Järgneva teoreemi saab tõestada vahetult teoreemi 3 baasil.

Teoreem 6. *Leiab aset koondumine*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{s(x)}{x} = 1.$$

Teoreemi 2 kohaselt on lõpule viidud funktsioonide s ja c ühitamine „tavalise“ siinuse ja koosinusega.

5. Arkusfunktsioonid

Toodud käsitlus annab võimaluse defineerida ka arkusfunktsioonid. Toome ära vastavad tulemused.

Lause 14. *Funktsioonid s ja c hulgast $[0, \frac{\pi}{2}]$ hulka $[0, 1]$ on bijektsioonid.*

Injektiivsuse tõestuseks näidatakse, et siinus ja koosinus on rangelt monotoonsed, sürjektiivsus järelneb Bolzano–Cauchy teoreemist (intervallis $[a, b]$ pidev funktsioon f saavutab kõik väärtused $f(a)$ ja $f(b)$ vahel).

Lause 15. *Funktsioonid $s: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ ja $c: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ on bijektsioonid.*

Selle tõestamiseks vaadeldakse eraldi vastavusi (siinuse puhul) $[-\frac{\pi}{2}, 0] \leftrightarrow [-1, 0]$ ja $[0, \frac{\pi}{2}] \leftrightarrow [0, 1]$.

Lause 15 võimaldabki defineerida siinuse ja koosinuse pöördfunktsioonid. Nende lähtehulk on $[-1, 1]$, nad on mõlemad pidevad ning rangelt monotoonsed.

On jäänud veel lahendamata küsimus, kas kõik nurgad (hulga A elemendid) on mingi reaalarvu kujutised homomorfismi φ korral. Selle lahendab järgmine lause.

Lause 16. *Rühmade homomorfismi $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow A$ ahend*

$$\varphi|_{[0, 2\pi)}: [0, 2\pi) \rightarrow A$$

on rühmade isomorfism.

Tõestus. Piisab näidata, et $\varphi|_{[0, \frac{\pi}{2}]}: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow A_0$ on bijektiivne. Kuna s ja c on selles intervallis bijektiivsed, siis on φ injektiivne. Nüüd mistahes nurga $\alpha = \llbracket (1, 0), (u, v) \rrbracket$ korral, kus $u^2 + v^2 = 1$ ja $u, v \in [0, 1]$, kehtivad $\sin x = u$ ja $\cos x = \sqrt{1 - (\sin x)^2} = \sqrt{1 - u^2} = v$, järelikult $\varphi(x) = \alpha$. $\square$

Lause 16 võimaldab defineerida nurga α suuruse kui

$$(\varphi|_{[0, 2\pi)})^{-1}(\alpha) \in [0, 2\pi).$$

Kirjandus

- [1] I. Zolk, *Angles and trigonometry*, Teach. Math. **28** (2025), 86–99.
- [2] H. E. Vaughan, *Characterization of the sine and cosine*, Amer. Math. Monthly **62** (1955), 707–713.
- [3] F. Viète, *Francisci Vietae variorum de rebus mathematicis responsorum, liber VIII. Cuius praecipua capita sunt, De duplicatione cubi, & quadratione circuli. Quae claudit Procheirou, seu Ad vsum mathematici canonis methodica*, Apud Iamettium Mettayer, 1593, <https://books.google.ee/books?id=TG-wXwAACAAJ>
- [4] *8th IMC 2001, July 19 – July 25, Prague, Czech Republic. Second day*, https://www.imc-math.org.uk/imc2001/prob_sol2.pdf, vaadatud: 17. mail 2025.