Tehistaip ja koolimatemaatika

Jan Willemson
Matemaatikavaramu OÜ

1. Sissejuhatus

Kuigi mõiste *tehisintellekt* (mille sünonüümideks 2025. aasta ÕS pakub veel *tehisaru*, *tehismõistus* ja *tehistaip*, lühenditena TI ja AI) pärineb juba 1950ndatest aastatest [3], võib praeguse TI-revolutsiooni alguseks pidada aastat 2022, mil USA firma OpenAI tegi avalikult kättesaadavaks oma suure keelemudeli (*large language model*, LLM), mis kandis nime ChatGPT.

Esimesed laiatarbemudelid polnud matemaatikaülesannete lahendamisel kuigi võimekad, kuid kuna lahendustega varustatud ülesandeid on mudelite treenimiseks saadaval palju, oli muidugi ainult aja küsimus, mil see probleem paraneb. Esimeseks suuremaks läbimurdeks (kooli)matemaatikas võib pidada Trinh'i jt 2024. aasta artiklit, kus ehitati AlphaGeometry nimeline mudel, mis suutis lahendada rahvusvahelise matemaatikaolümpiaadi (IMO) taseme geomeetriaülesandeid [6]. Hiljem üldistati sarnane lähenemine ka teistele teemadele, nii et TI-põhised lahendajad jõudsid oma tasemelt IMO hõbemedalistideni [1].

Kuigi eritreeninguga mudelid saavutasid matemaatikaülesannete lahendamisel väga häid tulemusi, näitasid Petrov jt 2025. aastal, et üldotstarbeliste mudelite puhul pole seis endiselt kuigi hea [4].

2025. aasta algul sai Eestis ametliku käigu sisse TI-hüppe projekt, mille eesmärk on uurida tehisaru kasutusvõimalusi koolitöös. Projekti üks esimesi käegakatsutavaid tulemusi oli ChatGPT 5. versioonil põhinev õpirakendus, mis jõudis 2026. aasta alul projektiga liitunud koolide 10. ja 11. klasside õpilasteni.

Sisuliselt kujutab õpirakendus endast ChatGPT prompti, mille abil püütakse muuta ChatGPT käitumist nii, et ta ei annaks õpilastele kohe vastuseid kätte, vaid suunaks neid samm-sammult uute teadmiste omandamisele. See on aga vaid pealiskiht ja kogu sisuline teemateadmus pärineb ikkagi ChatGPT-lt.

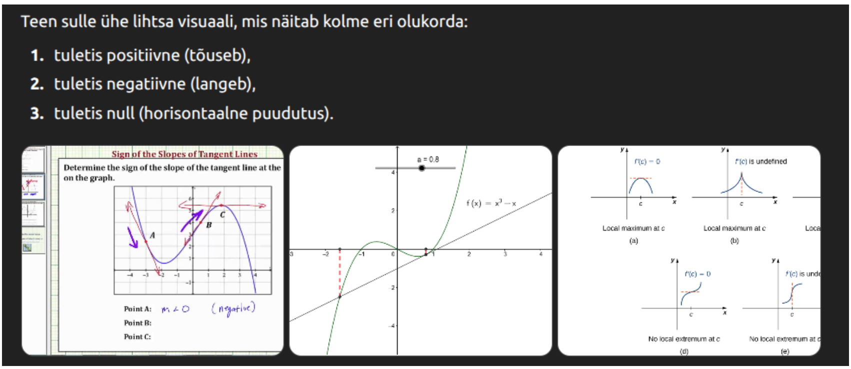
Sain 2025. aasta lõpul ligipääsu õpirakenduse beetaversioonile ning katsetasin teda reaalsete kooliprogrammi kuuluvate teemade peal. See artikkel dokumenteeribki minu tähelepanekuid. Etteruttavalt võin öelda, et minu eksperimendid kinnitavad Petrovi jt järeldusi, mille kohaselt üldotstarbelised mudelid (antud juhul ChatGPT ja Gemini) on hädas ka lihtsa matemaatikaga. Kurval kombel pole tegemist mõnede eraldi väljanopitud probleemidega; mitmesuguseid vigu esines valdavas osas minu katsetustes.

Tuleb muidugi tõdeda, et TI areneb praegu suure hooga ja võib-olla aasta-paari pärast siinkirjeldatud probleeme enam ei esine. Sel juhul võib tulevane lugeja võtta siinset artiklit kui olukorra kirjeldust 2026. aasta alguse seisuga.

2. Tähelepanekuid konkreetsetest teemadest

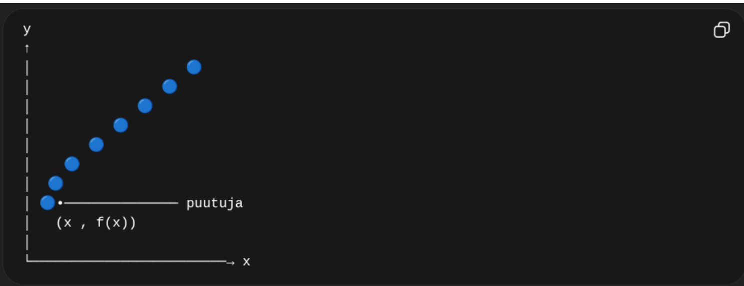
2.1. Tuletis

Kuna tuletist kasutati näitena ka ühes TI-hüppe ametlikus videos, alustasin sellest. Õpirakendus püüdis tuletist selgitada väga verbaalselt (ta on ikkagi tekstimudel!) ja seejuures läks minu jaoks kaduma suur osa matemaatilisest sisust. Palusin siis asja jooniste abil selgitada. Tulemus tuli niisugune:



Näeme, et õpirakendusele ei meeldi ise jooniseid teha, vaid ta eelistab Internetist midagi kokku tõmmata, ja see midagi pole alati tingimata see, mida vaja oleks. Sarnast efekti näeme allpool veel geomeetriaülesannete juures.

Pikema palumise peale joonistab õpirakendus midagi pseudograafikas:



Selgitus:

- 🔵 punktid tähistavad **funktsiooni graafikut** (nt $f(x) = x^2$).
- Must sirge on **puutuja** selles punktis.
- **Tuletis = selle sirge tõus** selles punktis.

Samuti on õpirakendusel probleeme üldise metoodikaga, mida näeme järgmistelt kuvatõmmistelt.

Enne kui ma panen siia päris definitsiooni $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, küsin:

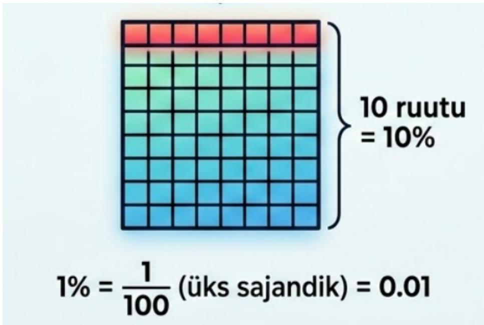
Õpirakendus püüab olla sokraatiline ja viia õpilast tuletise definitsiooni mõistmiseni samm-sammult, aga ta ei saa aru, et ta lobises just kogemata lõppeesmärgi välja.

Kokkuvõte: järsk halb muutus = suur negatiivne tuletis; aeglane halvenemine = väike negatiivne tuletis.
Kuidas see mõtteviis aitaks sul paremini mõista, miks tuletis on graafiku "kohalik tõusu-langemise kiirus"?

Mida arvaksime õpetajast, kes üritab õpilase käest küsida, millise metoodikaga õpetaja teda õpetama peaks?

2.2. Protsendi mõiste

Minu eelnev kogemus üldotstarbeliste keelemudelitega on näidanud, et nad ei oska protsenti visuaalselt selgitada. Vasakpoolsel joonisel on ChatGPT ja parempoolsel Gemini interpretatsioon ülesandest teha protsendi mõistet seletav joonis:



Seetõttu proovisin, millise tulemuse annab õpirakendus. Nagu eelpool nägime, ei taha õpirakendus ise päris jooniseid teha. Pikema palumise peale andis ta tulemuse pseudograafikas ja sedagi vigaselt.

```
[■■■■■■■■■■] 100 ruutu kokku
[■■■■■□□□□□] 50 ruutu värvitud  →  50% = 50 / 100
```

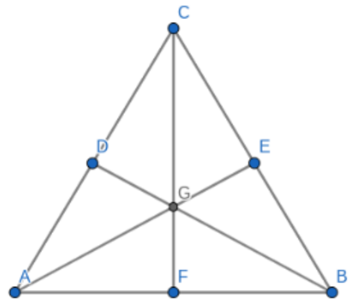
Ilmselgelt ei ole joonisel ei 100 ega 50 ruutu.

```
Tervik (100 võrdset osa):

┌──────────────────────────────────────┐
|■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■□□□□□□□□□□□|
└──────────────────────────────────────┘

 ← 30 värvitud osa →     70 tühja osa

See tähistab: 30% = 30/100.
```

Valgeid ja musti ruute on tegelikult vastavalt 24 ja 11.

2.3. Kolmnurga mediaanid

Järgmiseks palusin selgitada, miks kolmnurga mediaanid lõikuvad ühes punktis. Pärast standardset „Aga miks sul seda vaja teada on?“ ja TI veenmist, et ma ikkagi tahan asja uurida selleks, et aru saada, palusin tal teha joonise. Ta ei teinud jälle joonist ise, vaid tõmbas netist:



Pildi juurde ütles õpirakendus:

> Hästi, võtame mediaani, mis algab tipust **A** ja läheb külje **BC** keskpunkti **M**.

Paneme tähele, et joonisel ei ole punkti M; külje BC keskpunkt on hoopis E.

Kaks lauset hiljem sain sellise juhendi:

> Hea täpsustus! Kui joonistad kolmnurka kaks mediaani (AM ja BN) ja märgid nende lõikepunkti O, siis need kaks lõiku jagavad kogu algse kolmnurga neljaks väiksemaks kolmnurgaks: $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COA$ ja $\triangle AOC$.
>
> Kas sa suudaksid nüüd paberile teha sellise joonise (kolmnurk, kaks mediaani, lõikepunkt O) ja need neli väikest kolmnurka sinna ära märkida?

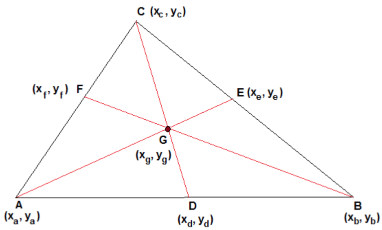
See juhend on matemaatiliselt täiesti vigane – ei teki neli kolmnurka, vaid kolm kolmnurka ja üks nelinurk; kolmnurka $\triangle BOC$ ei teki üldse ja lisaks on üks kolmnurk üles loetud kaks korda (sest $\triangle COA$ ja $\triangle AOC$ on samad). Niisiis ei, niisugust konstruktsiooni ei ole võimalik paberile joonistada.

Pärast veel paari matemaatiliselt ebakorrektset katsetust jõudsi-me välja pindalade argumendini, mida saab iseenesest kasutada. Minu palve peale joonis teha, sain järgmise vastuse:

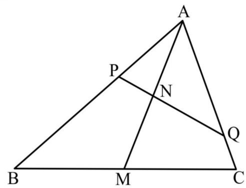
Palun tee joonis ja kirjuta see arutelu valemitega välja.

Siin on kõigepealt **joonis**, mis näitab tippu A, külge BC, selle **keskpunkti** M ja suvalist punkti P küljel BC, et näha pindalade muutumist:

ja joonised:



AM is the median of ΔABC and M is on side BC. Points P and Q are on edge AB and AC, respectively. Given AC : QC = 4 : 1 and AB : AP = 5 : 2, find AM : AN.



Vasakpoolsel joonisel ei ole punkte M ja P, parempoolsel joonisel ei asu punkt P küljel BC.

Veidi hiljem esines arutelus selline samm:

Kolmnurga ABP pindala saab võtta vektorkorrutise abil:

$$S_{ABP} = \frac{1}{2}\left|(B - A) \times (P - A)\right|.$$

Vektorkorrutis ei kuulu meie põhikooli programmi ja selle koha peal pole nii keerukat võtet tegelikult ka vaja.

2.4. SÜT ja VÜK

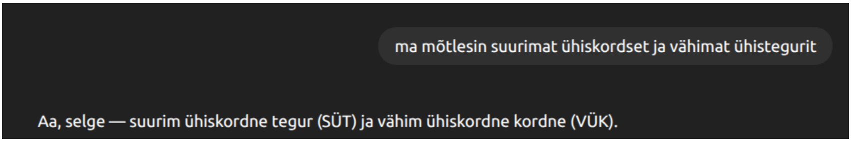
Mõtlesin, et uurin suurima ühisteguri ja vähima ühiskordse kohta ning seekord sõnastasin küsimuse veidi teisiti:

Miks SÜT-i ja VÜK-i vaja on?

Hea küsimus — enne kui läheme sisusse, aitaks mõelda: **mis kasu võiks sul olla sellest, kui sa ise aru saad, miks SÜT (süsiniku kasutustõhusus) ja VÜK (vee kasutustõhusus) üldse olemas on?**
Kas sul on praegu motivatsioon pigem mõista mõisteid laiemalt või selleks, et mõni konkreetne ülesanne/teema tunnis selgeks saada?

Ma pole siiani kindel, kas näiteks vee kasutustõhusus on päris termin. Proovisin seda netist otsida ja iroonilisel kombel sain teise TI poolt genereeritud vastuse, kus seda terminit lahti seletati. Niisama ilma TI-ta guugeldamine vastet ei andnud. Siit koorub veel üks oht TI kasutamisel õppetöös – tema väiteid võib küll proovida Interneti-allikate põhjal kontrollida, aga järjest suurem on oht sattuda teise TI hallutsinatsioonile.

Järgmiseks kirjutasin ise lahti, mida silmas pean, aga mõtlesin, et teen väikese vea sisse – suurima ühisteguri ja vähima ühiskordse asemel kirjutan suurimast ühiskordsest ja vähimast ühistegurist. TI parandas mind, aga ta tegi seda ise ka valesti:



2.5. Võrratuste tõestamine

Palusin õpirakendusel rääkida mulle võrratuste tõestamisest, aga ta juhtis teema sujuvalt võrratuste lahendamise peale (mis on küll seotud, aga siiski teine teema).

Õpirakendus lihtsustas võrratuse $3x - 5 < 7$ korrektsele kujule $x < 4$, aga siis jäi vankumatule seisukohale, et see ongi lõplik lahend. Kui see nii oleks, siis me poleks suurt midagi saavutanud – asendame lihtsalt ühe võrratuse teisega. Eesti koolis käsitletakse tegelikult ka võrratuste lahendite esitamist hulkadena; antud juhul oleks tulnud lisada kuju $x \in (-\infty; 4)$.

2.6. Jagamine ja ratsionaalarvud

Palusin õpirakendusel selgitada, miks ratsionaalarvudest tulevad perioodilised kümnendmurrud. Ta tegi näite $1 : 7$:

Näiteks kui jagad 1 : 7, siis:

- võtad 1 → jääk 1, kirjutad 0 koma,
- võtad 10 → jääk 3,
- võtad 30 → jääk 2,
- võtad 20 → jääk 6,
- võtad 60 → jääk 4,
- võtad 40 → jääk 5,
- võtad 50 → jääk 1 → ohoh, **algne jääk tuli tagasi**, seega hakkab murd korduma.

See on üsna ebaülevaatlik. Palusin tal kirjutada jagamine välja nii nagu koolis käib. Tulemus oli selline:

```
         0,142857...
       ------------
7 ) 1,0000000...
      0
      ----
      10
       7
      ----
       30
        28
      ----
         2 → (tegelikult 20)
         20
         14
      ----
          6 → (60)
          56
      ----
           4 → (40)
           35
      ----
```

Eesti koolis ei kasutata suluga jagamise notatsiooni ja teiseks on horisontaaljooned joondamata.

Perioodilist kümnendmurdu tähistab õpirakendus angloameerika traditsiooni põhjal:

$$x = 0{,}73\overline{5} \quad (\text{st } 7353555\ldots)$$

Meie koolis kasutatakse tähistust $x = 0{,}73(5)$.

2.7. Puutujalõigud

ChatGPT pole ainus TI-rakendus, mida Eestis ja koolides kasutatakse. Tegelikult on nii tasuta kui tasu eest võimalik kasutada suurt hulka mudeleid, aga ka teistel laiatarbemudelitel on matemaatikaga probleeme.

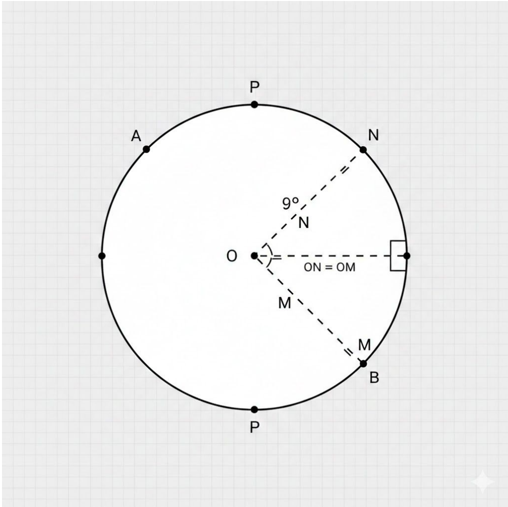
Palusin Google'i Geminil teha mulle ülesandeid, mille lahendamisel tuleks kasutada ringjoone raadiuse ja raadiuse otspunktist tõmmatud puutuja ristseisu. Esimesena sain talt sellise ülesande:

1. Ülesanne: Puutujate lõikumine ja nelinurk

Ringjoonele keskpunktiga O on tõmmatud väljaspool asuvast punktist P kaks puutujat, mis puudutavad ringjoont punktides A ja B. Sirge, mis läbib punkti O, lõikab lõiku PB punktis M ja puutujat PA punktis N nii, et $ON = OM$.
Tõesta, et $PN = PM$.

See näeb välja nagu tavaline geomeetriaülesanne kuni selle hetkeni, mil võtta pliiats ja paber ning üritada joonist teha. Siis saab kiiresti selgeks, et Gemini poolt kirjeldatud olukord on võimatu. Kui sirge läbib punkti O ja lõiku PB tema sisepunktis M, ei saa kehtida võrdus $ON = OM$.

Palusin Geminil joonise teha. Ta pani käima pildimudeli Naonobanana ja produtseeris järgmise pildi:



3. Lõpetuseks

Oma katsetuste käigus panin tähele järgmisi suundumusi.

- Sokraatiline õpirakendus püüab õpilase käest igal sammul tagasisidet küsida ja seda isegi siis, kui midagi mõistlikku küsida ei ole. Muuhulgas tähendab see, et vestlus ei taha kuidagi loomulikul moel lõppeda. Nii näiteks ei õnnestunud mul kordagi näha õpirakendust ütlemas: „Ma arvan, et sul on nüüd teema selge, aitab küll“.

- Õpirakendus üritab kõiki mõisteid ja teemasid selgitada sõnaliselt. Mõnedes ainetes on see võib-olla kasulik, aga matemaatikas on valemid ja joonised põhjusega välja mõeldud – nad aitavad täpsemalt väljenduda ning asju kompaktsemalt kirja panna.

- Õpirakendusele ei meeldi jooniseid teha. Enamasti otsib ta vastava palve peale Internetist paar pilti kokku või joonistab midagi pseudograafikas. Sellest on väga kahju, sest valdav osa inimesi on visuaalse mõtlemisega ja joonised aitavad väga palju arusaamisele kaasa. Tihti ei vasta Internetist tõmmatud joonised ka rakenduse enda kirjeldusele olukorrast.

Suhtlesin sel teemal TI-hüppe inimestega ja nad väitsid mulle, et õpirakenduses ei tohiks jooniste tegemine olla kuidagi eriliselt kinni keeratud. Võib-olla on tegemist ajutise tehnilise piiranguga, mis uuemates versioonides paraneb.

- Õpirakenduse treenimisel on kasutatud angloameerika kultuuriruumi tekste ning tulemusena ei tunne ta Eesti koolis kasutatavat matemaatilist notatsiooni.

- ChatGPT eesti keel on suures osas enam-vähem hea, aga vahel leiutab ta ise sõnu ja fraase, muuhulgas erialastena välja nägevaid, ja see võib üsna segadusseajav olla. Mõned näited.

  – Võrrandite/võrratuste ümberkujundamine (ilmselt peeti silmas teisendamist).
  – Matematiline sujuvus (mõeldi siledust, mis on eraldi matemaatiline termin).
  – Võrratuste tõestamise võte „teeme X-i üksi“ (TI pandud jutumärgid; mõeldi muutujaga liikmete ühele poole viimist).
  – „x-i väärtused, mis panevad võrratuse tööle (tõeks)“ (mõeldakse x-i väärtusi, mis rahuldavad võrratust).
  – „Lõpuline kujul“ (mõeldakse arutelu lõpus saadud avaldise kuju).
  – „võimalik jääkude hulk“ (mõeldakse jääkide hulka).
  – „Küsin üks küsimus“ (eestikeelne fraas oleks „Küsin ühe küsimuse“).

Loodetavasti on paljude väljatoodud probleemide näol tegemist TI n-ö lastehaigustega ning õpirakenduse/ChatGPT väljundi kvaliteet muutub aja möödudes paremaks. TI abiga on juba saadud uudseid matemaatilisi tulemusi [5, 2], nii et sellel tehnoloogial on kindlasti potentsiaali olla kasulik ka koolitunnis. Peamiseks küsimuseks jääb, kuidas takistada TI-l olemast liiga efektiivne, et mitte võtta õpilastelt ära õppimiseks ja kinnistamiseks vajalikku jõupingutust.

Kirjandus

[1] T. Hubert ja teised, *Olympiad-level formal mathematical reasoning with reinforcement learning*, Nature, 2025, `https://doi.org/10.1038/s41586-025-09833-y`.

[2] D. Knuth, *Claude's cycles*, 2026, `https://www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/papers/claude-cycles.pdf`.

[3] J. McCarthy, M. L. Minsky, N. Rochester ja C. E. Shannon, *A proposal for the Dartmouth summer research project on artificial intelligence, August 31, 1955*, AI Magazine **27**, 2006, 12–12.

[4] I. Petrov ja teised, *Proof or Bluff? Evaluating LLMs on 2025 USA Math Olympiad*, 2025, `https://arxiv.org/abs/2503.21934`.

[5] B. Romera-Paredes ja teised, *Mathematical discoveries from program search with large language models*, Nature **625**, 2024, 468–475.

[6] T. H. Trinh, Y. Wu, Q. V. Le, H. He ja T. Luong, *Solving olympiad geometry without human demonstrations*, Nature **625**, 2024, 476–482.