Delta- ja Daugaveti-punktid Banachi ruumide otsesummades

Bakalaureusetöö

Triinu Veeorg

Juhendajad: Rainis Haller, Katriin Pirk

Tartu Ülikool

18. august 2020. a.

Sisukord

Absoluutne normaliseeritud norm

Definitsioon

Olgu N norm vektorruumil $\mathbb{R}^2$. Öeldakse, et norm N on **absoluutne**, kui $N(a, b) = N(|a|, |b|)$ iga $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ korral. Öeldakse, et norm N on **normaliseeritud**, kui $N(1, 0) = N(0, 1) = 1$.

Absoluutne normaliseeritud norm

Definitsioon

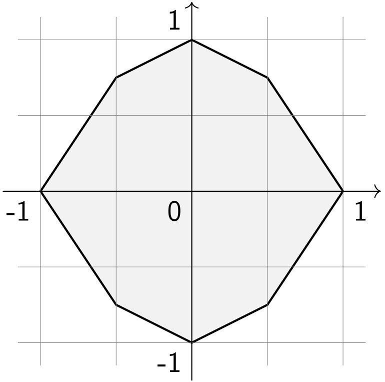
Olgu N norm vektorruumil $\mathbb{R}^2$. Öeldakse, et norm N on **absoluutne**, kui $N(a,b) = N(|a|,|b|)$ iga $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ korral. Öeldakse, et norm N on **normaliseeritud**, kui $N(1,0) = N(0,1) = 1$.

Banachi ruumide X ja Y otsesummat $X \oplus Y$ koos normiga

$$\|(x,y)\|_N = N(\|x\|,\|y\|)$$

tähistame $X \oplus_N Y$.

Absoluutse normaliseeritud normi näide



Joonis: Absoluutse normaliseeritud normi ühikkera

Kumer kate

Definitsioon

Banachi ruumi X osahulga A **kumeraks katteks** nimetatakse hulka

$$\operatorname{conv} A = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \colon n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in A, \lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0, \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1\}.$$

Hulga A **kinnine kumer kate** $\overline{\operatorname{conv}}\, A$ on hulga A kumera katte sulund.

Põhimõisted

Definitsioon

Banachi ruumil X on **Daugaveti omadus**, kui $B_X = \overline{\operatorname{conv}}\, \Delta_\varepsilon(x)$ iga $x \in S_X$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral, kus

$$\Delta_\varepsilon(x) = \{y \in B_X \colon \|x - y\| \geq 2 - \varepsilon\}.$$

Põhimõisted

Definitsioon

Banachi ruumil X on **Daugaveti omadus**, kui $B_X = \overline{\operatorname{conv}}\, \Delta_\varepsilon(x)$ iga $x \in S_X$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral, kus

$$\Delta_\varepsilon(x) = \{y \in B_X \colon \|x - y\| \geq 2 - \varepsilon\}.$$

Definitsioon

- Banachi ruumi X ühiksfääri S_X punkti x nimetatakse **Daugaveti-punktiks**, kui iga $\varepsilon > 0$ korral $B_X = \overline{\operatorname{conv}}\, \Delta_\varepsilon(x)$.

Põhimõisted

Definitsioon

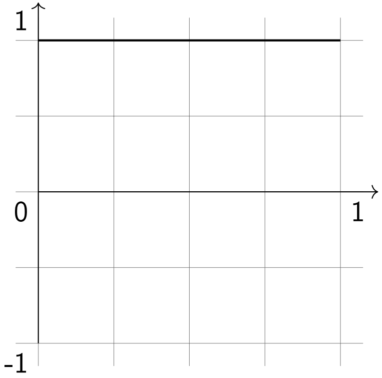
Banachi ruumil X on **Daugaveti omadus**, kui $B_X = \overline{\operatorname{conv}}\, \Delta_\varepsilon(x)$ iga $x \in S_X$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral, kus

$$\Delta_\varepsilon(x) = \{y \in B_X : \|x - y\| \geq 2 - \varepsilon\}.$$

Definitsioon

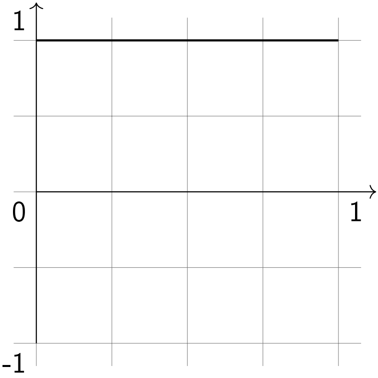
- Banachi ruumi X ühiksfääri S_X punkti x nimetatakse **Daugaveti-punktiks**, kui iga $\varepsilon > 0$ korral $B_X = \overline{\operatorname{conv}}\, \Delta_\varepsilon(x)$.
- Banachi ruumi X ühiksfääri S_X punkti x nimetatakse **Δ-punktiks**, kui iga $\varepsilon > 0$ korral $x \in \overline{\operatorname{conv}}\, \Delta_\varepsilon(x)$.

Daugaveti-punkti näide

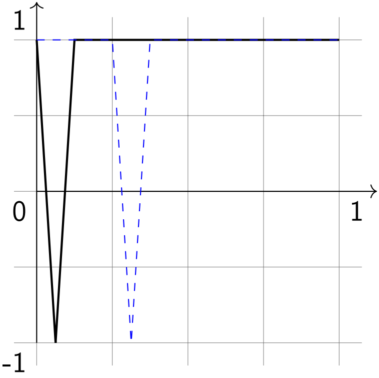


Joonis: Ruumi $C[0,1]$ element $f(x) = 1$.

Daugaveti-punkti näide



Joonis: Ruumi $C[0,1]$ element $f(x) = 1$.



Joonis: Ruumi $C[0,1]$ ühiksfääri elemendid.

- Kuidas kanduvad Δ- ja Daugaveti-punktid Banachi ruumidest X ja Y Banachi ruumi $X \oplus_N Y$ ja vastupidi?

Definitsioon

Öeldakse, et vektorruumi $\mathbb{R}^2$ absoluutsel normaliseeritud normil N on **omadus** (α), kui iga $a, b \geq 0$ korral, mille puhul $N(a,b) = 1$, on täidetud järgmine tingimus:

($\bullet$) leiduvad $\varepsilon > 0$ ja selline (a,b) ümbrus $W \subset \mathbb{R}^2$, et

1) kui $e, f \geq 0$ rahuldavad tingimusi $N(e,f) = 1$ ja
$$N\big((a,b) + (e,f)\big) \geq 2 - \varepsilon,$$
siis $(e,f) \in W$;

2) $\sup_{(e,f)\in W} e < 1$ või $\sup_{(e,f)\in W} f < 1$.

Daugaveti-punktid summaruumides

Definitsioon

Öeldakse, et vektorruumi $\mathbb{R}^2$ absoluutsel normaliseeritud normil N on **omadus** (α), kui iga $a, b \geq 0$ korral, mille puhul $N(a, b) = 1$, on täidetud järgmine tingimus:

$(\bullet)$ leiduvad $\varepsilon > 0$ ja selline (a, b) ümbrus $W \subset \mathbb{R}^2$, et

1) kui $e, f \geq 0$ rahuldavad tingimusi $N(e, f) = 1$ ja

$$N\big((a, b) + (e, f)\big) \geq 2 - \varepsilon,$$

siis $(e, f) \in W$;

2) $\sup_{(e,f)\in W} e < 1$ või $\sup_{(e,f)\in W} f < 1$.

Definitsioon

Olgu $(X, \|\cdot\|)$ Banachi ruum ja $A \subset S_X$. Ütleme, et norm $\|\cdot\|$ on A-**oktaeedriline**, kui iga $x_1, \dots, x_n \in A$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in S_X$ nii, et iga $i \in \{1, \dots, n\}$ puhul $\|x_i + y\| \geq 2 - \varepsilon$.

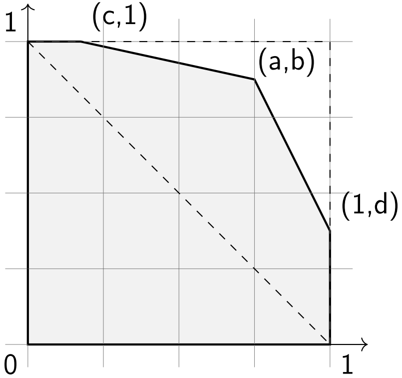
Daugaveti-punktid summaruumides

Lause

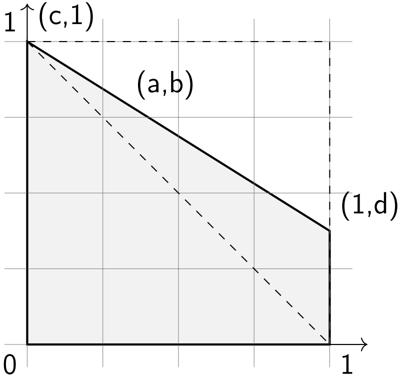
Olgu N absoluutne normaliseeritud norm vektorruumil $\mathbb{R}^2$,
$c = \max_{N(e,1)=1} e$ *ja* $d = \max_{N(1,f)=1} f$ *ning* $A = \{(c,1),(1,d)\}$.
Järgnevad väited on samaväärsed:

(i) *normil N ei ole omadust (α);*

(ii) *N on A-oktaeedriline.*



Joonis: $\{(c,1),(1,d)\}$-oktaeedrilise normi N ühikkera vektorruumi $\mathbb{R}^2$ esimeses veerandis.



Joonis: $\{(0,1),(1,d)\}$-oktaeedrilise normi N ühikkera vektorruumi $\mathbb{R}^2$ esimeses veerandis.

Olgu $x \in S_X$ ja $y \in S_Y$, olgu norm N $\{(c,1),(1,d)\}$-oktaeedriline ning kehtigu $N\big((c,1)+(a,b)\big) = N\big((1,d)+(a,b)\big) = 2$.

$N \neq \infty$, $a \neq 0$ ja $b \neq 0$	x ja y on Daugaveti-punktid $\Leftrightarrow$ (ax, by) on Daugaveti-punkt
$N \neq \infty$ ja $a = 0$	y on Daugaveti-punkt $\Leftrightarrow$ $(0, y)$ on Daugaveti-punkt
$N \neq \infty$ ja $b = 0$	x on Daugaveti-punkt $\Leftrightarrow$ $(x, 0)$ on Daugaveti-punkt
$N = \infty$	x või y on Daugaveti-punkt $\Leftrightarrow$ (ax, by) on Daugaveti-punkt

Tabel: Ülevaade Daugaveti-punktide olemasolu seostest Banachi ruumide X ja Y ning nende summaruumi $X \oplus_N Y$ vahel.

Delta-punktid summaruumides

Olgu $x \in S_X$ ja $y \in S_Y$ ning $a, b \geq 0$ sellised, et $N(a, b) = 1$, mistõttu $(ax, by) \in S_{X \oplus_N Y}$.

$a \neq 1$ ja $b \neq 1$	x ja y on Δ-punktid $\Rightarrow$ (ax, by) on Δ-punkt
$a = 1$ ja $b \neq 1$	x on Δ-punkt $\Rightarrow$ (x, by) on Δ-punkt
$a \neq 1$ ja $b = 1$	y on Δ-punkt $\Rightarrow$ (ax, y) on Δ-punkt
$a = 1$ ja $b = 1$	x või y on Δ-punkt $\Rightarrow$ (x, y) on Δ-punkt

Tabel: Ülevaade Δ-punktide olemasolu seostest Banachi ruumide X ja Y ning nende summaruumi $X \oplus_N Y$ vahel.

Delta-punktid summaruumides

Olgu $x \in S_X$ ja $y \in S_Y$ ning $a, b \geq 0$ sellised, et $N(a, b) = 1$, mistõttu $(ax, by) \in S_{X \oplus_N Y}$.

$a \neq 1$ ja $b \neq 1$	x ja y on Δ-punktid $\Leftrightarrow$ (ax, by) on Δ-punkt
$a = 1$ ja $b \neq 1$	x on Δ-punkt $\Leftrightarrow$ (x, by) on Δ-punkt
$a \neq 1$ ja $b = 1$	y on Δ-punkt $\Leftrightarrow$ (ax, y) on Δ-punkt
$a = 1$ ja $b = 1$	x või y on Δ-punkt $\Rightarrow$ (x, y) on Δ-punkt

Tabel: Ülevaade Δ-punktide olemasolu seostest Banachi ruumide X ja Y ning nende summaruumi $X \oplus_N Y$ vahel.

Definitsioon

Olgu X Banachi ruum. Ühikkera B_X **viiludeks** nimetatakse hulki

$$S(B_X, x^*, \alpha) = \{y \in B_X : x^*(y) > 1 - \alpha\},$$

kus $x^* \in S_{X^*}$ ja $\alpha > 0$.

Viilu mõiste

Definitsioon

Olgu X Banachi ruum. Ühikkera B_X **viiludeks** nimetatakse hulki

$$S(B_X, x^*, \alpha) = \{y \in B_X : x^*(y) > 1 - \alpha\},$$

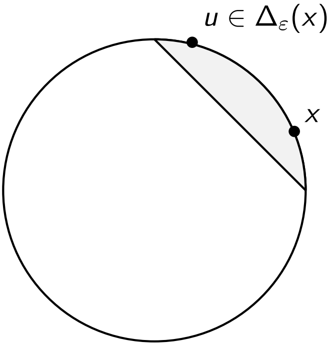
kus $x^* \in S_{X^*}$ ja $\alpha > 0$.

Lause

Olgu X Banachi ruum ja $x \in S_X$. Element x on Δ-punkt parajasti siis, kui iga punkti x sisaldava viilu $S(B_X, x^*, \alpha)$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline $y \in S(B_X, x^*, \alpha)$, et $\|x - y\| \geq 2 - \varepsilon$, st

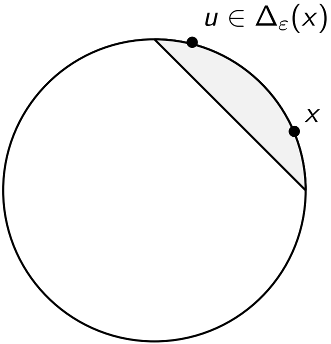
$$S(B_X, x^*, \alpha) \cap \Delta_\varepsilon(x) \neq \varnothing.$$

Delta-punktid summaruumides

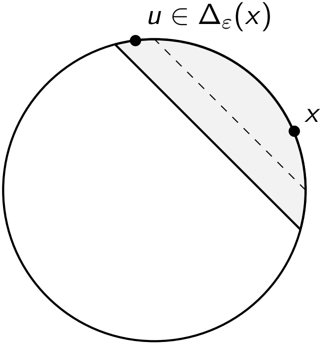


Joonis: Ühikkera B_X elementi $x \in S_X$ sisaldav viil $S(B_X, x^*, \alpha)$.

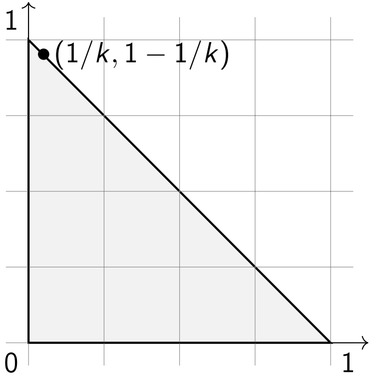
Delta-punktid summaruumides



Joonis: Ühikkera B_X elementi $x \in S_X$ sisaldav viil $S(B_X, x^*, \alpha)$.



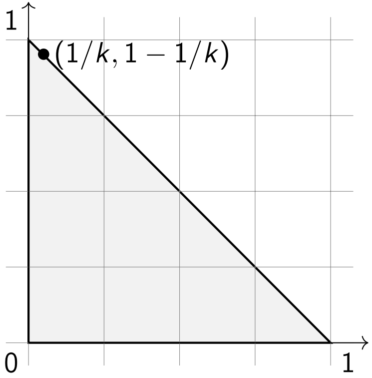
Joonis: Ühikkera B_X elementi $x \in S_X$ sisaldav viil $S(B_X, x^*, \alpha)$ koos viiluga $S(B_X, x^*, k\alpha)$.



Joonis: 1-normi N ühikkera vektorruumi $\mathbb{R}^2$ esimeses veerandis.

Olgu $x \in S_X$ Δ-punkt Banachi ruumis X ja olgu $y \in S_Y$ selline, et y ei ole Δ-punkt Banachi ruumis Y. Tähistame $z = (x/k, (1-1/k)y)$, kus $k > 1$.

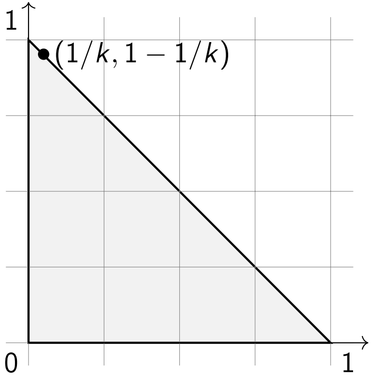
Delta-punktid summaruumides



Joonis: 1-normi N ühikkera vektorruumi $\mathbb{R}^2$ esimeses veerandis.

Olgu $x \in S_X$ Δ-punkt Banachi ruumis X ja olgu $y \in S_Y$ selline, et y ei ole Δ-punkt Banachi ruumis Y.
Tähistame $z = (x/k, (1-1/k)y)$, kus $k > 1$.
Siis z ei ole Δ-punkt Banachi ruumis $X \oplus_1 Y$.

Delta-punktid summaruumides



Joonis: 1-normi N ühikkera vektorruumi $\mathbb{R}^2$ esimeses veerandis.

Olgu $x \in S_X$ Δ-punkt Banachi ruumis X ja olgu $y \in S_Y$ selline, et y ei ole Δ-punkt Banachi ruumis Y.
Tähistame $z = (x/k, (1-1/k)y)$, kus $k > 1$.
Siis z ei ole Δ-punkt Banachi ruumis $X \oplus_1 Y$.
Samas iga punkti z sisaldava viilu $S(B_Z, f, \alpha)$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $u \in S(B_Z, f, k\alpha)$ nii, et $\|z - u\| \geq 2 - \varepsilon$